Fascicule de

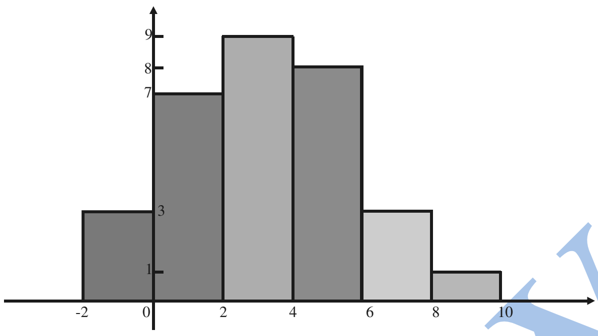
Mathématiques

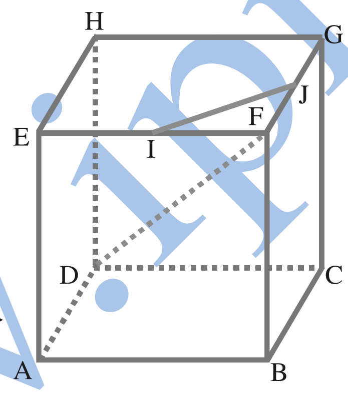
Pour les classes de

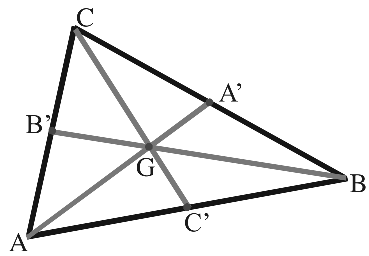
5èmes Années Secondaires

Séries C & D

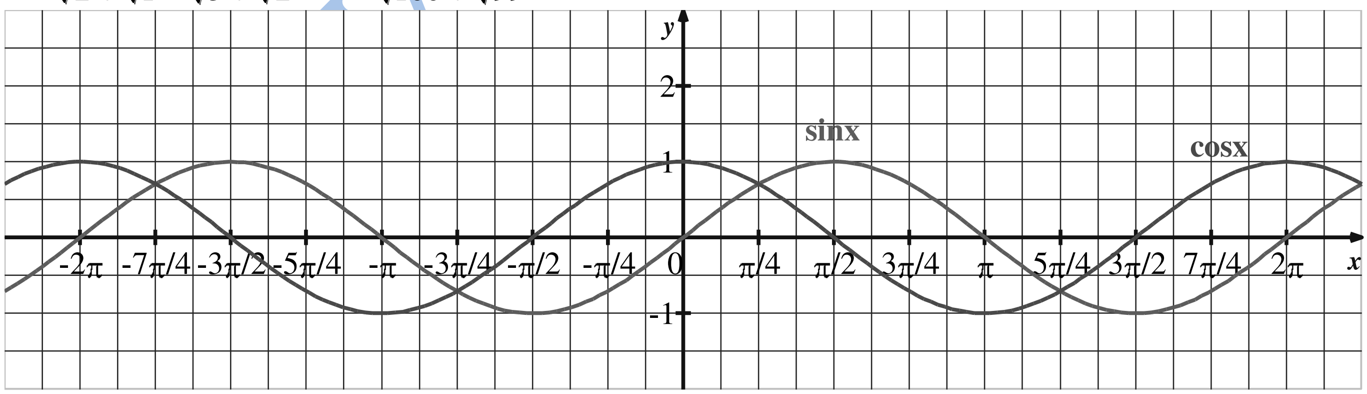
Projet de manuel







$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \quad ; \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$$



Avant – propos

Chers collègues professeurs,
Chers élèves,

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 5ème année secondaire conformément aux nouveaux programmes de la réforme de 1999.

Ce document a été réalisé dans des conditions marquées par l'urgence afin qu'il soit disponible dès la rentrée 2008 – 2009.

Il sera expérimenté à l'aide d'une grille d'évaluation qui sera distribuée en cours d'année scolaire.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques.

Ce choix a été traduit par le découpage du programme en terme de chapitres (12) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.
Cette structure est ainsi conçue:

- ‶ **Faire- savoir**″ : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels et incontournables.
- ‶ **Savoir – faire** ″: permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel lui fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.

Les auteurs

I- NOMBRES ET CALCUL DANS $\mathbb{R}$

Faire savoir

Le cours

1. Rappel sur les ensembles de nombres

a) $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; \dots\}$$

L'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers naturels, non nuls et se note $\mathbb{N}^*$

b) $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; +1; +2; \dots\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_+ = \{0; +1; +2; +3; \dots\}$
- $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_- = \{\dots; -3; -2; -1; 0\}$

Et ;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \text{ et } \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Z} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{Z}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_+ - \{0\}$ des entiers relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_- - \{0\}$ des entiers relatifs strictement négatifs.

c) $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux relatifs

$$\mathbb{D} = \{\dots; -5{,}48; \dots; 0; \dots; 2{,}127; \dots; 3{,}4; \dots\}$$

$$\mathbb{D} = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Avec ;

- $\mathbb{D}_+$ l'ensemble des décimaux relatifs positifs : $\mathbb{D}_+ = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_+\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{D}_-$ l'ensemble des décimaux relatifs négatifs : $\mathbb{D}_- = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_-\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$

Et ;

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_- \text{ et } \mathbb{D}_+ \cap \mathbb{D}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{D} - \{0\}$ est l'ensemble des décimaux relatifs, non nuls et se note $\mathbb{D}^*$
- $\mathbb{D}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_+ - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{D}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_- - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement négatifs.

d) $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels relatifs

$$\mathbb{Q} = \{{}^{a}/_{p}\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs positifs : $\mathbb{Q}_+ = \{{}^{a}/_{p};\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_+\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$
- $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs négatifs : $\mathbb{Q}_- = \{{}^{a}/_{p};\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_-\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$

Et ;

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \text{ et } \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}-\{0\}$ est l'ensemble des rationnels relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Q}^*$
- $\mathbb{Q}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_+-\{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Q}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_--\{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement négatifs.

Caractéristique

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont périodiques.

Exemple 1

$$\frac{13}{7}\in\mathbb{Q}\ car;\frac{13}{7}=1{,}857142857142\ldots=1,\overline{857142}$$

e) $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;

$$\mathbb{R}=\{\boldsymbol{a}\ tel\ que\ a\ est\ un\ \boldsymbol{DDI}^*\}\ *\boldsymbol{DDI}=\boldsymbol{D}éveloppement\ \boldsymbol{D}écimal\ \boldsymbol{Inf}ini$$

Avec ;

- $\mathbb{R}_+=$ l'ensemble des réels positifs
- $\mathbb{R}_-=$ l'ensemble des réels négatifs

Et ;

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_-\ \text{ et }\ \mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}_-=\{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{R}-\{0\}$ est l'ensemble des nombres réels, non nuls et se note $\mathbb{R}^*$
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_+-\{0\}$ des nombres réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_--\{0\}$ des nombres réels strictement négatifs.

Remarque

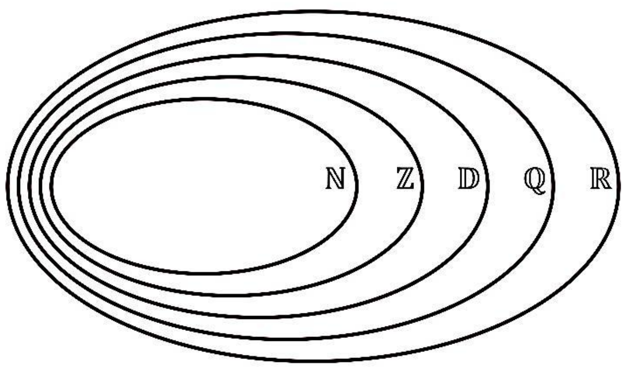
Les nombres réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

Exemple 2

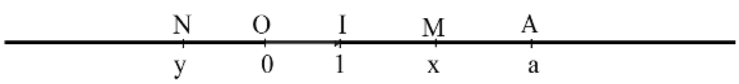
Soit $a=17{,}122333444455555666666\ldots\in\mathbb{R}$; a est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

Et $b=-12{,}0100100010000100001\ldots\in\mathbb{R}$; b est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

On a ; $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$



f) Repérage sur la droite numérique



Soit la droite (D) munie du repère $(O;I)$. L'ensemble des nombres réels permet de repérer la totalité des points de la droite (D). Autrement dit ; il existe une correspondance exacte appelée bijection, entre chaque point d'une droite graduée, et un nombre réel unique.

Ainsi, on peut donc définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

Exemple 3

Soit les nombres rationnels ; $x=4,\overline{735}$ et $y=-0,\overline{1928}$.

Donner l'écriture fractionnaire de x et y.

Solution

$$x = 4,\overline{735} \Longrightarrow 1\,000x = 4\,735,\overline{735} = 4\,731 + 4,\overline{735} = 4\,731 + x \Longrightarrow 1\,000x - x = 4\,731$$

$$\Longrightarrow 999x = 4\,731 \Longrightarrow x = 4\,731 \div 999 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1\,577}}{\mathbf{333}}$$

$$y = -0,\overline{1928} \Longrightarrow 10\,000y = -1\,928,\overline{1928} = -1\,928 + (-0,\overline{1928}) = -1\,928 + y$$

$$\Longrightarrow 10\,000y - y = -1\,928 \Longrightarrow 9\,999y = -1\,928 \Longrightarrow y = -1\,928 \div 9\,999 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1\,928}}{\mathbf{9\,999}}$$

Exemple 4

a) Trouver la nature de chaque nombre en spécifiant le plus petit ensemble de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ auquel il appartient :

$$3\sqrt{64};\ \frac{5\pi}{4\pi};\ 4-10;\ \frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}};\ 2{,}6666;\ \frac{8}{3};\ \frac{-36}{1{,}5}\ ;\ 10^{-4}$$

b) Y-t-il des nombres égaux dans cette liste ?

Solution

a)	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Le plus petit ensemble auquel il appartient
$3\sqrt{64} = 3 \times 8 = 24$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{N}$
$\frac{5\pi}{4\pi} = \frac{5}{4} = 1{,}25$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$4 - 10 = -6$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$\frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\mathbb{R}$
$2{,}6666$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$\frac{8}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Q}$
$\frac{-36}{1{,}5} = -24$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$10^{-4} = 0{,}0001$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$

b) Il n'y a pas de nombres égaux dans cette liste.

2. Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Rappel sur le calcul de base

a) Egalité et opérations

Règles de calcul

Pour tous réels x, y et a, on a :

- $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$
- $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$
- $x = y \Leftrightarrow x \times a = y \times a\ (a \neq 0)$
- $x = y \Leftrightarrow x \div a = y \div a\ (a \neq 0)$
- $x = y$ et $a = b \Leftrightarrow x + a = y + b$
- $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2\ (x \geq 0$ et $y \geq 0$
- $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}\ (x \geq 0$ et $y \geq 0$

b) Avec les parenthèses

Pour tous nombres réels a, b et c, on a :

a- Signe $(-)$ **:**

$a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$

Et $(-a) \times (-b) = ab$

b- Produit nul :

$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \; ou \; b = 0$

c- Simplification :

$ac = bc \; (c \neq 0) \Leftrightarrow a = b$

d- Calcul littéral - Produits (identités remarquables) :

Pour tous réels a, b, c, d, x, y et z, on a :

- $a + (b + c) = a + b + c$
- $a + (b - c) = a + b - c$
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $a \times (b + c) = ab + ac$
- $a \times (b - c) = ab - ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$
- $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
- $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^3 + y^3$
- $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^3 - y^3$
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Exemple 5

1°/ Développer : $(\sqrt{3} + 2)^2$; $(\sqrt{3} - 2)^2$; $(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)$.

2°/ Factoriser : $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2$;

Puis résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

Solution

$\mathbf{1}°/ \; (\sqrt{3} + 2)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3} \times 2) + (2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = \mathbf{7 + 4\sqrt{3}}$

$(\sqrt{3} - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3} \times 2) + (2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = \mathbf{7 - 4\sqrt{3}}$

$(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) = (\sqrt{7})^2 - (1)^2 = 7 - 1 = \mathbf{6}$

$\mathbf{2}°/ \; f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 = (x - 2)^2 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2$

$= \left[(x - 2) - 2\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\right]\left[(x - 2) + 2\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\right] = \left(x - 2 - \frac{6}{2}x + 4\right)\left(x - 2 + \frac{6}{2}x - 4\right)$

$= (x - 2 - 3x + 4)(x - 2 + 3x - 4) \Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = (-2x + 2)(4x - 6)}$

$f(x) = 0 \Longrightarrow (-2x+2)(4x-6) = 0 \Longrightarrow -2x+2 = 0 \; ou \; 4x-6 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{1}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right\}$

Exemple 6

1°/ Développer

$$A = (2a+3)^3; \;\; B = (5b-4)^3$$

2°/ Factoriser

$$C = x^3 + 8; \;\; D = y^3 - 27$$

3°/ Factoriser

$$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$
$$F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8$$

Solution

1°/

$$A = (2a+3)^3 = (2a)^3 + 3\times(2a)^2\times 3 + 3\times(2a)\times 3^2 + 3^3$$
$$= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$$
$$B = (5b-4)^3 = (5b)^3 - 3\times(5b)^2\times 4 + 3\times(5b)\times 4^2 - 4^3$$
$$= 125b^3 - 150b^2 + 240b - 64$$

2°/

$$C = x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$
$$D = y^3 - 27 = y^3 - 3^3 = (y-3)(y^2 + 3y + 9)$$

3°/

$$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x)^3 + 3\times(2x)^2\times 1 + 3\times(2x)\times 1^2 + 1^3 = (2x+1)^3$$
$$F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8 = (3y)^3 - 3\times(3y)^2\times 2 + 3\times(3y)\times 2^2 - 2^3 = (3y-2)^3$$

Exercice 7

Démontrer par développement ou par factorisation les identités précédentes

c) Avec les quotients

a- Signe $(-)$:

Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a :

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

b- Simplification :

$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (si $k \neq 0$)

c- Egalité :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \; (b \neq 0 \,;\; d \neq 0)$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

d- Addition :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

e- Multiplication :

$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b} \;\; et \;\; \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

f- Division :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}\ ;\ \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}\ ;\ \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}\ ;\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple 8

Calculer les quotients :

$$a = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} - 3; \quad b = \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$$

Solution

$$a = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} - 3 = 2 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} - 3 = 2 + \frac{2}{5} - 3 = 2 + 0{,}4 - 3 = \mathbf{-0,6}$$

$$b = \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{4+5}{10}\right) \div \left(\frac{18-4}{24}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{24}{14} = \frac{9 \times 24}{10 \times 14} = \mathbf{\frac{54}{35}}$$

d) Avec les puissances entières de réels

Définition

Pour tous a et b réels, et tous m et n naturels,

☖ Si $n > 0$; $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}$

☖ Si $n = 0$; $a^0 = 1$

☖ Si $n < 0$; $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}} \quad (a \neq 0)$

Règles de calcul

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple 9

Mettre sous forme de $a \times 10^n$ $(a \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{Z})$, les nombres suivants :

$153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; $[(-0{,}01)^2]^3$; $[(-0{,}2)^3]^2$.

Solution

$153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5} = (1\,530 + 3\,200 - 16) \times 10^{-5} = \mathbf{4\,714 \times 10^{-5}}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\dfrac{5^2 \times 2^3}{2^2 \times 5^3} = -\dfrac{2}{5} = -0{,}4 = \mathbf{-4 \times 10^{-1}}$

$[(-0{,}01)^2]^3 = [(-10^{-2})^2]^3 = \mathbf{10^{-12}}$

$[(-0{,}2)^3]^2 = [(-2 \times 10^{-1})^3]^2 = \mathbf{64 \times 10^{-6}}$

e) L'écriture scientifique d'un décimal relatif

Définition

La notation scientifique d'un nombre décimal relatif est de la forme $a \times 10^p$ où, a est un décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, $(1 \leq |a| < 10)$, et p est un entier relatif.

Exemple 10

Donner l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

$$A = 5\,012{,}563;\ \ B = 42\,000;\ \ C = -0{,}64908;\ \ D = -237 \times 10^{-4}; E = 0{,}00891 \times 10^{3}$$

Solution

$$A = 5\,012{,}563 = 5{,}012563 \times 10^{3};\quad B = 42\,000 = 4{,}2 \times 10^{4}$$
$$C = -0{,}64908 = -6{,}4908 \times 10^{-1};\quad D = -237 \times 10^{-4} = -2{,}37 \times 10^{-2}$$
$$E = 0{,}00891 \times 10^{3} = 8{,}91 \times 10^{6}$$

f) Nombres premiers

Définition 1

Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que b est un diviseur de a (ou que a est un multiple de b), s'il existe un entier naturel k tel que $a = k.b$

Définition 2

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs ; 1 et lui-même.

Propriété

Tout entier naturel $n \geq 2$, se décompose en un produit de facteurs de puissances de nombres premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

Exemple 11

$$5\,821\,200 = 16 \times 27 \times 25 \times 49 \times 11 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^1$$
$$3\,539\,250 = 2 \times 9 \times 125 \times 121 \times 13 = 2^1 \times 3^2 \times 5^3 \times 11^2 \times 13^1$$
$$35\,919\,936 = 64 \times 81 \times 169 \times 41 = 2^6 \times 3^4 \times 13^2 \times 41^1$$

g) Avec les racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif, on note $\sqrt{a}$ le seul nombre réel positif tel que ;

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2 = \boldsymbol{a}$$

a- Règles de calcul

Pour tout réels positifs a et b, on a ;

- $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ et\ \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n\ \ (n\ entier)$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$)

b- Expression conjuguée

Exemple 12

L'expression conjuguée de : $\sqrt{2} + 1\ est\ \sqrt{2} - 1$

L'expression conjuguée de : $3 - 4\sqrt{5}\ est\ 3 + 4\sqrt{5}$

L'expression conjuguée de : $\sqrt{5} + \sqrt{7}\ est\ \sqrt{5} - \sqrt{7}$

L'expression conjuguée de : $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\ est\ 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

c- L'équation $x^2 = a$

Si $a > 0$; il y a 2 solutions; $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Si $a = 0$; il y a 1 solution; 0

Si $a < 0$; il n'y a pas de solution.

Exemple 13

1°/ Simplifier : $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180}$;

$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}$.

2°/ Ecrire sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2} \ ; \qquad B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \ ; \qquad C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3}$$

Solution

1°/ $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} = 5\sqrt{9\times 5} - \sqrt{16\times 5} + 2\sqrt{36\times 5} = 5\times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\times 6\sqrt{5}$

$= 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = (15 - 4 + 12)\sqrt{5} = \mathbf{23\sqrt{5}}$

$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27} = 5\sqrt{16\times 3} - 2\sqrt{25\times 3} + \sqrt{9\times 3} = 5\times 4\sqrt{3} - 2\times 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (20 - 10 + 3)\sqrt{3} = \mathbf{13\sqrt{3}}$

2°/ Je multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \mathbf{2-\sqrt{3}}$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{21}+6}{7-3} = \frac{2\sqrt{21}+6}{4} = \mathbf{\frac{\sqrt{21}+3}{2}}$$

$$C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3} = \frac{(4\sqrt{2}-3)(5\sqrt{2}-3)}{(5\sqrt{2}+3)(5\sqrt{2}-3)} = \frac{40-12\sqrt{2}-15\sqrt{2}+9}{50-9} = \mathbf{\frac{49-27\sqrt{2}}{41}}$$

h) Avec la valeur absolue

Définition

Soit x un nombre réel :

- $|x| = x \ si \ x \geq 0$
- $|x| = -x \ si \ x \leq 0$

Règles de calcul

Soit x et y deux réels, et a et b deux valeurs réelles :

☒ $|x| \geq 0$

☒ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

☒ $|x| = |-x|$

☒ $\sqrt{x^2} = |x|$

☒ $|x| \times |y| = |x \times y|$

☒ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

☒ $|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$

☒ $|x + y| \leq |x| + |y|$

☒ $|x^n| = |x|^n$
☒ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
☒ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$
☒ $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$

Exemple 14

Trouver à chaque fois le ou les réel(s) x tel(s) que :

a)$|x| = 7$; **b)** $|x| = -4$; **c)** $|x - 4| = 1$; **d)** $|1 - 2x| = 3$; **e)** $|x - 5| < 2$; **f)** $|x + 1| \geq 7$.

Solution

a) $|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7 \; ou \; x = 7) \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{-7}; \mathbf{7}\}$

b) $|x| = -4 \; \Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Phi}$ il n'existe pas de solutions.

c) $|x - 4| = 1 \; \Leftrightarrow (x - 4 = -1 \; ou \; x - 4 = 1)$ d'où, $x = 3 \; ou \; x = 5 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

d) $|1 - 2x| = 3 \; \Leftrightarrow (1 - 2x = -3 \; ou \; 1 - 2x = 3)$ d'où, $x = 2 \; ou \; x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{-1}; \mathbf{2}\}$

e) $|x - 5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < x - 5 < 2)$ d'où, $3 < x < 7 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]\mathbf{3}; \mathbf{7}[$

f) $|x + 1| \geq 7 \Leftrightarrow (x + 1 \leq -7 \; ou \; x + 1 \geq 7)$ d'où, $x \leq -8 \; ou \; x \geq 6 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{-8}] \cup [\mathbf{6}; +\infty[$

Exemple 15

Ecrire sans la valeur absolue

$$|3 - \sqrt{13}| \; ; \quad \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{24}}\right|$$

Solution

Comme ; $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$

Comme on a ; $opp(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0 \Rightarrow$
$|3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$

Comme ; $\sqrt{12} - 4 < 0 \; et \; 5 - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow |\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12} \; et \; |5 - \sqrt{26}| = 5 - \sqrt{26}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{26}}\right| = \frac{|\sqrt{12} - 4|}{|5 - \sqrt{26}|} = \frac{4 - \sqrt{12}}{5 - \sqrt{26}}$$

i) Ordre – encadrement et opérations

Règles de calcul

Pour tous réels a, b, x et y, on a :

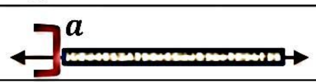
☒ $a \leq 0 \; et \; 0 \leq b \Rightarrow a \leq b$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a \; (a \in \mathbb{R})$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x - a \leq y - a \; (a \in \mathbb{R})$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \times a \leq y \times a \; (a > 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \times a \geq y \times a \; (a < 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \div a \leq y \div a \; (a > 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \div a \geq y \div a \; (a < 0)$
☒ $0 \leq x \leq y \; et \; 0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq ax \leq by$
☒ $a \leq b \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -b \leq -a$
☒ $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
☒ $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$
☒ $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

j) Intervalles de $\mathbb{R}$ – Ordre – Encadrements

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$;

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ caractérisé par des inégalités :

inégalités	Représentation	Intervalles
$a \leq x \leq b$		$x \in [a; b]$
$a \leq x < b$		$x \in [a; b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a; b]$
$a < x < b$		$x \in]a; b[$
$x \geq a$		$x \in [a; +\infty]$
$x > a$		$x \in]a; +\infty[$
$x \leq a$		$x \in]-\infty; a]$
$x < a$		$x \in]-\infty; a[$
$x \in \mathbb{R}$		$x \in]-\infty; +\infty[$

Centre et rayon d'un intervalle

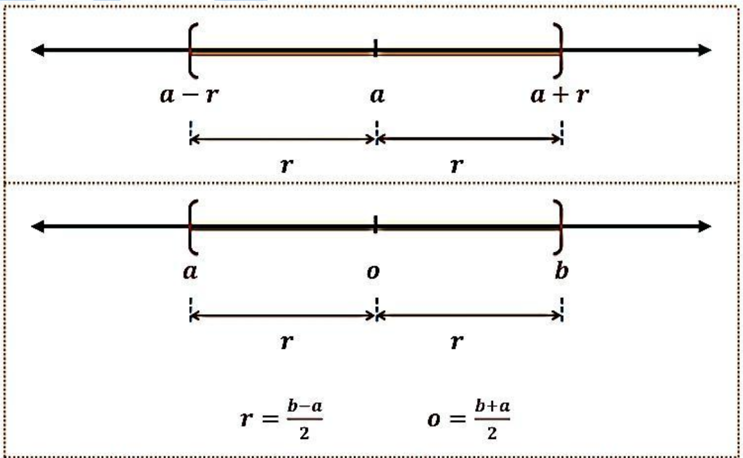
Soit a un nombre réel, et soit r un réel positif. Pour tout nombre réel x on a ;

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

a est appelé centre de l'intervalle et r son rayon et, plus généralement ;

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Centre} = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \text{Rayon} = \frac{b-a}{2}$$



a- Intervalles à branches extérieures

$$x \leq a \text{ ou } x \geq b \Leftrightarrow \left|x + \frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$$

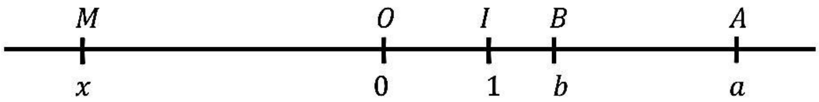
b- Distance dans $\mathbb{R}$

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow d\left(x; \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\boldsymbol{a} < x < b \Leftrightarrow d\left(\boldsymbol{x}; \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}\right) < \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$$

c- Interprétation géométrique

Soit a et b deux réels quelconques avec $a \leq b$ (ou $a \geq b$) sur une droite graduée (d) munie d'un repère $(O; I)$. Soit A et B les points d'abscisses respectifs a et b. Par définition, la distance des réels a et b, notée $d(a; b)$ est la distance AB. On a ; $d(a; b) = AB = |a-b| = |b-a|$. En particulier, si M est un point d'abscisse x ($x \in \mathbb{R}$), alors, $d(x; 0) = |x-0| = |x| = OM$.
(***La figure suivante est faite avec a*** $> b$ ***et x*** < 0).



Exemple 16

Ecrire à l'aide d'intervalles, de la valeur absolue les inégalités suivantes:
a) $1 \leq x \leq 6$; **b)** $-5 < x < -3$; **c)** $-2 < x < 5$; **d)** $-11 < x < -1$; **e)** $-7 \leq x \leq 8$; **f)** $5 \leq x \leq 16$
puis exprimer les en terme de distance.

$\boldsymbol{a}$) $1 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in]1;\ 6[\Leftrightarrow \left|x - \frac{1+6}{2}\right| \leq \frac{7-1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| \leq \frac{5}{2}\ d'où, d\left(x; \frac{7}{2}\right) \leq \frac{5}{2}$

$\boldsymbol{b}$) $-5 \leq x \leq -3 \Leftrightarrow x \in]-5;\ -3[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-5+(-3)}{2}\right| \leq \frac{-3-(-5)}{2} \Leftrightarrow |x+4| \leq 1\ d'où, d(x;\ -4) \leq 1$

$\boldsymbol{c}$) $-2 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-2;\ 5[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-2+5}{2}\right| \leq \frac{5-(-2)}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}\ d'où, d\left(x; \frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$

$\boldsymbol{d}$) $-11 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-11;\ -1[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-11+(-1)}{2}\right| < \frac{-1+11}{2} \Leftrightarrow \left|x + \frac{12}{2}\right| < \frac{10}{2}$

$$\Leftrightarrow d\left(x;\ -\frac{12}{2}\right) < 5$$

$\boldsymbol{e}$) $-7 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [-7;\ 8] \Leftrightarrow \left|x - \frac{-7+8}{2}\right| \leq \frac{8-(-7)}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{15}{2} \Leftrightarrow d\left(x; \frac{1}{2}\right) \leq \frac{15}{2}$

$\boldsymbol{f}$) $5 \leq x \leq 16 \Leftrightarrow x \in [5;\ 16] \Leftrightarrow \left|x - \frac{5+16}{2}\right| \leq \frac{16-5}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{21}{2}\right| \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow d\left(x; \frac{21}{2}\right) \leq \frac{11}{2}$

3. Ordre – Encadrement – Calcul approché

a) Ordre dans $\mathbb{R}$

Définitions

Soit a et b deux nombres réels.
$a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$ (*$b - a$ est un réel positif*).
$a < b$ signifie que $b - a > 0$ (*$b - a$ est un réel strictement positif*).
$a \geq b$ signifie que $b - a \leq 0$ (*$b - a$ est un réel négatif*).
$a > b$ signifie que $b - a < 0$ (*$b - a$ est un réel strictement négatif*).

b) Le majorant et le minorant

m est le minorant d'un ensemble E, signifie que ;

$$\forall a \in E \Longrightarrow m < a$$

M est le majorant d'un ensemble E, signifie que ;

$$\forall a \in E \Longrightarrow a < M$$

c) Propriétés

1°/ Pour tous réels a, b et c, on a :

$a \leq b$ et $b \leq a \Leftrightarrow a = b$

$a \leq b$ et $b \leq c \Leftrightarrow a \leq c$

2°/ Soit a et b deux nombres réels ;

Pour tout réel c ; $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

Pour tout réel positif c ; $a \leq b \Leftrightarrow a.c \leq b.c$

Pour tout réel négatif c ; $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$

En particulier $a \leq b \Longrightarrow -b \leq -a$

Pour tout réels a, b, c et d ; $a \leq b$ et $c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$

Pour tout réels positifs a, b, c et d ; $a \leq b$ et $c \leq d \Longrightarrow ac \leq bd$

Pour tout réels positifs a et b ; $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$, $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Pour tout réels strictement positifs a et b ; $a \leq b \Longrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Exercice 7

Démontrer les deux propriétés précédentes.

Remarque

La partie entière $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que ; $n \leq x \leq n + 1$

Exemple 17

1 - On donne les encadrements suivants :

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

En déduire des encadrements pour :

$$\sqrt{6}:\ \ \sqrt{10};\ \ \sqrt{15};\ \ \sqrt{\frac{15}{2}};\ \ 3\sqrt{5};\ \ -4\sqrt{3};\ \ 5\sqrt{2};\ \ \frac{3\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$$

Solution

$\mathbf{1}°/\ \ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\ et\ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$\Longrightarrow 1{,}414 \times 1{,}732 < \sqrt{2} \times \sqrt{3} < 1{,}415 \times 1{,}732$

$\Longrightarrow \mathbf{2{,}449048} < \mathbf{\sqrt{6}} < 2{,}452195$

$\mathbf{2}°/\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\ et\ 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$\Longrightarrow 1{,}414 \times 2{,}236 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1{,}415 \times 2{,}237$

$\Longrightarrow \mathbf{3{,}161704} < \mathbf{\sqrt{10}} < 3{,}165355$

$\mathbf{3}°/\ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733\ et\ 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$\Longrightarrow 1{,}732 \times 2{,}236 < \sqrt{3} \times \sqrt{5} < 1{,}733 \times 2{,}237$

$\Longrightarrow \mathbf{3{,}872752} < \mathbf{\sqrt{15}} < 3{,}874988$

$\mathbf{4}°/\ 3{,}872752 < \sqrt{15} < 3{,}874988$

$et\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$$\Longrightarrow \frac{3{,}872752}{1{,}414} < \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} < \frac{3{,}874988}{1{,}415}$$

$\Rightarrow \mathbf{2,738862} < \sqrt{\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}} < 2{,}738507$

5°/ $3 \times 2{,}236 < 3 \times \sqrt{5} < 3 \times 2{,}237$

$\Rightarrow \mathbf{6,708} < 3\sqrt{\mathbf{5}} < 6{,}711$

6°/ $-4 \times 1{,}732 > -4 \times \sqrt{3} > -4 \times 1{,}733$

$\Rightarrow -6{,}928 > -4\sqrt{3} > -6{,}932$

$\Rightarrow \mathbf{-6,9321} < -4\sqrt{\mathbf{3}} < -6{,}928$

7°/ $5 \times 1{,}414 < 5 \times \sqrt{2} < 5 \times 1{,}415$

$\Rightarrow \mathbf{7,07} < 5\sqrt{\mathbf{2}} < 7{,}075$

8°/ $\frac{6{,}708 - 6{,}9321}{7{,}07} < \frac{3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} < \frac{6{,}711 - 6{,}928}{7{,}075}$

$\Rightarrow \mathbf{-0,031697} < \frac{\mathbf{3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}}{\mathbf{5\sqrt{2}}} < -0{,}030671$

d) Valeur approchée-Encadrement

Définition

Soient a et b deux nombres réels, ε un nombre réel strictement positif.
b est une valeurs approchée de a à ε près signifie que ; $|a - b| \leq \varepsilon$
ε est l'incertitude de l'approximation ou de la valeur approchée.

Exemple 18

a) Donner des valeurs approchées (sans oublier l'incertitude) de x et de y en utilisant les encadrements ;

$$2{,}15 \leq x \leq 2{,}18 \ ; \quad 3{,}14 \leq y \leq \frac{22}{7}$$

b) Traduire par un encadrement chacune des informations suivantes ;

☒ 0,818 est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\frac{9}{11}$

☒ 2,351 est une valeur approchée à 2×10^{-4} près de A.

Solution

a) Les valeurs approchées

$$2{,}15 \leq x \leq 2{,}18 \ \Rightarrow x = 2{,}165 \text{ à } 0{,}015 \ près$$

$$3{,}14 \leq y \leq \frac{22}{7} \Rightarrow y = 3{,}1414 \text{ à } 0{,}0014 \ près$$

b) Traduction par des encadrements

Information	Traduction
0,818 est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\frac{9}{11}$	$0{,}818 < \frac{9}{11} < 0{,}819$
2,351 est une valeur approchée à 2×10^{-4} près de A	$2{,}351 < A < 2{,}352$

Exercices généraux

Ensembles de nombres

Exercice 1.

a) Les nombres rationnels suivants sont-ils décimaux ?

$\frac{21}{14}, \quad \frac{216}{72}, \quad \frac{497}{17}, \qquad 4 \times \left(\frac{17}{16} + \frac{1}{4}\right)$

b) Donner dans chaque cas si la réponse est négative, l'écriture sous forme de fractions irréductibles

Exercice 2.

Les nombres réels suivants sont-ils rationnels ? Décimaux ? Entiers relatifs ? Entiers naturels ?

$$\sqrt{\frac{4}{25}},\qquad 10\sqrt{0{,}09},\qquad \frac{3\pi}{10},\qquad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}},\qquad \left(\sqrt{2}-1\right)^2,\qquad \frac{5}{\sqrt{0{,}01}}$$

Calcul sur les puissances

Exercice 3.

On pose a, b, c des réels non nuls. Simplifier ;

$$\frac{a^{-2}a^{-3}a^5}{a^{-4}a^3a^2},\qquad (a^3b^3)(a^2b)^{-1},\qquad \frac{a^{-2}b^{-5}}{a^3a^{-2}},\qquad \frac{a^5}{a^8}\left(\frac{a^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2},\qquad \frac{(a^2b)^3b^2c^3}{a^2c(bc^2)^3}$$

Mettre les résultats sous la forme a^n, $\quad a^nb^p \quad ou \;\; a^nb^pc^q$.

Exercice 4.

Calculer et simplifier :

$x = \left(\frac{11}{7}+\frac{7}{11}\right)^2 - \left(\frac{11}{7}-\frac{7}{11}\right)^2$;

Exercice 5.

Sans calculatrice, simplifier :

$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times 1{,}5^{10}$; $B = \left(\frac{1}{20}\right)^3 \times \frac{(4\times10^{-3})^2}{0{,}02^5}$.

Exercice 6.

Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme de produits de puissances de nombres premiers, simplifiés :

$A = \frac{4^3}{(-2)^5}$; $\qquad B = \frac{8^3\times(-45)^7}{(-15)^6\times10^3}$; $\qquad C = \frac{2^2\times3^{-5}\times25}{10\times3^2\times5^{-3}}$.

$D = \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{15}$; $\qquad E = \frac{16\times10^{-8}\times81\times10^{-5}}{2{,}43\times10^3\times256\times10^{-12}}$.

Calculs sur les nombres premiers

Exercice 7.

Donner la décomposition en produit facteurs premiers 140 ; 2 500 ; 1 728 000

Exercice 8.

A. Décomposer 84 et 630 en produits de facteurs premiers,

B. En déduire le $PGDC(84; 630)$

C. En déduire la forme irréductibles de $\frac{84}{630}$.

Exercice 9.

1°/ Décomposer 1 624 en produit de facteurs premiers ;

2°/ Ecrire sous forme irréductible $A = \frac{1\,624}{70}$;

3°/a) Trouver le Plus Petit Multiple Commun $PPCM(1\,624\,;\,70)$;

b) En déduire la valeur exacte de $B = \frac{-3}{1\,624} + \frac{4}{70}$ (sous forme irréductible) ;

4°/ Ecrire $\sqrt{1\,624}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b naturels et $a \geq 1$) ;

Ecriture scientifique

Exercice 10.

Donner l'écriture scientifique des nombres ;

$593{,}7$; $-0{,}051$; 35×10^{-4} ; -73.000

Identités remarquables et équations

Exercice 11.

1°/ Montrer que : $\frac{2}{3}$ est une solution de l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$, y a-t-il une autre solution pour cette équation ?

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a)** $x^2 = 5$; **b)** $x^2 = -3$;

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(2x-1)^2 = 25(5-x)^2$;

4°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+1)(3-x) = x + 1$.

Exercice 12.

1°/ a et b sont des réels, développer ;

$$A = (2a+3)^3; \quad B = (5b-4)^3$$

2°/ x et y sont des réels, factoriser ;

$$C = x^3 + 8; \quad D = y^3 - 27$$

3°/ x et y sont des réels, factoriser ;

$$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$
$$F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8$$

Développement – Réduction – Factorisation – équations produit-nul

Exercice 13.

1°/ Développer et réduire : $A = 4(3-2x)^2 - (2x-7)(1-5x)$;

2°/ Calculer la valeur exacte de : $B = -x^2 + 4x - 1$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$;

3°/ Soit : $C = -2x^2 + 11x - 5$, montrer que $C = (2x-1)(5-x)$;

4°/ Montrer que : $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

Exercice 14.

Factoriser puis résoudre l'équation dans chaque cas :

$(2x+3)(x-4) - 3(2x+3)(3x+5) = 0$; $3x^2 - x = 0$; $4x^3 - 25x = 0$;

$(2x-1)(-4x+3) - 3(2x-1)^2 = 0$; $4x^2 - 9(5x-2)^2 = 0$;

$(x+1)^3 - 16(x+1) = 0$; $x^2 - 4 + (x-2)(3-5x) = 0$.

Equations quotients

Exercice 15.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{x+1} = \frac{-3}{x-2}$; **b)** $\frac{x^2+2x}{x+2} = 0$; **c)** $\frac{2x-5}{x+1} = \frac{x+1}{2x-5}$.

Mettre un problème en équation et le résoudre

Exercice 16.

1°/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \\ x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5). \end{cases}$$

2°/ Trouver trois entiers consécutifs qui soient les mesures des côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 17.

Trouver deux réels dont la somme soit 22 et la différence de leurs carrés 88.

Forme adaptée au problème posé

Exercice 18.

On donne $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x-5)(6-2x)$.

1°/ Développer et réduire $P(x)$.

2°/ Factoriser $P(x)$.

3°/ Trouver la forme convenable pour résoudre les équations :

a) $P(x) = 0$;

b) $P(x) = -15$;

c) $P(x) = 7x + 5$.

Exercice 19.

Soit $A = x^2 + 4x + 21$ (forme 1).

1°/ Montrer que pour tout x, $A = (7-x)(x+3)$ (forme 2).

2°/ Montrer que pour tout x, $A = -(x-2)^2 + 25$ (forme 3).

3°/ En choisissant la bonne écriture de A :

a) Calculer la valeur exacte de A pour $x = 2 + \sqrt{2}$;

b) Résoudre $A = 0$;

c) Résoudre $A = 21$;

d) Résoudre $A = 16$;

e) Résoudre $A = 7 - x$.

Exercice 20.

Soit $A = \frac{3x^2+5x+2}{x^2-4}$ (forme 1), définie pour $x \in E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

1°/ Montrer que, pour tout $x \in E, A = 3 + \frac{5x+14}{x^2-4}$ (forme 2).

2°/ En choisissant la bonne écriture de A ; résoudre $A = \frac{2}{x^2-4}$.

Calcul avec les quotients

Exercice 21.

Simplifier ;

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}, \qquad \frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}, \qquad \frac{4-\frac{2}{3}}{4}$$

Exercice 22.

Simplifier ;

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}$$

Exercice 23.

Soient $a, b\ et\ c$ trois réels non nuls.

a) Ecrire $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sous forme d'une seule fraction

b) Montrer que si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, alors $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Le vérifier pour $a=2, b=3$ et $c=-1$.

c) La réciproque est –elle vraie ?

Exercice 24.

Vérifier l'égalité ; $1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-x^5}{1-x}$

successivement pour $x=0, x=-1\ et\ x=\frac{1}{2}$

Le démontrer pour x quelconque différent de 1.

Exercice 25.

Donner l'écriture fractionnaire de

$$A=\frac{x+2}{3-x}+\frac{5+x}{x+1}$$

Exercice 26.

Donner la fraction correspondante au quotient rationnel dans chaque cas :

$x=2,\overline{25}$; $\qquad y=0,\overline{463}$; $\qquad z=45,\overline{8473}$;

Calcul sur les racines carrées

Exercice 27.

Simplifier

a) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$, **b)** $(\sqrt{5}-1)^2$, **c)** $\sqrt{32}+\sqrt{42}$, **d)** $\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}$

Exercice 28.

Ecrire chacun des nombres suivants sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}}\ ;\ B = \frac{1}{\sqrt{2}-1};\ C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 29.

En déduire une expression simple de la somme ;

$$N = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

Exercice 30.

Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or, et on le note φ.

a) Comparer $\varphi - 1$ et $\frac{1}{\varphi}$

b) En déduire que φ est une solution de l'équation $x^2 = x + 1$, puis calculer φ^2.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, φ est une solution de l'équation ; $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$.

d) Calculer alors φ^3 et φ^4

Valeur absolue

Exercice 31.

Calculer chacun des nombres suivants ;

$$\left|\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right| \ et\ \left|\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right|$$

Et donner le résultat sous forme d'une fraction.

Exercice 32.

Ecrire sans valeur absolue les réels suivants ;

$$a = \left|\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right|, b = |10^{-1}|, c = |1{,}7-\sqrt{3}|, d = |\pi^2 - 10|, e = \left|\left(\frac{5}{2}-\sqrt{5}\right)(-3)\right|$$

Exercice 33.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

$\boldsymbol{a})\ |x+2| = 5,\quad \boldsymbol{b})\ |x+2| = -5,\quad \boldsymbol{c})\ |2x-1| = 3,\quad \boldsymbol{d})|2x+1| = |x+3|$

Exercice 34.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes ;

$\boldsymbol{a})\ |x| \le 3,\quad \boldsymbol{b})\ |5x-1| \le 3,\quad \boldsymbol{c})\ |x| \ge 3,\quad \boldsymbol{d})\ \left|2-\frac{1}{3}x\right| > 1$

Calcul sur les intervalles

Exercice 35.

Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants :

a) L'ensemble I_1 des x tels que $3 \ge x \ge -5$;

b) L'ensemble I_2 des x tels que $0 < x < 51$;

d) L'ensemble I_3 des x tels que $2 \le x$;

e) L'ensemble I_4 des x tels que $x > -3$;
f) L'ensemble I_5 des x tels que $-4 \geq x$.

Exercice 36.
On appelle intersection de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J. On la note $I \cap J$.
On appelle la réunion de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J. On la note $I \cup J$.
1°/ Soit $I =]-5; 4]$ et $J = [2; 7[$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.
2°/ Soit $K =]-\infty; 3[$ et $L = [4; +\infty[$. Déterminer $K \cap L$ et $K \cup L$.

Exercice 37.
A l'aide d'un schéma adéquat, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés ;
a) $I =]-\infty; 1[$ et $J = [-3; +\infty[$
b) $I =]-5; +\infty[$ et $J = [4; +\infty[$
c) $I =]-\infty; 1[$ et $J =]1; +\infty[$

Exercice 38.
Donner sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, les ensembles des réels x définis par les conditions suivantes ;
a) $x \leq 3$ et $x > -1$, **b)** $x \geq 2$ ou $x < 1$, **c)** $x \in \mathbb{R}$,
d) $x \leq \frac{1}{2}$ et $x > -1$, **e)** $x < 3$ et $x \neq -1$, **f)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Exercice 39.
Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée. Déterminer ensuite $I \cap J$ et $I \cup J$.
a) $I =]-5; 1[$ et $J = \left[-\frac{5}{7}; 6\right[$
b) $I = \left]-2; -\frac{2}{3}\right[$ et $J = [-2; +\infty[$
c) $I = \left]-\infty; \sqrt{2}\right[$ et $J =]1{,}413; 1{,}415[$.

Ordre dans $\mathbb{R}$
Exercice 40.
Comparer les nombres réels suivants ;

$\boldsymbol{a})\ \dfrac{23}{99}\ et\ \dfrac{231}{990}$, $\quad \boldsymbol{b})\ \dfrac{99}{23}\ et\ \dfrac{990}{231}$, $\quad \boldsymbol{c})\ \dfrac{23}{99}\ et\ \dfrac{239}{999}$

$\boldsymbol{d})\ 3^{11}\ et\ 9^5$, $\quad \boldsymbol{e})\ 2\sqrt{3}\ et\ 3\sqrt{2}$, $\quad \boldsymbol{f})\ \left(\sqrt{5}\right)^7\ et\ 5^5$

$\boldsymbol{g})\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\ et\ \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\quad \boldsymbol{h})\ \sqrt{13}-\sqrt{8}\ et\ \sqrt{14}+\sqrt{7}$

$\boldsymbol{i})\ \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\ et\ \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $\quad \boldsymbol{j})\ 7-3\sqrt{5}\ et\ \sqrt{14}+\sqrt{7}$

Exercice 41.

Dans chacun des deux cas suivants, ranger par ordre croissant les réels ;

$\boldsymbol{a})\ \frac{28}{29}, \quad \frac{25}{28}, \quad \frac{27}{28}, \quad \frac{28}{26}, \quad \frac{28}{25}, \quad \frac{26}{28}$

$\boldsymbol{b})\ \sqrt{17}+3\sqrt{2}, \quad 4+\sqrt{19}, \quad \sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)$

Exercice 42.

Soient a et b deux nombres réels de $]0;1[$

a) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$,

b) Comparer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $1+\frac{1}{ab}$.

Exercice 43.

a, b et c sont des réels strictement positifs.

a) Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$,

b) Comparer par les applications :

$\boldsymbol{a})\ \frac{3}{7}\ et\ \frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{b})\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\ et\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

Exercice 44.

x et y sont deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer les inégalités suivantes :

$\boldsymbol{a})\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, \qquad \boldsymbol{b})\ si\ x<y\ alors, x<\sqrt{xy}<y$

$\boldsymbol{c})\ \frac{1}{x+y}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \qquad \boldsymbol{d})\ \sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Exercice 45.

Démontrer que pour tous nombres réels a et b.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

On suppose de plus que, a et b sont positifs.

Démontrer qu'alors ;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Valeur absolue

Exercice 46.

a et b sont deux nombres réels.

a) On suppose que $|a+b| = |a|+|b|$ $(\mathbf{1})$

En élevant l'égalité précédente au carré, démontrer que ; $|a|\times|b| = ab$.

Que pouvez-vous dire des signes de a et b ?

b) On suppose que a et b sont de même signe, démontrer qu'alors, l'égalité (1) est vérifiée.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation ; $|x^2-3x+1| = |x^2|+|-3x+1|$

Exercice 47.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $|4x+3|=2$, **b)** $|-x-1|=-2$, **c)** $|2x+1|+|x-5|=6$,

d) $|3x+2|-|x-7|=3$, e) $\left|\frac{2x+3}{3x-5}\right|=\frac{3}{11}$

Exercice 48.

Voici cinq façons de décrire un même ensemble

a) $x \in [2;6]$ (en termes d'intervalle)

b) $2 \leq x \leq 6$ (en termes d'encadrement)

c) $|x-4| \leq 2$ (en termes de valeur absolue)

d) $d(x;4) \leq 2$ (en termes de distance)

e) (représentation géométrique)

Traduire de chaque façon les ensembles suivants :

a) $x \in [2;6]$, b) $x \in]1;5[$, c) $-6 \leq x \leq -2$

d) $-5 \leq 2x \leq 5$, e) $|x+2| \leq 2$, f) $|3-x| < 4$

g)

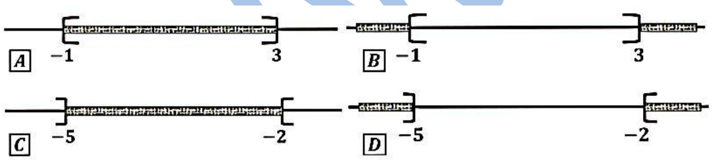
h)

Exercice 49.

Caractériser par une inégalité du type, (où r est un réel positif) ;

$$|x-a| \leq r, \qquad |x-a| < r, \qquad |x-a| \geq r \quad ou \quad |x-a| > r$$

Les nombres réels appartenant aux ensembles A, B, C et D représentés géométriquement par :



Exercice 50.

Représenter graphiquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x vérifiant ;

a) $|x-2| \leq 3$, **b)** $|2x-1| \leq 2$, **c)** $|x+2| \geq 1$, **d)** $|x| > 1$, **e)** $|2x-3| \geq 5$, **f)** $1 < |3x+1| < 3$.

Calcul approché

Exercice 51.

Soit $A(x)=2x-5$. Encadrer $A(\sqrt{2})$ sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Exercice 52.

Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de $x+y$, $x-y$, xy, x^2, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$.

a) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$;

b) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$;

c) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$.

Exercice 53.

On donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$?

a) Donner les meilleurs encadrements possibles de :

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{3}, \qquad \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$$

b) Comparer $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. Encadrer séparément ces deux nombres. Quelle observation faites-vous ?

c) Trouver les nombres entiers a et b tels que ;

$$a \times 10^{-2} < \sqrt{15} < (a+1) \times 10^{-2} \quad \text{et} \quad b \times 10^{-2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < (b+1) \times 10^{-2}.$$

Exercice 54.

Encadrer avec le plus de précision possible les aires (A) et volumes (V) des solides donnés.

a) Pavé droit d'arêtes a, b, c

Cas 1 :

3,15 est une valeur approchée de a à 5×10^{-2} près.

2,35 est une valeur approchée de b à 5×10^{-2} près.

4,25 est une valeur approchée de c à 5×10^{-2} près.

Cas 2 :

$9{,}9 < a < 10$, $5{,}6 < b < 5{,}7$, $3{,}3 < c < 3{,}4$.

b) Cylindre de rayon R et de hauteur h.

Cas 1 :

$2{,}5 < R < 2{,}6$ et $7{,}8 < h < 7{,}9$.

Cas 2 :

$R = 4$ à 10^{-3} près, $h = 5$ à 10^{-3}.

c) Sphère de rayon R.

Cas 1 :

$7 < R < 7{,}3$

Cas 2 :

$R = 6$ à 10^{-2} près.

Rappel :

Pour le pavé ; $A = 2(ab + ac + bc)$ et $V = abc$.

Pour le cylindre ; $A = 2\pi R(R+h)$ et $V = \pi R^2 h$.

Pour la sphère ; $A = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 55.

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs tels que ; $x < y$. On note :

$$a = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

a) Montrer que $x < h$ et $a < y$;

b) Montrer que $g < a$;

c) Montrer que $g^2 = ah$. En déduire que $h < g$;

d) Ranger par ordre croissant les nombres : x, y, a, g et h.

(a, g et h sont appelés respectivement : moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y).

Exercice 56.

a) Compléter le tableau suivant :

α (degré)	$1°$	$2°$	$3°$	$4°$	$5°$	$6°$	$7°$	$8°$	$9°$	$10°$
α (radian)										
$\sin \alpha$										
$\cos \alpha$										

b) Comparer α en radian et $\sin \alpha$. Que remarque-t-on ?

c) Quelle approximation peut-on donner à $\cos \alpha$ pour α petit ?

Exercice 57.

Soit $x \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; \}$ et $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Comparer $(1 + x)^n$ et $(1 + nx)$ pour toutes les valeurs de x et de n.

Ecriture scientifique et approximation

Exercice 58.

1°/ Donner l'écriture scientifique de $A = 1\,110{,}23$ et de $B = 0{,}0001908$;

2°/ En déduire l'ordre de grandeur du produit AB.

II- FONCTIONS POLYNOMES

Faire savoir

Le cours

1. Les fonctions monômes

Caractérisation

Définition

On appelle une fonction monômes (*ou un monôme*), toute fonction de la forme ;

$$F(x) = ax^n \ avec \ a \in \mathbb{R} \ et \ n \in \mathbb{N}$$

a est appelé coefficient du monôme et n le degré du monôme.

Exemple 1

$$A(x) = 5x^2, \qquad B(x) = -\sqrt{3}x, \qquad C(x) = -\frac{5}{7}x^4;$$

$$D(x) = 13, \qquad E(x) = -8x^7, \qquad F(x) = 4{,}85x^3.$$

Les monômes sont de degrés respectifs ; 2; 1; 4; 0; 7; 3.

2. Les fonctions polynômes

Définition

On considère comme fonction polynôme (*ou un polynôme*), toute somme algébrique de fonctions monômes.

Exemple 2

$$F(x) = -7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3} - 5x^5$$

$$H(x) = 3x^2 - 8 + 2x^3 - \frac{2}{3}x - 5\sqrt{2}x^9$$

a) Simplification des fonctions polynômes

Pour simplifier une fonction polynôme, on additionne tous ses monômes de mêmes degrés entre eux.

Exemple

Soit la fonction polynôme ;

$$P(x) = -12x^2 + 8 - 7x - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 16 + x^3 - 2x^5$$

Simplifier et ranger par ordre croissant P.

Solution

$$\begin{aligned} P(x) &= 8 - 16 - 7x + 8x - 12x^2 + 4x^2 - 5x^3 + x^3 - 2x^5 \\ &= 8 - 16 + (-7+8)x + (-12+4)x^2 + (-5+1)x^3 - 2x^5 \\ &= -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{P(x) = -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5}$$

3. Polynôme simplifié et ordonné

a) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre croissant de ses puissances est ;

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$
$$où;\ a_{i(0\leq i\leq n)} \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Dans l'exemple 2, les polynômes $F(x)$ et $H(x)$ réduits et rangés dans l'ordre croissant de leurs puissances sont ;

$$F(x) = \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5$$
$$H(x) = -8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$$

b) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre décroissant de ses puissances est ;

$$P(x) = a_nx^n + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$où;\ a_{i(0\leq i\leq n)} \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Dans l'exemple 2, les polynômes $F(x)$ et $H(x)$ réduits et rangés dans l'ordre décroissant de leurs puissances sont ;

$$F(x) = -5x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3}$$
$$H(x) = -5\sqrt{2}x^9 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{2}{3}x - 8$$

Exemple 1

Soit la fonction polynôme ;

$$F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 11x + 5 - 7x^2 + 2x^4 - 6x^5$$

Simplifier le polynôme F et ranger-le dans l'ordre croissant puis décroissant des degrés de ses monômes.

Solution

Simplification :

$F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 17x + 5 - 7x^2$

$= -8 + 5 - 7x - 17x + 3x^2 - 7x^2 + 2x^4 + 21x^5 - 6x^5$

Ordre croissant :

$$\boldsymbol{F(x) = -3 - 24x - 4x^2 + 2x^4 + 15x^5}$$

Ordre décroissant :

$$\boldsymbol{F(x) = 15x^5 + 2x^4 - 4x^2 - 24x - 3}$$

4. Cas particuliers

☒ $P(x) = 0$ (*Monôme nul de degré non défini*).

☒ $P(x) = a$ $(a \neq 0)$ (*Forme particulière d'un monôme constant de degré* 0).

☒ $P(x) = ax$ $(a \neq 0)$ (*Forme particulière d'un monôme du* $1er$ *degré*).

☒ $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)(b \neq 0)$ (*Forme particulière d'un binôme du* $1er$ *degré*).

☒ $P(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$ (*Forme particulière d'un monôme du* $2ième$ *degré*).

☒ $P(x) = ax^2 + b$ $(a \neq 0)(b \neq 0)$ (*Forme particulière d'un binôme du* $2ième$ *degré*).

☒ $P(x) = ax^2 + bx$ $(a \neq 0)(b \neq 0)$ (*Forme particulière d'un binôme du* $2ième$ *degré*).

☒ $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (*Forme générale d'un trinôme du* $2ième$ *degré*).

☒ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ (*Forme générale d'un quadrinôme du* $3ième$ *degré*).

Exemples

$A(x) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$; $\quad B(x) = \frac{-5}{\sqrt{2}}x$; $\quad C(x) = -3x + 7$;

$D(x) = -4x^2$; $\quad E(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 7$;

$F(x) = 5{,}3x^2 - \frac{4}{3}x$; $\quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - 2x + 2$;

$H(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$

5. Les coefficients d'un polynôme (*ou sa suite caractéristique*)

Définition

Dans un polynôme de degré n réduit et rangé suivant l'ordre croissant de ses puissances ;

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

La suite ordonnée des coefficients ;

$(a_0 ;\ a_1 ;\ a_2 ;\ a_3 ; \dots ;\ a_n)$ est appelée la suite caractéristique des coefficients du polynôme P.

Remarque 1

Les coefficients des puissances qui n'apparaissent pas dans l'écriture d'un polynôme sont considérés comme étant des zéros dans sa suite caractéristique.

Exemple

Soit le polynôme ;

$$P(x) = -1 + 5x - \frac{2}{3}x^3 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7$$

L'écriture complète de ce polynôme est en fait ;

$$P(x) = -1 + 5x + 0 \times x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 0 \times x^4 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7;$$

Et sa suite caractéristique est par conséquent ;

$$\left(-1;\ 5; 0; -\frac{2}{3}; 0;\ 4\sqrt{3}; -1; -2\right)$$

Exemple 2

Soit le polynôme $P(x) = 4x + 7x^2 - 12x^5 + 9x^7 - 2x^{10}$ réduit et rangé dans l'ordre croissant.

Donner l'écriture complète de ce polynôme, puis extraire sa suite caractéristique.

Solution

L'écriture complète de ce polynôme est :

$$P(x) = 0 + 4x + 7x^2 + 0x^3 + 0x^4 - 12x^5 + 0x^6 + 9x^7 + 0x^8 + 0x^9 - 2x^{10};$$

Et sa suite caractéristique est par conséquent ;

$$(0;\ 4;\ 7; 0; 0; -12; 0;\ 9; 0; 0;\ -2)$$

6. Opérations sur les polynômes

a) Somme et différence

La somme algébrique (ou la différence) de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ est un polynôme. Il est obtenu par l'addition (*ou la soustraction*) des monômes de même degrés dans $A(x)$ et dans $B(x)$.

Exemple 3

Soit les deux polynômes

$F(x) = \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5$ et $H(x) = -8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$

Soit $H(x)$ le polynôme tel que ; $H(x) = F(x) + P(x)$. Calculer $H(x)$.

Solution

$$H(x) = F(x) + P(x) = \left(\sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5\right) + \left(-8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9\right)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$$

$$= (\sqrt{3} - 8) + \left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right)x + (-2 + 3)x^2 + (5 + 2)x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9$$

$$= (-\sqrt{2} + 4) - \frac{1}{9}x + x^2 + 7x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9$$

$$\boldsymbol{H(x) = F(x) + P(x) = (-\sqrt{2} + 4) - \frac{1}{9}x + x^2 + 7x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9}$$

Remarque 2

On peut aussi utiliser les suites caractéristiques de deux polynômes pour les additionner ou les soustraire, et obtenir ainsi la suite caractéristique du polynôme somme (ou différence).

Remarque 3

Le degré de la somme ou de la différence de deux polynômes de degrés différents, est celui du polynôme ayant le plus grand degré.

Remarque 4

Le degré de la somme ou la différence de deux polynômes de même degré, est inférieur ou égal au degré des polynômes.

Remarque 5

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si leurs suites caractéristiques sont égales.

Remarque 6

Un polynôme est nul, si et seulement sa suite caractéristique est constituée de zéros.

b) Produit algébrique de deux polynômes

Soit $P(x)$ et $R(x)$ deux polynômes, et soit $Q(x)$ le polynôme tel que $Q(x) = P(x) \times R(x)$. Pour obtenir le polynôme produit $Q(x)$, on multiplie chacun des monômes de $P(x)$ par chacun des monômes de $R(x)$, on simplifie ensuite en additionnant entre eux, tous les monômes de mêmes degrés obtenus.

Exemple 4

Soit les deux polynômes $R(x) = -5 + 4x + 7x^2 + 2x^3$ et $Q(x) = 1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4$.

Calculer le polynôme $P(x)$ tel que ; $P(x) = R(x) \times Q(x)$.

Solution

$$P(x) = R(x) \times Q(x) = (-5 + 4x + 7x^2 + 2x^3) \times (1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4)$$

$$= -5(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) + 4x(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) + 7x^2(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) + 2x^3(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4)$$

$$= -5 \times 1 - 5 \times 4x - 5 \times 3x^2 + 5 \times 6x^3 - 5 \times 9x^4 + 4x \times 1 - 4x \times 4x + 4x \times 3x^2 - 4x \times 6x^3 + 4x \times 9x^4 + 7x^2 \times 1 - 7x^2 \times 4x + 7x^2 \times 3x^2 - 7x^2 \times 6x^3 + 7x^2 \times 9x^4 + 2x^3 \times 1 - 2x^3 \times 4x + 2x^3 \times 3x^2 - 2x^3 \times 6x^3 + 2x^3 \times 9x^4$$

$$= -5 - 20x - 15x^2 + 30x^3 - 45x^4 + 4x - 16x^2 + 12x^3 - 24x^4 + 36x^5 + 7x^2 - 28x^3 + 21x^4 - 42x^5 + 63x^6 + 2x^3 - 8x^4 + 6x^5 - 12x^6 + 18x^7$$

$$\boldsymbol{P(x) = R(x) \times Q(x) = -5 - 16x - 14x^2 + 16x^3 - 56x^4 + 51x^6 + 18x^7}$$

Remarque 7

Le degré du polynôme produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des deux polynômes.

Remarque 8

Un polynôme peut être donné sous une forme développée réduite ou non, mais il peut également se présenter sous une forme factorisée.

Exemple 3

$$P(x) = (-5 + 12x - 6x^2)(15x^2 - 3x^5)$$

$$Q(x) = (7 - 9x^2 - 4x^3)(x + x^3 - 4x^4)$$

7. Le zéro d'un polynôme– Factorisation

a) Le zéro d'un polynôme

Soit $P(x)$ un polynôme.

On appelle le zéro (*ou la racine*) du polynôme P, tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Déterminer les racines (*ou les zéros*) d'un polynôme P, revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b) Factorisation

Remarque 9

Si α est une racine d'un polynôme $P(x)$ de degré $n \geq 1$, alors $P(x)$ est divisible par le facteur $x - \alpha$, et il existe un polynôme $R(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha) \times R(x)$.

Remarque 10

Si a_0 ; α_1; α_2; α_3 ; … ; α_{n-1} sont les n racines d'un polynôme $P(x)$; alors celui-ci est de degré supérieur ou égal à n.

Remarque 11

Si $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ est un polynôme de degré n, et si a_0 ; α_1; α_2; α_3 ; … ; α_{n-1} sont les n racines de $P(x)$, alors $P(x)$ se factorise de façon unique de la manière suivante ;

$$P(x) = a_0(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})$$

Exemple 5

Soit le polynôme ;

$$P(x) = x^3 - 3x - 18$$

1. En calculant $P(3)$, montrer que $x = 2$ est une racine de P ;

2. Déterminer les réels a et b tels que ;

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + ax + b)$$

3. En utilisant le discriminant Δ, factoriser si possible le trinôme du second degré obtenu, et en déduire une factorisation du polynôme P.

Solution

1. $P(3) = 3^3 - 3(3) - 18$

$$= 27 - 9 - 18 = 27 - 27 = 0$$

Donc ; 3 est une racine de P.

2. Détermination des réels a et b ;

A°/ Méthode 1 (*La division euclidienne*)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x - 18 & x - 3 \\
\cline{2-2}
\mp x^3 \pm 3x^2 & x^2 + 3x + 6 \\
\cline{1-1}
3x^2 - 3x - 18 & \\
\mp 3x^2 \pm 9x & \\
\cline{1-1}
6x - 18 & \\
\mp 6x \pm 18 & \\
\cline{1-1}
= \ 0 &
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P(x) = (x-2)(x^2+3x+6)}$$

B°/ Méthode 2 (*Identification*)

$$P(x) = (x-3)(x^2+ax+b)$$
$$= x^3 + ax^2 + bx - 3x^2 - 3ax - 3b$$
$$= x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b$$
$$= x^3 - 3x - 18$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ a - 3 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a = 3} \\ b - 3a = -3 \Longrightarrow b - 9 = -3 \Longrightarrow \boldsymbol{b = 6} \\ -3b = -18 \Longrightarrow -3 \times 6 = -18 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P(x) = (x-3)(x^2+3x+6)}$$

Méthode 3 (*Coefficient de Hörner*)

$$P(x) = x^3 - 3x - 18$$
$$\Longrightarrow \frac{P(x)}{x-3} = \frac{x^3-3x-18}{x-3}$$
$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 3x - 6x + 6x - 18}{x-3}$$
$$= \frac{x^2(x-3) + 3x(x-3) + 6(x-3)}{x-3}$$
$$= \frac{(x-3)(x^2+3x+6)}{x-3} = x^2 + 3x + 6$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{P(x) = (x-3)(x^2+3x+6)}$$

Pour factoriser $x^2 + 3x + 6$, on résout l'équation $x^2 + 3x + 6$, on a ;

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -13$$

$\Longrightarrow$ $\Delta < 0$ donc, pas de solution pour l'équation d'où, $x^2 + 3x + 6$ n'est pas factorisable.

Exemple 6

Développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x) = (x-1)(1+x+x^2+x^3)$

Solution

$$P(x) = (x-1)(1+x+x^2+x^3) = x(1+x+x^2+x^3) - 1 \times (1+x+x^2+x^3)$$
$$= x + x^2 + x^3 + x^4 - 1 - x - x^2 - x^3 = x^4 - 1$$

Exemple 7

Soit $f(x) = x^4 + 4$. En écrivant $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$,

Mettre $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

Solution

$$f(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$(x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

8. Forme canonique d'un trinôme du second degré

Soit le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Si on prend a en facteur, on a ;

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

On ajoute et on retranche le carré de la moitié du coefficient de x pour obtenir un carré parfait ;

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

On met en évidence le carré parfait par des parenthèses ;

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

On écrit le carré parfait sous sa forme factorisée ;

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

On enlève les crochets en multipliant par a ;

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

↳ $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

↳ $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Si on note $\Delta = b^2 - 4ac$, on a ;

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

↳ $$\boldsymbol{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Cette dernière écriture est appelée la forme canonique du polynôme P.

En particulier, si on pose ;

$$\alpha = \frac{b}{2a} \ et \ \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

La forme canonique devient alors ;

$$\boldsymbol{P(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta}$$

Si on revient à l'écriture

9. Quotients rationnels et fonctions rationnelles

Définition

On appelle fraction rationnelle tout quotient de deux polynômes.

Une fonction rationnelle est une fonction caractérisée par une fraction rationnelle.

Exemple 4

$$f(x) = \frac{-5x^3 + 12x^2 - x - 6}{2x+3}$$

$$g(x) = \frac{(3 - x^2 - 9x)(x+1) - 5x(3x-8)}{(2x-7)(5x^2+6x)}$$

a) Conditions d'existence d'une fonction rationnelle et d'une fonction irrationnelle

Une fonction rationnelle existe pour les valeurs réelles qui n'annulent pas son dénominateur.

Une fonction irrationnelle existe pour les valeurs réelles qui ne donnent pas une valeur négative sous le radical.

Exemple 8

Soit les fonctions rationnelles ;

$$f(x) = \frac{-5x^3 + 12x^2 - x - 6}{2x+3} \quad et \quad g(x) = \frac{(3 - x^2 - 9x)(x+1) - 5x(3x-8)}{(2x-7)(5x^2+6x)}$$

Déterminer les valeurs réelles pour lesquelles f et g existent.

Solution

f et g existent pour les valeurs réelles qui n'annulent pas leurs dénominateurs.

$f(x)$ existe pour $2x + 3 \neq 0$; c'est-à-dire pour ;

$$x \neq \frac{-3}{2}$$

$g(x)$ existe pour $(2x-7)(5x^2+6x) \neq 0$, C'est-à-dire pour ; $x \neq \frac{-6}{5}$; $x \neq 0 \ et \ x \neq \frac{7}{2}$

Exemple 9

Soit la fonction irrationnelle $h(x) = \sqrt{2x-7}$.

Déterminer les valeurs réelles pour lesquelles h existe.

Solution

La fonction irrationnelle $h(x)$ existe pour les valeurs réelles qui ne donnent pas une valeur négative sous le radical.

$2x-7\geq 0 \Longrightarrow x\geq \frac{7}{2}$ d'où ; $f(x)$ existe pour $x\in\left[\frac{7}{2};\ +\infty\right[$

Exercice généraux

Exercice 1.

Etudier les conditions d'existence des fonctions suivantes :

$$a(x)=\frac{3x^2+x+1}{x(x-5)(x+4)};\ b(x)=\sqrt{2x^2+7x+3}$$

$$c(x)=\sqrt{|x|}\ ;\ d(x)=\sqrt{3x^2+4|x|}$$

$$e(x)=\sqrt{x^4+3x^2+5|x|}\ ;\ f(x)=\sqrt{2|x|-5}$$

$$g(x)=\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4}}\ ;h(x)=\frac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}$$

$$j(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{\big||x|-5\big|-2}}\ ;\ k(x)=\sqrt{3x^3+|x|}$$

$$l(x)=\sqrt{\big||x^2-4|-8\big|-1}\ ;$$

$$m(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{\big||x^2-2|-7\big|}}$$

Simplification d'une fonction rationnelle

Exercice 2.

Soit les quotients réels ;

$$Q(x)=\frac{3x+7}{x+2}$$

$$R(x)=\frac{5x^2-7x+4}{x-1}$$

$$K(x)=\frac{-4x^2+3x-12}{(x+1)(x-2)}$$

$$M(x)=\frac{3x^3-2x^2+x-6}{x(x+2)(x-3)}$$

En utilisant la méthode de l'identification, la division euclidienne et la méthode de Hörner déterminer ;

✧ Les réels a et b tels que ;

$$Q(x)=a+\frac{b}{x+2}$$

✧ Les réels a,b et c tels que ;

$$R(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

✧ Les réels a et b tels que ;

$$K(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

✧ Les réels a, b et c tels que ;

$$M(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{x-3}$$

Encadrement et polynômes, produits et quotients de polynômes

Exercice 3.

On donne l'encadrement ;

$5{,}23 < x < 5{,}24$;

Et on donne ;

$$y = \frac{7x+3}{9-x}$$

et

$$z = \frac{2x^2 - 3x + 8}{x-3}$$

Ecrire y sous la forme ;

$$y = a + \frac{b}{x+2}$$

Ecrire z sous la forme

$$z = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

En déduire des encadrements pour y et z.

Exercice 4.

On considère le polynôme $P(x) = 9x^2 - 25 + (3x+5)(x-2)$

1°/ Factoriser $9x^2 - 25$, puis factoriser E.

2°/ Résoudre l'équation $E = 0$.

3°/ a) Développer et réduire E.

b) Retrouver les solutions de l'équation $E = 0$

Exercice 5.

On considère le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

1°/ Calculer $P\,(-1)$

2°/ Factoriser $P(x)$

III- EQUATIONS

Faire savoir

Le cours

Définition

Une équation est une relation d'égalité qui existe entre deux expressions algébriques en fonction de certaines valeurs de variables (*inconnues*)

Il existe des équations à une ou plusieurs inconnues, de degré 1 ou plus.

La résolution d'une équation est la détermination de l'ensemble des solutions (*ici nombres réels*) qui vérifient cette équation.

1. Equations du premier degré à une inconnue

Caractérisation

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est : $ax + b = 0$ (*Où b est un réel et a un réel différend de* 0*, et x est l'inconnue*).

b) Méthode de résolution

La méthode de résolution est la suivante ;

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\ (a \neq 0).$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	$\mathbb{R}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\emptyset$
$a \neq 0$	$\left\{-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right\}$

Remarque 1

Une équation du premier degré peut également se présenter sous différentes écritures qui nécessitent d'être développées et simplifiée avant de retrouver la forme générale ; $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$.

Exemple 1

Actuellement, un père a 35 ans et son fils 7 ans
a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?
b) Sera-t-il possible que l'âge du père soit égal à 8 fois celui de son fils ?

Solution

On désigne par x le nombre d'années, cherché ($x \in \mathbf{N}$) ; 35 + x et 7 + x seront les âges respectifs du père et du fils après x années.

a) $35 + x = 2(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 14 + 2x \Leftrightarrow 2x - x = 35 - 14 \Leftrightarrow x = 21$.

Donc au bout de 21 ans l'âge du père sera le double de celui de son fils.

b) $35 + x = 8(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 56 + 8x \Leftrightarrow 8x - x = 35 - 56 \Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{-21}{7}$

$x = -3$ (à rejeter car $x \in \mathbf{N}$).

Donc, il est impossible que l'âge du père soit égale à 8 fois celui de son fils.

Exemple 2

Résoudre les équations suivantes :

$$(\boldsymbol{A}) : \; 2x + 3 = 5 - 4x \; ; \qquad (\boldsymbol{B}) : \; 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \; ;$$

$$(\boldsymbol{C}) : \; 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2).$$

Solution

$$(\boldsymbol{A}) : 2x + 3 = 5 - 4x \Rightarrow 2x + 4x = 5 - 3 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right\}$$

$$(\boldsymbol{B}) : 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \Rightarrow 15x - 10 = 42x + 7 \Rightarrow 15x + 42x = 10 + 7$$

$$\Rightarrow 57x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{57} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{57}}\right\}$$

$$(\boldsymbol{C}) : \; 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2)$$

$$\Rightarrow 12 - 15x + 24x + 36 = 7 - 21x - 6x - 12$$

$$\Rightarrow -15x + 24x + 21x + 6x = 7 - 12 + 12 - 36$$

$$\Rightarrow (-15 + 24 + 21 + 6)x = -29 \Rightarrow -36x = -29 \Rightarrow x = \frac{-29}{-36} = \frac{29}{36} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{36}}\right\}$$

2. Equations du second degré à une inconnue (*Equations trinômes*)

Caractérisation

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du deuxième degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est :
$ax^2 + bx + c = 0$ (*où $a \neq 0$, b et c sont des réels et x est l'inconnue*)

b) Cas particuliers

Une équation du deuxième degré peut être aussi de la forme ;

$$ax^2 = 0 \; ; (Lorsque \; b = 0 \; et \; c = 0)$$

$$ax^2 + c = 0 \; ; (Lorsque \; b = 0)$$

$$ax^2 + bx = 0 \; ; (Lorsque \; c = 0)$$

c) Méthodes de résolution

1°/ Les cas particuliers

a- Les équations de la forme $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ $(\boldsymbol{a \neq 0})$

Elles ont une seule solution qui est 0, quelle que soit la valeur de a.

b- Les équations de la forme $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $(\boldsymbol{a \neq 0, c \neq 0})$

Elles ont ;

Deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ \quad et \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$ lorsque a et c sont de signes contraires

Elles n'ont pas de solution lorsque a et c ont le même signe.

c- Les équations de la forme $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0(a \neq 0, b \neq 0)}$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad et \\ x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Plus généralement, l'équation $x^2 = k$ où k est un réel donné.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	ϕ
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k};\ -\sqrt{k}\}$

2°/ Le cas général

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre cette forme d'équation, on utilise la méthode générale du discriminant Δ qui peut être aussi appliquée aux cas particuliers précédents. Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ, soit le nombre Δ' tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta' = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$, mais d'où vient-il ?

Si on revient à la forme canonique, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$a \neq 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\quad (\Delta=b^2-4ac)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} si\ \Delta>0\Longrightarrow x=\begin{cases}-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\\ si\ \Delta=0\Longrightarrow x=-\frac{b}{2a}\\ si\ \Delta<0\Longrightarrow pas\ de\ solution\end{cases}$$

En conclusion ;

$$\begin{cases}\text{Si }\Delta>0;\text{il existe deux solutions}\begin{cases}x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\\ \text{Si }\Delta=0;\text{il existe une solution double } x_0=\frac{-b}{2a}\\ \text{Si }\Delta<0;\text{il n'existe aucune solution dans }\mathbb{R}\end{cases}$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta<0$ ($\Delta'<0$)	$\varnothing$
$\Delta=0$ ($\Delta'=0$)	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta>0$ ($\Delta'>0$)	$\{x_1\ ;\ x_2\}$ avec $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Ou $x_1=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Remarque 2

Dans une équation $ax^2+bx+c=0$ (où $a\neq 0$)

Lorsque $a+b+c=0$, alors l'équation admet comme solutions ; $x_1=1\ et\ x_2=\frac{c}{a}$

Remarque 3

Dans une équation $ax^2+bx+c=0$, (où $a\neq 0$)

Lorsque $a-b+c=0$, alors l'équation admet comme solutions ;

$$x_1 = -1 \ et \ x_2 = -\frac{c}{a}$$

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations :

a) $x^2 -6x +5 = 0$; b) $x^2 -2x -1 = 0$; c) $x^2 -5x + 6 = 0$; d) $x^4 -5x^2 + 6 = 0$; e) $x -5\sqrt{x} + 6 = 0$.

Solution

a)

Méthode 1 :

Comme $1 - 6 + 5 = 0$;

donc 1 est solution et l'autre solution est $\frac{5}{1} = 5$. Donc $S = \{1 \ ; \ 5\}$.

Méthode 2.

$x^2 -6x +5 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x - 3 = \sqrt{4}$ ou $x - 3 = -\sqrt{4} \Leftrightarrow$

$x = 5$ ou $x = 1$.

Donc ; $S = \{1 \ ; \ 5\}$.

Méthode 3.

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) =$

$36 - 20 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$.

$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$; $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$.

Donc, $S = \{1 \ ; \ 5\}$.

b) $x^2 -2x -1 = 0$;

$\Delta = (-2)^2 -4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$;

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$.

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$; $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$.

Donc, $S = \{1-\sqrt{2} \ ; \ 1+\sqrt{2}\}$.

c) $x^2 -5x + 6 = 0$;

$\Delta = (-5)^2 -4(1)(6) =$

$25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Donc, $S = \{2 \ ; \ 3\}$.

d) $x^4 -5x^2 +6 = 0$;

avec $X = x^2$; on a :

$X^2 -5X + 6 = 0$;

Donc $X = 2$ ou $X = 3$

D'où $x^2 = 2$ ou $x^2 = 3 \Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = \pm\sqrt{3}$;

Donc $S =$

$\{-\sqrt{3} \ ; \ -\sqrt{2} \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ \sqrt{3}\}$.

e) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$;

avec $X = \sqrt{x}$ on a :

$X^2 -5X + 6 = 0$

Donc $X = 2$ ou $X = 3$

Donc $\sqrt{x} = 2$ ou $\sqrt{x} = 3$

D'où $x = 4$ ou $x = 9$.

Donc $S = \{4 \ ; \ 9\}$.

d- Somme et produit des racines d'un polynôme

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet deux racines x_1 et x_2, alors ;

$$\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ ; \ p = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \ \boxed{1} \\ \text{et} \\ ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \ \boxed{2} \end{cases}$$

Si	alors
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

$a+b+c=0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\left\{1\ ;\ \frac{c}{a}\right\}$.
$a-b+c=0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\left\{-1\ ;\ \frac{-c}{a}\right\}$.
$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ où s et p sont deux réels donnés	Les nombres x et y (s'ils existent) sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X : $X^2 - sX + p = 0$

Exercice

Démontrer les propriétés $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$

e) Système homogène

Soit l'équation ;

$$ax^2+bx+c=0,$$

Tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, on a ;

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Longrightarrow \boldsymbol{x^2-sx+p=0}$$

Exemple 4

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 15 et de périmètre 16.

Solution

On désigne par x et y les dimensions ; on a $\begin{cases} x+y=\frac{16}{2}=8 \\ xy=15 \end{cases}$

Donc x et y sont les solutions de l'équation :
$x^2 -8x + 15= 0$.
$\Delta = (-8)^2 -4(1)(15) = 64 -60 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$.
$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3$; $x_2 = \frac{8+2}{2} = 5$, donc les dimensions sont 3 et 5.

Remarque 4

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ admet une seule solution double x_0, alors ;

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$$

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution, alors le trinôme n'est pas factorisable.

Exemple 5

■ $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$

■ $2x^2 + 4x + 3 = 0$ n'est pas factorisable.

e- Equations du second degré avec un paramètre réel

Exemple 6

Soit l'équation paramétrique ;

$$E_m : \ 2x^2 - (5+m)x + 7 + 3m = 0$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation E_m.

Solution

$$\Delta_{E_m} = (5+m)^2 - 4 \times 2(7+3m)$$
$$= 25 + 10m + m^2 - 56 - 24m$$
$$= -31 - 14m + m^2$$

On considère l'équation du second degré en m ;

$$m^2 - 14m - 31 = 0$$

$$\Delta_m = (-14)^2 - 4 \times 31 = 196 + 124 = 320$$

$$\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{5} \Longrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{14 - 8\sqrt{5}}{2} = 7 - 4\sqrt{5} \\ m_2 = \dfrac{14 + 8\sqrt{5}}{2} = 7 + 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Conclusion

Si $m = 7 - 4\sqrt{5}$ ou $m = 7 + 4\sqrt{5}$, alors l'équation E_m admet une solution double (*car* $\Delta_{E_m} = 0$).

Si $m \in \left]7 - 4\sqrt{5};\ 7 + 4\sqrt{5}\right[$, alors l'équation E_m n'admet aucune solution (*car* $\Delta_{E_m} < 0$).

Si $m \in \left]-\infty;\ 7 - 4\sqrt{5}\right] \cup \left[7 + 4\sqrt{5};\ +\infty\right[$, alors l'équation E_m admet deux solutions distinctes (*car* $\Delta_{E_m} > 0$).

3. Equation de degré 3

Exemple 7

Soit l'équation ;

$$(E) : \ x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

a/ Donner une solution évidente de l'équation (E) ;

b/ Ecrire (E) sous la forme ;

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = 0$$

c/ Donner les deux autres solutions de (E).

Solution

a/ 1 est une solution évidente de l'équation (E),

En effet ; $(1)^3+2(1)^2-2(1)-1$

$$=1+2-2-1=3-3=0$$

b/ $(x-1)(ax^2+bx+c)$

$$=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$

$$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ax^3=x^3 \Rightarrow \boldsymbol{a=1} \\ (b-a)x^2=2x^2 \Rightarrow b-a=2 \Rightarrow \boldsymbol{b=3} \\ (c-b)x=-2x \Rightarrow c-b=-2 \\ -c=-1 \Rightarrow \boldsymbol{c=1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x^3+2x^2-2x-1=(x-1)(x^2+3x+1)=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=1} \\ ou \\ x^2+3x+1=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Delta=9-4=5 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}} \\ \boldsymbol{x_2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right\}}$$

4. Equations quotients (*Equations rationnelles*)

Définition

On appelle équation quotient ou équation rationnelle, toute équation associée à un quotient rationnel.

La forme générale est :

$$\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{P(x)}{T(x)} \text{ où } P, Q, R \text{ et } T \text{ sont des polynômes.}$$

$$(R \text{ et } T \neq 0)$$

La solution de telles équations doit exclure toutes les valeurs qui annulent les dénominateurs de l'équation.

Exemple 8

Résoudre les équations rationnelles suivantes :

$$(A): \frac{3x-7}{x+2}=\frac{x+2}{3x-7}; \qquad (B): \frac{-9}{3-7x}=\frac{5}{5x+1}$$

$$(C): \frac{3x^2+4x}{9x+12}=-7; \qquad (D): \frac{2x^2-7x}{3-2x}=0$$

Solution

$(\boldsymbol{A})$: $\boldsymbol{\dfrac{3x-7}{x+2}=\dfrac{x+2}{3x-7}} \Rightarrow (3x-7)^2=(x+2)^2$

$$(3x-7)^2-(x+2)^2=0$$
$$\Rightarrow [(3x-7)+(x+2)][(3x-7)-(x+2)]=0$$
$$\Rightarrow [3x-7+x+2][3x-7-x-2]=0$$
$$\Rightarrow (4x-5)(2x-9)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{4} \\ \qquad ou \\ 2x-9=0 \Rightarrow x=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\left\{\frac{5}{4},\frac{9}{2}\right\}$$

$(\boldsymbol{B}): \dfrac{\mathbf{-9}}{\mathbf{3-7x}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{5x+1}} \Rightarrow -9(5x+1)=5(3-7x)$

$$\Rightarrow -45x-9=15-35x$$
$$\Rightarrow -45x+35x=15+9$$
$$\Rightarrow -10x=24 \Rightarrow x=\frac{24}{-10}=-2{,}4 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\mathbf{-2,4}\}$$

$(\boldsymbol{C}) : \dfrac{\mathbf{3x^2+4x}}{\mathbf{9x+12}}=\mathbf{-7} \Rightarrow \dfrac{x(3x+4)}{3(3x+4)}=\dfrac{-7}{1} \Rightarrow x(3x+4)=-21\langle 3x+4\rangle$

$\Rightarrow x(3x+4)+21\langle 3x+4\rangle=0 \Rightarrow (3x+4)(x+21)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{3} \\ \qquad ou \\ x+21=0 \Rightarrow x=-21 \end{cases}$$

La première solution est rejetée car elle annule le dénominateur du quotient de l'équation.

$$\text{Donc; } \boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\mathbf{-21}\}$$

$(\boldsymbol{D}) : \dfrac{\mathbf{2x^2-7x}}{\mathbf{3-2x}}=\mathbf{0} \Rightarrow \dfrac{2x^2-7x}{3-2x}=\dfrac{0}{1}$

$\Rightarrow 2x^2-7x=0 \Rightarrow x(2x-7)=0$

$$\begin{cases} \qquad x=0 \\ \qquad ou \\ 2x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\left\{\mathbf{0},\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right\}$$

5. Equations irrationnelles

Définition

On appelle équation irrationnelle toute équation de la forme ; $\sqrt{f(x)}=g(x)$;

Exemple 9

$$\sqrt{2-3x}=5x+4$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle ;

$$\sqrt{2-3x}=5x+4$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2-3x}\right)^2 = (5x+7)^2$$
$$\Rightarrow 2-3x = 25x^2+70x+49$$
$$\Rightarrow 25x^2+73x+47=0$$
$$\Delta = 73^2 - 4\times 25\times 47 = 5\,329 - 4\,700 = 629$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{629} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-73-\sqrt{629}}{50} \approx -1{,}96 \\ x_2 = \dfrac{-73+\sqrt{629}}{50} \approx -0{,}96 \end{cases}$$

Les deux solutions sont acceptées car,

$2-3x_1 > 0 \Rightarrow \sqrt{2-3x_1}$ existe,

et $2-3x_2 > 0 \Rightarrow \sqrt{2-3x_2}$ existe.

$$\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{\frac{-73-\sqrt{629}}{50}} ; \mathbf{\frac{-73+\sqrt{629}}{50}}\right\}$$

6. Les équations du premier degré à deux inconnues

a) Forme générale

Forme générale ; $ax+by+c=0$ $(a;b) \neq (0;0)$

Exemple 10

$$5x-3y+11=0\,;\, x-7y=8\,;\, 4x-9y=0\,;$$
$$x=-3y+1\,;\, y=\frac{2}{9}x-7\sqrt{3}$$

b) Méthode de résolution

Une équation du premier degré à deux inconnues, a une infinité de solutions.

Pour chaque valeur qu'on donne à x, on obtient une valeur correspondante pour y, et inversement.

Exemple 11

A l'équation ; $5x-3y+11=0$, si on donne $\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$, on a ; $5\times 4-3y+11=0$

$$\Rightarrow 20-3y+11=0 \Rightarrow -3y+31=0$$
$$\Rightarrow 3y=31 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{\frac{31}{3}}$$

Le couple ordonné $\left(\mathbf{4}; \mathbf{\frac{31}{3}}\right)$ est une solution de

L'équation $5x-3y+11=0$,

7. Système linéaire de deux équations à deux inconnues

a) Forme générale

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \ \boxed{1} \\ a'x + b'y + c' = 0 \ \boxed{2} \end{cases}$$

Où ; a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute paire d'équations du premier degré à deux inconnues qu'on se doit de résoudre simultanément.

C'est-à-dire, trouver la solution qui satisfait aux deux équations en même temps.

b) Méthodes de résolution

Il existe quatre méthodes de résolution d'un système linéaire.

a- Méthode de combinaison

Elle consiste à éliminer l'une des deux inconnues x (ou y) pour se retrouver avec une équation du premier degré en y (ou en x).

On résout l'équation du premier degré en y (ou en x). On procède de la même façon pour trouver l'autre inconnue qui a été éliminée, ou on remplace simplement par la valeur trouvée dans l'une des deux équations pour déterminer la valeur de l'inconnue qui avait été éliminée auparavant.

Si le système a une solution unique, la valeur trouvée sera un couple ordonné (*non inversible*).

b- Méthode de substitution

Elle consiste en l'écriture de l'une des deux inconnues en fonction de l'autre en utilisant l'une des deux équations, puis en remplaçant la deuxième inconnue par cette écriture dans l'autre équation.

c- Méthode des déterminants

Soit le système ;

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

On définit les déterminants suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

Si	alors

$\Delta \neq 0$	Le système a une solution unique. On la détermine par l'une des méthodes déjà expliquées.
$\Delta = 0$	Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité

d- Méthode graphique

Un système d'équations peut être résolu aussi par méthode graphique lorsque les équations sont relativement simples. La solution simultanée lorsqu'elle existe, est l'intersection des deux droites.

Exemple 12

Résoudre par les trois méthodes ; combinaison, substitution et déterminant le système suivant

Soit le système ;

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

a) Méthode de combinaison

$$7 \times \boxed{\mathbf{1}} + 3 \times \boxed{\mathbf{2}} \Rightarrow \begin{cases} 35x + 21y - 28 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ 6x - 21y + 33 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 41x + 5 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}$$

$$2 \times \boxed{\mathbf{1}} - 5 \times \boxed{\mathbf{2}} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 6y - 8 = 0 \ \boxed{\mathbf{1''}} \\ -10x + 35y - 55 = 0 \ \boxed{\mathbf{2''}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 41y - 63 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}$$

On peut aussi remplacer avec la valeur de x dans l'une des deux équations pour avoir la valeur de y.

$$5 \times \frac{-5}{41} + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \frac{-25}{41} + 3y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3y = \frac{25}{41} + 4 \Rightarrow 3y = \frac{25}{41} + \frac{164}{41} = \frac{189}{41}$$

$$\Rightarrow y = \frac{189}{41} \div 3 = \frac{189}{41} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}$$

Le système a donc pour solution ;

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}} ; \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}} \right) \right\}$$

b) Méthode de substitution

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases} \Rightarrow de \ \boxed{\mathbf{1}} : 5x = -3y + 4$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-3y + 4}}{\mathbf{5}}$$

$$\Longrightarrow 2 \times \frac{-3y+4}{5} - 7y + 11 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-6y+8}{5} - \frac{35y}{5} + \frac{55}{5} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-6y+8-35y+55}{5} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-41y+63}{5} = 0 \Longrightarrow -41y+63 = 0$$

$$\Longrightarrow 41y = 63 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}$$

$\Longrightarrow$ de $\boxed{\mathbf{1}}$: $3y = -5x + 4$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{-5x+4}}{\mathbf{3}}$$

de $\boxed{\mathbf{2}}$ $\Longrightarrow 2x - 7 \times \frac{-5x+4}{3} + 11 = 0$

$$\Longrightarrow \frac{6x}{3} - \frac{-35x+28}{3} + \frac{33}{3} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{6x+35x-28+33}{3} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{41x+5}{3} = 0 \Longrightarrow 41x+5 = 0$$

$$\Longrightarrow 41x = -5 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}$$

On pouvait aussi remplacer dans l'expression de x pour avoir sa valeur directement.

$$\Longrightarrow x = \frac{-3 \times \frac{63}{41} + 4}{5} \Longrightarrow x = \frac{\frac{-189+164}{41}}{5}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\frac{-25}{41}}{5} = \frac{-25}{41} \div 5 = \frac{-25}{41} \times \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}} \Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}; \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}\right)\right\}.$$

c) Méthode du déterminant

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - 7y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5 \times (-7) - 2 \times 3 = -35 - 6 = -41$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 11 - (-7 \times -4) = 33 - 28 = 5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times 2 - 11 \times 5 = -8 - 55 = -63$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-41} = \frac{-5}{41} \,;\, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-63}{-41} = \frac{63}{41}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}; \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}\right)\right\}$.

Exemple 13

Résoudre par la méthode graphique le système :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

d) Méthode graphique

Il suffit de remarquer que la solution simultanée du système, c'est les coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (D')d'équations ;

(D) : $3x + 4y - 10 = 0$; et (D') : $2x + y - 5 = 0$, point dont les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ vérifient les deux équations à la fois ;

On pose ; $y_0 = \dfrac{-3x_0 + 10}{4}$ *et* $y_0 = -2x_0 + 5$

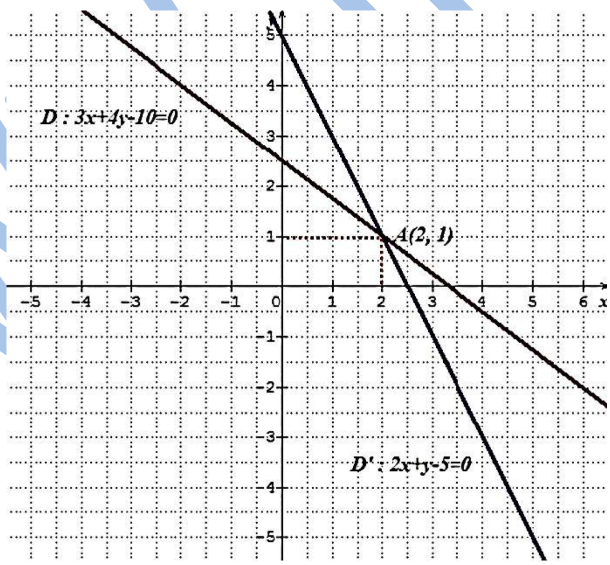
En égalisant y_0 avec y_0 on obtient ;

$$\frac{-3x_0 + 10}{4} = -2x_0 + 5 \Longrightarrow \boldsymbol{x_0} = \mathbf{2}$$

En remplaçant dans l'une des deux équations, on obtient $\boldsymbol{y_0} = \mathbf{1}$.

En représentant ces deux équations de droite dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on remarque que les deux droites sont concourantes.

Les coordonnées de leur point d'intersection $(x_0 = 2\ ;\ y_0 = 1)$ constituent donc la solution du système.



Exemple 14

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$.

Solution

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -2x-6y=2 \\ -5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-3}{5} \\ x=\dfrac{1-y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{-3}{5} \end{cases}$.

Donc S = $\left\{\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{-3}{5}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Donc S = $\{(1\ ;\ 1)\}$.

c) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ d) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2=0 \text{ (impossible)} \end{cases}$ .Donc S = $\varnothing$.

d) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$. Donc S = $\{(x;2-x);x\in\mathbf{R}\}$.

Exemple 15

a) Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives 2x +y + 1 = 0 et x + 2y + 5 = 0.

b) déterminer et interpréter graphiquement la solution du système : $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$.

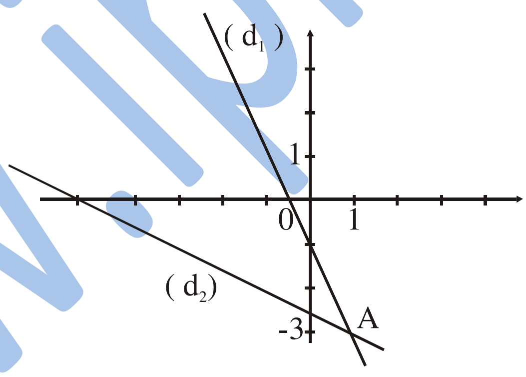
Solution

a) (d_1) :

x	0	$\frac{-1}{2}$
y	-1	0

(d_2) :

x	0	-5
y	$\frac{-5}{2}$	0



b) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ x+2(-1-2x)=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ -3x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Donc S = $\{(1\ ;-3)\}$.

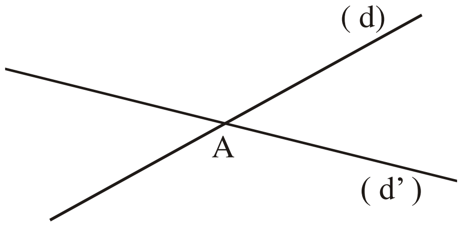
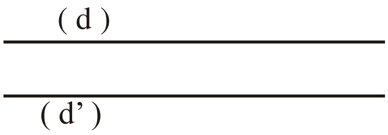
(1 ; -3) sont les coordonnées du point A commun entre les droites (d_1) et (d_2).

8- Solutions possibles d'un système linéaire donné

Interprétation graphique

Soit (d) et (d') les deux droites d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un repère $(O; \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Si	alors

$(d\,)$ et (d') sont sécantes $(\varDelta \neq 0)$  	Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à $(d\,)$ et (d').
$(d\,)$ et (d') sont strictement parallèles $(\varDelta\ =\ 0)$.  Les droites n'ont pas de points communs	Le système n'a pas de solution.
$(d\,)$ et (d') sont confondues $(\varDelta\ =\ 0)$. (d) = (d') Les droites ont une infinité de points communs	Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées des points de (d) (ou de d').

Exemple 16

On se propose ici de trouver les ensembles de solutions (*s'ils existent*) des trois systèmes suivants :

$$I - \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$II - \begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \\ -8x - 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$III - \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \\ -12x + 20y - 24 = 0 \end{cases}$$

On utilisera au choix l'une des méthodes précédentes pour résoudre les systèmes.

$$I - \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 4x - 6y - 12 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

$$6 \times \boxed{\mathbf{1}} + 5 \times \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} 18x + 30y - 42 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ 20x - 30y - 60 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 38x - 102 = 0 \Longrightarrow x = \frac{102}{38} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{51}}{\mathbf{19}}$$

$$3 \times \frac{51}{19} + 5y - 7 = 0 \Longrightarrow \frac{153}{19} + 5y - 7 = 0$$

$$\Longrightarrow 5y + \frac{153}{19} - \frac{133}{19} = 0 \Longrightarrow 5y + \frac{20}{19} = 0$$

$$\Longrightarrow 5y = -\frac{20}{19} \Longrightarrow y = -\frac{20}{19} \div 5 \Longrightarrow y = -\frac{20}{19} \times \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{4}{19} \Longrightarrow S\left\{\left(\frac{51}{19}\,;\,-\frac{4}{19}\right)\right\}}$$

Le système a donc une solution unique.

Le système correspond à deux équations de droites concourantes (*ayant un point commun*).

$$II - \begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ -8x - 4y + 13 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

$$2 \times \boxed{\mathbf{1}} + \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} 8x + 4y - 10 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ -8x - 4y + 13 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$\Longrightarrow 3 = 0$; c'est impossible, le système n'a pas de solution ; $S = \emptyset$.

Le système correspond à deux équations de droites parallèles (*n'ayant aucun point commun*).

$$III - \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ -12x + 20y - 24 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

$$4 \times \boxed{\mathbf{1}} + \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} 12x - 20y + 24 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ -12x + 20y - 24 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$\Longrightarrow 0 = 0$, toujours possible.

Le système a une infinité de solutions. Toute solution à la première équation est aussi solution à la deuxième, et inversement.

Le système correspond à deux équations de droites confondues (*ayant tous les points communs*).

Exercices généraux

Exercice 1.

Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose. Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste.

Et après avoir ensuite acheté un objet à 300 UM, il lui reste 400 UM. De quelle somme disposait –elle au départ ?

Exercice 2.

Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1 200 m^2, sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

Exercice 3.

Un producteur de spectacle loue une salle à 53 170 UM pour organiser un spectacle.

Chaque billet d'entrée est vendu 300 UM. A partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: les équations suivantes :

$x^2 -4x + 3 = 0$; $x^2 +x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$;

$x^2 +3x - 4 = 0$; $x^2 -2x - 2 = 0$; $x^4 -4x^2 +3 = 0$

$x^2 -3x - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x + 3\sqrt{x} +1 = 0$;

$2x^2 -x - 1= 0$; $1- 4x^2 = 0$; $(2x +1)^2 -3(2x +1) -4 = 0$

$(x -1) (x + 3) = 0$; $(1 -2x)^2(1 + x) = 0$; $x(1-x^2) = 0$

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: les inéquations :

$x + 1 \geq 0$; $2x - 1 \leq 0$; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$.

$x^2 -4x + 3 > 0$; $x^2 + x + 1 < 0$

$2x^2 -x - 1 < 0$; $x^2 - 1 \geq 0$

$(x - 1)(x + 3) \leq 0$; $(1 - 2x)^2(1 + x) < 0$

Exercice 6.

Soit m un réel. Soit E_m l'équation :

$mx^2 - x + 1 = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de E_m.

Exercice 7.

Soit g_m le trinôme définie pour tout x réel, par : $g_m(x) = x^2 + 2x -2m$ où m est un paramètre réel non nul.

1) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$.

2) Dans le cas où l'équation $g_m(x) = 0$ admet deux solutions réelles x' et x'' telles que x' < x'' ; montrer que si $m < 0$ alors $-2 < x' < x''$ et que si

$m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$.

Exercice 8.

On considère l'équation (E) :

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

1) Montrer que(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (E)

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, les systèmes :

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

Exercice 10.

1) Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, le système :

$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$.

2) Déduire de la question précédente, la résolution, dans $\mathbf{R}^2$, des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 26 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

Exercice 11.

Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer l'intersection des droites (d) et (d') données par leurs équations :

1) (d) $4x + 5y - 1 = 0$ 2) (d) $2x - 10y - 4 = 0$

(d') $3x + 4y - 2 = 0$ (d') $-3x + 15y + 6 = 0$

3) (d) $4x - 2y - 1 = 0$

(d') $y = 2x + 1$

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathbf{R}^3$, chacun des systèmes :

$$1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+4z=5 \\ -2x-5y+2z=6 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x+y+z=12 \\ 3x-2y+3z=12 \\ 5x-y+z=12 \end{cases} .$$

Exercice 13.

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan.

1) Les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :

$x + y - 2 = 0$; $3x - y - 1 = 0$; $2x - 3y + 2 = 0$ sont-elles concourantes ?

2) Vérifier graphiquement la réponse.

Exercice 14.

1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :

$x + y - 2 = 0$; $3x - y - 1 = 0$; $2x - 3y + m = 0$ soient concourantes ?

2) faite la figure pour la valeur de m trouvée.

Exercice 15.

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points A(-3 ; 2) ; B(0 ; -3) ; C(2 ; 2).

1) Déterminer une équation de chacune des droites (AB) ; (AC) et (BC).

2) Déterminer un système d'inéquation définissant l'intéieur du triangle ABC.

Exercice 16.

Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2.

Mettre P(x) sous la forme canonique.

Déterminer les racines éventuelles de P

Etudier le signe de P(x).

1) $P(x) = x^2 + 2x - 1$ 5) $P(x) = x2 + 2x + 2$

2) $P(x) = -x^2 + x - 1$ 6) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

3) $P(x) = x^2 - 7x + 6$ 7) $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$

4) $P(x) = -5x^2 + x + 1$ 8) $P(x) = 169x^2 + 13x - 1$

Exercice 17.

On donne un polynôme P et un nombre réel a. Dans chacun des cas suivants :

Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.

Déterminer le quotient de P(x) par x – a.

Factoriser, si possible, ce quotient.

Etudier le signe de P(x).

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$

2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.

3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

Exercice 18.

Développer, simplifier, transposer les inconnues et des valeurs constantes, puis résoudre les équations suivantes ;

$$2x + 3 = 5 - 4x \,;\, 5(3x - 2) = 7(6x + 1)\,;$$
$$3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2).$$

Exercice 19.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

a) $4x^2 = 0$
b) $2x^2 + 32 = 0$
c) $3x^2 - 27 = 0$
d) $-2x^2 + 8 = 0$
e) $-7x^2 - 21 = 0$
f) $4x^2 + 3x = 0$
g) $5x^2 - 20x = 0$

Exercice 20.

Chercher les solutions des trois équations suivantes ;

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
c) $5x^2 + 3x + 4 = 0$

Exercice 21.

Soit l'équation ; $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$)

On a vu dans le précédent chapitre que l'écriture canonique d'un trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Faire une discussion et extraire le discriminant Δ.

Exercice 22.

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6, puis vérifier le résultat.

Exercice 23.

Trouver les deux nombres réels x et y tels que ;

$$x + y = 6 \; et \; xy = 8$$

Exercice 24.

Trouver deux nombres x et y ayant pour somme 25 et pour produit 144.

Exercice 25.

L'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$ admet-elle deux solutions ?
a) Si oui sans calculer ces solutions x' et x'', déterminer leur somme $\mathcal{S}$ et leur produit $\mathcal{P}$.
b) En déduire ;

$$\frac{1}{x'x''}; \quad x'^2 + x''^2; \quad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$$

Exercice 26.

Résoudre les systèmes homogènes

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 27.

Sachant que ; $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Déterminer les couples (x, y) vérifiant ;

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Exercice 28.

Soit l'équation paramétrique ; $E_m : (m + 1)x^2 - (2m - 3)x + m - 4 = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation E_m.

Exercice 29.

Résoudre l'équation paramétrique ; $E_m : 2x^2 - (m-3)x + 2m - 14 = 0$

Exercice 30.

Résoudre l'équation paramétrique ; $E_m : (2m+3)x^2 - (m+5)x - 21m - 42 = 0$

Exercice 31.

Soit l'équation ; $E : 2x^2 - ax - 3a - 6 = 0$

Déterminer la valeur de a pour que l'équation E admet 2 comme solution et donner sa deuxième solution.

Exercice 32.

$ABCD$ est un rectangle déterminer le réel k tel que ;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB + BC}{AB} = k$$

Exercice 33.

Déterminer les réels p, q et r pour que -2 et 3 soient les solutions de l'équation ;

$$E : \ x^2 - (2p+q)x + 3p - 2q = 0$$

Exercice 34.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs du paramètre réel m, les équations suivantes :

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$
$$(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$$
$$(m-3)x^2 - (7-4m)x + 20 = 0$$
$$(6-m)x^2 - (3m+1)x - 3 - 9m = 0$$
$$(4m+1)x^2 - 2(7-2m)x + 3 + m = 0$$
$$(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + (m-1) = 0$$

Exercice 35.

Déterminer m pour que 1 soit solution des équations suivantes :

$$(m+1)x^2 - 2mx + 5 = 0$$
$$mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$$
$$(m^2+1)x^2 + 3(m-1)x + m = 0$$

Exercice 36.

Déterminer m pour que -1 soit solution de l'équation suivante :

$$(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$$

Exercice 37.

Soit le polynôme ; $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

1° Calculer $P(-1)$;

2° Résoudre l'équation $P(x) = 0$

a/ En factorisant $P(x)$;

b/ Par la méthode euclidienne.

Exercice 38.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

$$\frac{3x-2}{2x+5} = \frac{2x+5}{3x-2}; \qquad \frac{-12}{7x-3} = \frac{5}{2x+9}$$

$$\frac{9x^2+6x}{3x+2} = -5; \qquad \frac{3x^2-2x}{x-9} = 0$$

IV-ETUDE DES SIGNES

Faire savoir

Le cours

1. Etude des signes d'un polynôme

a) Etude des signes d'un polynôme du premier degré à une inconnue

$\boldsymbol{P(x) = ax + b}$

Dans le cas général ;

Soit le polynôme $P(x) = ax + b \; tels \; que \; a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

L'équation $ax + b = 0$ admet une seule solution $x_0 = \frac{-b}{a}$.

On distingue deux cas :

Si a > 0, le signe de ax + b est donné dans le tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		-	0	+	

Si a < 0, le signe de ax + b est donné dans le tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		+	0	-	

On peut mémoriser ces deux tableaux sous forme :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		Signe de (-a)	0	Signe de (a)	

Interprétation géométrique

Dans un repère (O ; I ; J), soit (d) a droite d'équation y = ax + b (a $\neq$ 0).

On peut retrouver graphiquement le signe de y = ax + b si a > 0 (Fig. 1) ou a < 0 (Fig. 2).

a > 0	a < 0

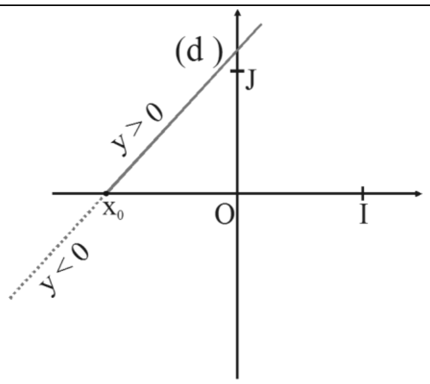
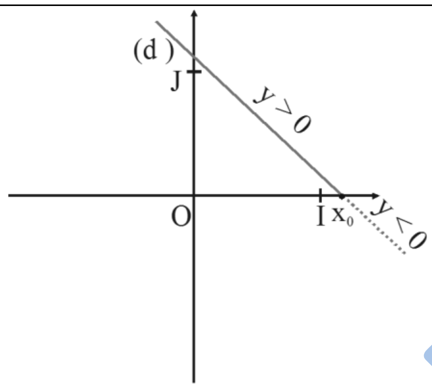

	

Fig. 1	Fig. 2

Exemple 1

Soit le polynôme ; $P(x) = 3x + 14$, donner son étude des signes

Solution

$$P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{-14}{3}$$

Le tableau de l'étude des signes

x	$-\infty$		$\frac{-14}{3}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Exemple 2

Soit le polynôme ;$R(x) = 11 - 5x$, donner son étude des signes

Solution

La solution de l'équation associée est ; $x = \frac{11}{5}$

Le tableau de l'étude des signes

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
$R(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple 3

Etudier les signes des polynômes $\frac{3}{2}x + 1$ et $-\frac{x}{4} + 3$

Solution

Les signes des deux monômes sont consignés dans les deux tableaux qui suivent :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{2}x + 1$		-	0	+	

x	-∞		12		+∞
$-\frac{x}{4}+3$		+	0	-	

b) Etude des signes d'un polynôme du deuxième degré à une inconnue

$$\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$$

On commence par la recherche des solutions de l'équation associée au polynôme ;

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cas particuliers

La forme générale peut se ramener aux cas particuliers suivants :

1) $P(x) = ax^2$ $(Lorsque\ b = 0\ et\ c = 0)$
2) $P(x) = ax^2 + c$ $(Lorsque\ b = 0\ )$
3) $P(x) = ax^2 + bx$ $(Lorsque\ c = 0)$

Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + c}$

Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont du même signe

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+c		$signe\ de\ a$	

Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont de signes contraires

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-c}{a}}$		$\sqrt{\frac{-c}{a}}$		$+\infty$
ax^2+c		$signe(a)$	$\mathbf{0}$	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$	

Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx = x(ax+b)}$

☒ $\boldsymbol{Si\ \frac{-b}{a}} < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		0		$+\infty$
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	$\vert$	$signe(a)$	
ax^2+bx		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$	

☒ $\boldsymbol{Si\ \frac{-b}{a}} > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	

$ax + b$	$-signe(a)$ | $-\,signe(a)$ $\mathbf{0}$ $signe(a)$
$ax^2 + bx$	$signe(a)$ 0 $-\,signe(a)$ $\mathbf{0}$ $signe(a)$

Signe d'un trinôme du second degré sur **R**

<table>
<tr><td>Si</td><td>alors</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>Inf (x_1 ; x_2)</td><td></td><td>Sup (x_1 ; x_2)</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe contraire de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Exemple 4

Etudier les signes des polynômes ;

$A(x) = 2x^2 + 7x + 3$ et $B(x) = -3x^2 + 8x + 3$

Solution

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

Etude des signes d'un produit de polynômes

Exemple 5

Etudier les signes des polynômes suivants ;

$A(x) = (3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9)$;

Solution

$$A(x) = (3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9)$$

L'équation associée est ;

$$(3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9) = 0$$
$$\Longrightarrow (3x^2 - 5x - 2)(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\ ou \\ 2x + 3 = 0 \\ ou \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

On calcule le Δ de la première équation du produit ;

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-7}{2 \times 3} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3} \\ x_2 = \dfrac{5+7}{2 \times 3} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x+3)(2x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \\ x + \dfrac{1}{3} \Longrightarrow x = \dfrac{-1}{3} \\ 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-3}{2} \\ 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Les solutions de l'équation associée sont ;

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \left\{\frac{-3}{2} ; \frac{-1}{3} ; \frac{3}{2} ; 2\right\}}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\frac{1}{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$A(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Etude des signes d'un quotient de polynômes

Exemple 6

Etudier les signes des quotients de polynômes suivants ;

$$Q(x) = \frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x - 6)(x - 5)}{x + 2}$$

Solution

$$Q(x) = \frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x + 6)(x - 5)}{x + 2}$$

Les équations associées sont ;

$$(3x^2+8x-3)(2x+6)(x-5)=0\ \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\text{et }\ x+2=0\ \boxed{\mathbf{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{1}} \Longrightarrow (3x^2+8x-3)(2x-6)(x-5)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2+8x-3=0 \\ ou \\ 2x-6=0 \\ ou \\ x-5=0 \end{cases}$$

On calcule le Δ de la première équation du numérateur du quotient ;

$$\Delta = 8^2-4\times3\times(-3)=64+36=100$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta}=10 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-8-10}{2\times3}=\dfrac{-18}{6}=-3 \\ x_2=\dfrac{-8+10}{2\times3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)(2x-6)(x-5)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{1}{3}=0 \Longrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ x+3 \Longrightarrow x=-3 \\ 2x-6=0 \Longrightarrow x=3 \\ x-5=0 \Longrightarrow x=5 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Les solutions de l'équation associée au numérateur sont ;

$$\boldsymbol{S}=\left\{\mathbf{-3}\,;\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,;\,\mathbf{3}\,;\mathbf{5}\right\}$$

L'équation associée au dénominateur est ;

$$\boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow x+2=0 \Longrightarrow x=-2$$

(*Valeur exclue car, elle annule le dénominateur*)

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty \quad \mathbf{-3} \quad -2 \quad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad +\infty$
$x+3$	$- \quad 0 \quad + \ \vert \ + \ \vert \ + \ \vert \ + \ \vert \ +$
$x+2$	$- \ \vert \ - \quad 0 \quad + \ \vert \ + \ \vert \ + \ \vert \ +$
$x-\dfrac{1}{3}$	$- \ \vert \ - \ \vert \ - \quad 0 \quad + \ \vert \ + \ \vert \ +$
$x-3$	$- \ \vert \ - \ \vert \ - \ \vert \ - \quad 0 \quad + \ \vert \ +$
$x-5$	$- \ \vert \ - \ \vert \ - \ \vert \ - \ \vert \ + \quad 0 \quad +$
$\boldsymbol{Q(x)}$	$- \quad \mathbf{0} \quad + \ \Vert \ - \quad \mathbf{0} \quad + \quad \mathbf{0} \quad - \quad \mathbf{0} \quad +$

Exercices généraux

Exercice 1

Etudier, selon la valeur de x, le signe de :

a) $\frac{3}{2}x + 1$; b) $-\frac{x}{4} + 3$.

Exercice 2

Etudier les signes des polynômes ;

$C(x) = x^2 - 2x + 1$; $D(x) = -2x^2 - 4x - 2$;

$E(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $F(x) = -3x^2 + 6x - 7$.

Exercice 3

Etudier les signes des polynômes ;

$A(x) = 5x^2 + 45$; $B(x) = -7x^2 - 21$; $C(x) = 3x^2 - 27$; $D(x) = -2x^2 + 8$

$E(x) = 4x^2 + 3x$; $F(x) = 20x - 5x^2$.

Exercice 4

Etudier les signes du produit suivant ;

$B(x) = (-2x^2 + 7x + 1)(x^2 - 3x - 12)$;

Exercice 5

Etudier les signes du quotient suivant ;

$R(x) = \frac{(3x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 25)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

Exercice 6

Discuter en fonction du paramètre réel m, les signes des fonctions suivantes :

$$A(x) = (m+2)x - 5 - mx + (1-m)x + 3$$

$$B(x) = mx + 7 - (2m+7)x - 4(5 - 3m)$$

$$C(x) = (m-3)x^2 - 7x + 2m$$

$$D(x) = (2mx - 5)(3m + 7x)$$

$$E(x) = \frac{5 - 7mx}{4x + 3m}$$

V- LES INEQUATIONS

Faire savoir

Le cours

Définition

Une inéquation est une expression algébrique qui fait intervenir une relation d'inégalité ($<$; $\leq$; $>$ *ou* $\geq$) et une ou plusieurs variables (*inconnues*) de degré **1** ou plus.

La résolution d'une inéquation est la détermination de l'ensemble des nombres réels vérifiant cette inéquation.

1. Les inéquations du premier degré à une inconnue

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du premier degré à une inconnue développée et réduite est ;

$$\boldsymbol{ax+b} < 0\,;\, ax+b \leq 0\,;$$
$$\boldsymbol{ax+b} > 0 \text{ } ou \text{ } ax+b \geq 0 \ldots (a \neq 0).$$

b) Méthode de résolution

$$\boldsymbol{ax+b} < 0 \Longrightarrow ax < -b \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} < \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}} \ \boldsymbol{si\ a} > 0 \\ \boldsymbol{x} > \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}} \ \boldsymbol{si\ a} < 0 \end{cases}$$

On a déjà vu le tableau de l'étude des signes du polynôme $\boldsymbol{P(x) = ax+b}$ il est ainsi ;

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$	$+\infty$
$\boldsymbol{ax+b}$	$\boldsymbol{-signe\ de\ a}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{signe\ de\ a}$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{a} > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} = \left]-\infty;\ \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}\right[$$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{a} < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} = \left]\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}};\ +\infty\right[$$

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\boldsymbol{5x-4 \geq 0}$

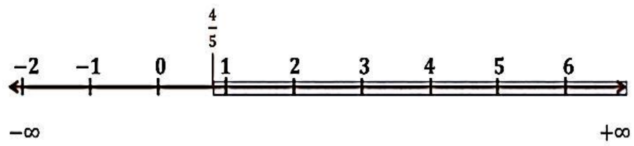
Solution

$$\boldsymbol{5x-4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{4}{5}}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{4}{5};\ +\infty\right[$$



Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$-33 \leq 4x + 7 < 27$$

Solution

$$-33 \leq 4x + 7 < 27$$
$$\Rightarrow -33 - 7 \leq 4x + 7 - 7 < 27 - 7$$
$$\Rightarrow -40 \leq 4x < 20$$
$$\Rightarrow -40 \div 4 \leq 4x \div 4 < 20 \div 4$$
$$\Rightarrow -8 \leq x < 5$$
$$\mathcal{S} = \{x / -8 \leq x < 5\} = [-8; 5[$$

2. Les équations du deuxième degré à une inconnue

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du deuxième degré à une inconnue développée et réduites est ;

$ax^2 + bx + c \geq 0$ **(ou** $>$ ou $\leq$ ou $<$**) Avec** $(a \neq 0)$

Cas particuliers

1) $ax^2 < 0$ **(ou** $>$ ou $\leq$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$
2) $ax^2 + c > 0$ **(ou** $<$ ou $\leq$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$
3) $ax^2 + bx \leq 0$ **(ou** $>$ ou $<$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$

b) Méthode de résolution

Pour déterminer l'ensemble de solution de telles inéquations, on utilise leurs études de signes telles que expliquées au chapitre IV et reprises ci-dessous ;

a- Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $P(x) = ax^2 + c$

1° Si a et c sont du même signe

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$

$ax^2 + c$	$signe\ de\ a$

2° Si a et c sont de signes contraires

x	$-\infty \quad -\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad +\infty$
$ax^2 + c$	$sign(a)\ 0\ -sign(a)\ 0\ sign(\ a)$

b- Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $p(x) = ax^2 + bx$

$1°\ Si\ \frac{-b}{a} < 0$

x	$-\infty \quad \frac{-b}{a} \quad 0 \quad +\infty$
x	$- \quad \mid \quad - \quad 0 \quad +$
$ax + b$	$-sign(a)\ 0\ \ sign(a) \mid sign(\ a)$
$ax^2 + bx$	$sign(a)\ 0 - sign(a)\ 0\ \ sign(\ a)$

$2°\ Si\ \frac{-b}{a} > 0$

x	$-\infty \quad 0 \quad \frac{-b}{a} \quad +\infty$
x	$- \quad 0 \quad + \quad \mid \quad +$
$ax + b$	$-sign(a) \mid - sign(a)\ 0\ sign(\ a)$
$ax^2 + bx$	$sign(a)\ 0 - sign(a)\ 0\ \ sign(\ a)$

c- Tableau de l'étude des signes du polynôme ;

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$1°\ Si\ \Delta > 0$

x	$-\infty\ \ inf(x_1; x_2)\ sup(x_1; x_2) + \infty$
$ax^2 + bx + c$	$sign(a)\ 0\ \ - sign(a)\ 0\ sign(\ a)$

$2°\ Si\ \Delta = \mathbf{0}$

x	$-\infty \quad x_0 \quad +\infty$
$ax^2 + bx + c$	$signe\ de\ a \quad 0 \quad signe\ de\ a$

$3°\ Si\ \Delta < 0$

x	$-\infty \quad +\infty$
$ax^2 + bx + c$	$signe\ de\ a$

Exemple

Soit l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation ;

$$\mathbf{2x^2 - 5x + 2 = 0}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Longrightarrow \Delta > 0 \ et \ \sqrt{\Delta} = 3$$

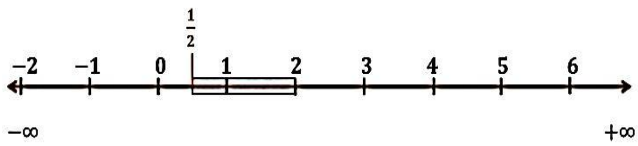
$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ et \ x_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation ;

$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ est donc ; $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} ; 2\right]$



Exemple

Soit l'inéquation : $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation ;

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times -2 \times \frac{-9}{2} = 36 - 36 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$		$-$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation ;

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0 \text{ est donc ; } \mathcal{S} = \emptyset$$

Exemple

Soit l'inéquation : $\mathbf{3x^2 - 4x + 12 \geq 0}$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation ;

$$\mathbf{3x^2 - 4x + 12 = 0}$$

$$\Delta = \mathbf{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 16 - 144 = -128}$$

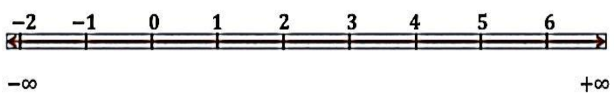
$\Longrightarrow \Delta < 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathbf{3x^2 - 4x + 12}$	$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation ;

$$\mathbf{-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}} > 0 \textbf{ est donc ; } \boldsymbol{S} = \mathbb{R}$$



Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $(2x - 1)(x + 1) \geq 0$; 2) $x^2 - 4x + 3 < 0$ 3) $(x^2 + x + 1)(1 - x^2) > 0$.

Solution

1)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x - 1)(x + 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -1] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$

2)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]1 ; 3[$.

3)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+1)(1-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

S =] -1 ; 1[.

Exemple 2

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 -9x^2 +26x -24$

1) Calculer $f(2)$,
2) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait $f(x) = (x – 2)(x^2 + ax + b)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$.

Solution

1) $f(2) = (2)^3 -9(2)^2 +26(2) -24 = 8 -36 +52 -24 = 60 -60 = 0$

$f(2) = 0$.

2) **Méthode 1** : (Identification).

$$f(x) = (x – 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 +bx -2x^2 -2ax -2b$$
$$= x^3 + (a -2)x^2 + (b -2a)x -2b$$

En utilisant l'identification on a : $\begin{cases} a-2=-9 \\ b-2a=26 \\ -2b=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=12 \end{cases}$. Donc, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$; $f(x) =(x – 2)(x^2 - 7x + 12)$.

Méthode 2 (Division euclidienne)

$$\begin{array}{l|l}
x^3 -9x^2 + 26x -24 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-(x^3-2x^2) & x^2 -7x + 12 \\ \cline{1-1}
\quad 0 -7x^2 +26x -24 & \\
-(-7x^2 + 14x) & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 \quad + 12x -24 & \\
\qquad\quad -(12x -24) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Donc, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$; $f(x) =(x – 2)(x^2 - 7x + 12)$.

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x – 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; ou $x^2 - 7x + 12$.

$\Delta = (-7)^2 -4(1)(12) = 49 - 48 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$;

$x_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$; $x_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$.

Donc S = $\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

4)

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-7x+12$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

$S =]2,3[\cup]4,+\infty[$

3. Les inéquations du premier degré à deux inconnues

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du premier degré à deux inconnues est ;

$\boldsymbol{ax+by+c<0}$; $\boldsymbol{ax+by+c>0}$

$\boldsymbol{ax+by+c\leq 0}$ **ou** $\boldsymbol{ax+by+c\geq 0}$ **.**

Avec $\boldsymbol{a, b}$ **et** $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

b) Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues, on trouve deux solutions à son équation associée.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on représente la droite qui correspond à cette équation. On prend ensuite un point non situé sur la droite (*le point d'origine* $\boldsymbol{O}$ *de préférence si tel est son cas*), on remplace $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par ses coordonnées et on calcule. En fonction du signe du résultat obtenu, on décide duquel des deux demi-plans situés de part et d'autre de la droite, est la solution de l'inéquation.

4. Système de deux inéquations à deux inconnues

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations à deux inconnues, on utilise la méthode graphique comme expliqué précédemment pour chaque équation. Ensuite, on cherche l'intersection des deux demi-plans solutions.

5. Inéquation produit – Inéquation quotient

a) Inéquation produit

a- Définition

On appelle inéquation produit, toute inéquation composée d'un produit de deux polynômes ou plus.

b- Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation produit, on commence par résoudre son équation associée. En fonction des racines obtenues pour l'équation associée, on dresse ensuite un tableau d'étude de signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

b) Inéquation quotient

a- Définition

On appelle inéquation rationnelle ou inéquation quotient, toute inéquation caractérisée par un quotient de deux ou plusieurs polynômes ;

c- Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation rationnelle, on commence par résoudre ses équations associées dans le numérateur et dans le dénominateur, en excluant les éventuelles valeurs qui annulent le dénominateur.

En fonction des racines obtenues pour les équations associées, on dresse un tableau d'étude des signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

Exemple 3

Soit l'inéquation ;

$$\mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0}$$

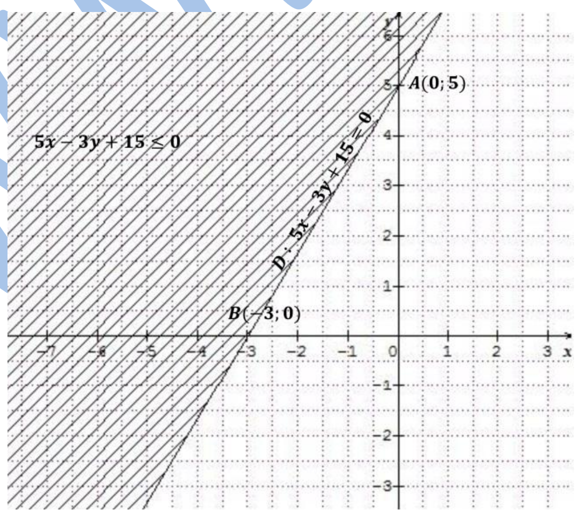
Les coordonnées des points $\boldsymbol{A(0,5)}$ et $\boldsymbol{B(-3,0)}$ sont deux solutions de l'équation associée.

Dans un repère $(\boldsymbol{O};\ \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ du plan, la droite $(\boldsymbol{AB})$ partage le plan en deux demi-plans.

Pour déterminer celui qui est la solution de l'inéquation, on remplace par les coordonnées de $\boldsymbol{O(0,0)}$,

On a ; $\mathbf{5 \times 0 - 3 \times 0 + 15 = 15}$

Donc ; le point $\boldsymbol{O}$ appartient au demi-plan qui n'est pas solution de l'inéquation.



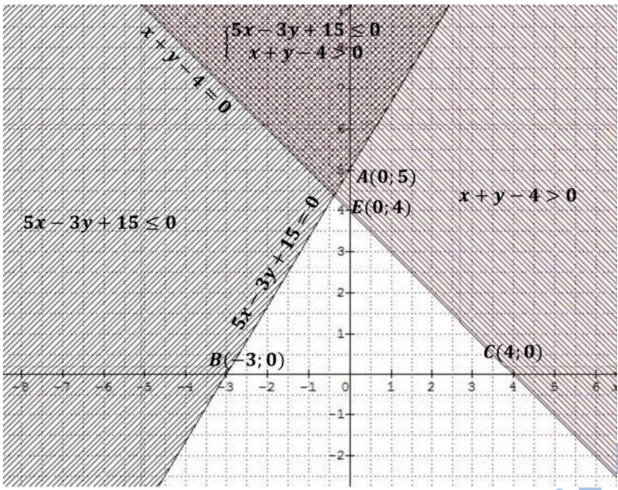
La solution de l'inéquation $\mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0}$ est le demi-plan fermé de frontière la droite $(\boldsymbol{AB})$ et ne contenant pas l'origine.

Système de deux inéquations à deux inconnues

Exemple 4

$$\textbf{Soit le système } \begin{cases} \mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0} \\ \mathbf{x + y - 4 > 0} \end{cases}$$

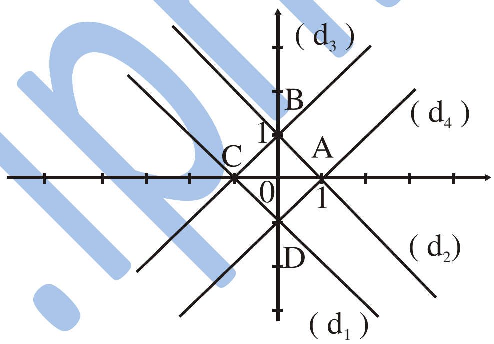
La solution de ce système est la zone du plan doublement hachurée, fermée du côté de la droite $(\boldsymbol{AB})$, et ouverte du côté de la droite $(\boldsymbol{CE})$.



Exemple 5

le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases}$.



Solution

$$\begin{cases} -1 \leq x + y \leq +1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Or

- $x + y + 1 \geq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_1) d'équation $x + y + 1 = 0$.
- $x + y - 1 \leq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_2) d'équation $x + y - 1 = 0$
- $x - y + 1 \geq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_3) d'équation $x - y + 1 = 0$
- $x - y - 1 \leq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_4) d'équation $x - y - 1 = 0$

En conclusion, l'ensemble demandé est la partie du plan limitée par le carré ABCD (voir figure).

Exercices généraux

Inéquations du premier degré

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions :

$$\boldsymbol{-3x + 4 \geq 0} \; ; \; \boldsymbol{-13 \leq 4x + 7} < 19$$

Inéquations du deuxième degré

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$\mathbf{2x^2 - 5x + 2 \leq 0}$; $\mathbf{-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}} > 0$;

$\mathbf{3x^2 - 4x + 12 \geq 0}$

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$\mathbf{x^2 + 2x + 1 \geq 0}$; $\mathbf{3x^2 - 7x + 2} < 0$;

$\mathbf{-2x^2 + 5x + 3 \leq 0}$; $\mathbf{3x^2 + 2x + 5} < 0$;

$\mathbf{-4x^2 + 3x - 6 \leq 0}$

Exercice 4

Etudier les signes, résoudre les inéquations et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions :

$$\mathbf{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} < 0$$

$$\mathbf{x^2 + x + 1 \leq 0}$$

Inéquation produit

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations produits suivantes, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$\mathbf{(3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9)} < 0$;

$\mathbf{(-2x^2 + 7x + 1)(x^2 - 3x - 12)} > 0$;

$\mathbf{(2x + 5)(4x - 7)(x - 10) \leq 0}$;

$\mathbf{(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)(36x^2 - 81) \geq 0}$.

Inéquation quotient

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles suivantes, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$$\mathbf{\frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x - 6)(x - 5)}{x + 2} \leq 0}$$

$$\mathbf{\frac{(3x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 25)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)} \geq 0}$$

Système de deux inéquations à une inconnue

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$$I-\begin{cases}2(5-4x)-3(7x+1)<0 & \boxed{1}\\ -4(x-7)+6(4x+9)\geq 0 & \boxed{2}\end{cases}$$

$$II-\begin{cases}3(7x-12)\geq -6(2x-5) & \boxed{1}\\ -2(5x+4)\geq 4(3x-1) & \boxed{2}\end{cases}$$

$$III-\begin{cases}7x-5\geq 5x-11 & \boxed{1}\\ x+10>4x-5 & \boxed{2}\end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$: les inéquations :

$x+1\geq 0$; $2x-1\leq 0$; $\frac{1}{3}x+1\geq 0$.

$x^2-4x+3>0$; $x^2+x+1<0$

$2x^2-x-1<0$; $x^2-1\geq 0$

$(x-1)(x+3)\leq 0$; $(1-2x)^2(1+x)<0$

Exercice 9

Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations suivantes :

1) $2y-x+2\leq 0$; 2) $y\geq 0$; 3) $x\leq 1$.

4) $\begin{cases}x+y-1<0\\ 2x-3y>0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x+y-1\geq 0\\ x-2y+4\geq 0\end{cases}$

VI- VALEUR ABSOLUE ET POLYNOMES

Faire savoir

Le cours

1. La valeur absolue associée à un polynôme

a) Polynôme $ax + b$ $(a \neq 0)$

$$\mathbf{1}^\circ \ si\ a > 0 \Rightarrow |ax + b| = \begin{cases} ax + b\ si\ x \geq \dfrac{-b}{a} \\ -ax - b\ si\ x \leq \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$
$\lvert ax + b\rvert$	$-ax - b$	$\mathbf{0}$	$ax + b$

Résumé

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}\right] \Rightarrow |\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{-ax} - \boldsymbol{b} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left[\dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}; +\infty\right[\Rightarrow |\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \end{cases}$$

$$\mathbf{2}^\circ \ si\ a < 0 \Rightarrow |ax + b| = \begin{cases} ax + b\ si\ x \leq \dfrac{-b}{a} \\ -ax - b\ si\ x \geq \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$
$\lvert ax + b\rvert$	$ax + b$	$\mathbf{0}$	$-\ ax - b$

Résumé

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}\right] \Rightarrow |\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left[\dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}; +\infty\right[\Rightarrow |\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{-ax} - \boldsymbol{b} \end{cases}$$

Exemple 1

Donner sur $\mathbb{R}$ les expressions de : $|5x + 7|$ et $|-3x + 2|$

Solution

$$|5x+7| = \begin{cases} 5x+7 \ si \ x \geq \dfrac{-7}{5} \\ -5x-7 \ si \ x \leq \dfrac{-7}{5} \end{cases}$$

Tableau

x	$-\infty$		$\frac{-7}{5}$		$+\infty$
$5x+7$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$\lvert 5x+7\rvert$		$-5x-7$	$\mathbf{0}$	$5x+7$	

$$\text{Conclusion} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \dfrac{-7}{5}\right] \Rightarrow |5x+7| = -5x-7 \\ \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left[\dfrac{-7}{5}; +\infty\right[\Rightarrow |5x+7| = 5x+7 \end{cases}$$

$$|-3x+2| = \begin{cases} -3x+2 \ si \ x \leq \dfrac{2}{3} \\ 3x-2 \ si \ x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Tableau

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$\lvert -3x+2\rvert$		$-3x+2$	$\mathbf{0}$	$3x-2$	

$$\text{Conclusion} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \dfrac{2}{3}\right] \Rightarrow |-3x+2| = -3x+2 \\ \textbf{Si } \boldsymbol{x} \in \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right[\Rightarrow |-3x+2| = 3x-2 \end{cases}$$

Exemple 2

Donner sur $\mathbb{R}$ les expressions de : $|4x+7|$ et $|3-11x|$

Solution

$$|4x+7| = \begin{cases} 4x+7 \ si \ x \geq \dfrac{-7}{4} \\ -4x-7 \ si \ x \leq \dfrac{-7}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{-7}{4}$		$+\infty$
$4x+7$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$\lvert 4x+7\rvert$		$-4x-7$	$\mathbf{0}$	$4x+7$	

Résumé

$$\begin{cases} \textbf{Si } x \in \left]-\infty ; \dfrac{-7}{4}\right] \Longrightarrow |4x+7| = -4x-7 \\ \textbf{Si } x \in \left[\dfrac{-7}{4} ; +\infty\right[\Longrightarrow |4x+7| = 4x+7 \end{cases}$$

$$|3-11x| = \begin{cases} 3-11x \ si \ x \leq \dfrac{3}{11} \\ 11x-3 \ si \ x \geq \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{11}$		$+\infty$
$3-11x$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$\vert 3-11x \vert$		$3-11x$	$\mathbf{0}$	$11x-3$	

Résumé

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textbf{Si } x \in \left]-\infty ; \dfrac{3}{11}\right] \Longrightarrow |3-11x| = 3-11x \\ \textbf{Si } x \in \left[\dfrac{3}{11} ; +\infty\right[\Longrightarrow |3-11x| = 11x-3 \end{cases}$$

b) Polynôme $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

<table>
<tr><td rowspan="2">$\Delta > 0$</td><td>$a > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td>0</td><td>ax^2+bx+c</td><td>0</td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>ax^2+bx+c</td><td>0</td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td>0</td><td>ax^2+bx+c</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta = 0$</td><td>$a > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>ax^2+bx+c</td><td>0</td><td>ax^2+bx+c</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td>0</td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta < 0$</td><td>$a > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>ax^2+bx+c</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c</td><td></td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|ax^2+bx+c|$</td><td></td><td>$-ax^2-bx-c$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Exemple 3

Donner l'expression de B sur $\mathbb{R}$

$B(x) = |2x^2 - 7x + 5|$

Solution

$2x^2 - 7x + 5 = 0 \Longrightarrow 2 - 7 + 5 = 0$

$x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = \frac{5}{2}$

Conclusion

$$\begin{cases} \mathbf{Si}\ \boldsymbol{x} \in]-\infty;\ \mathbf{1}] \cup \left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}};\ +\infty\right[\Rightarrow \mathbf{2x^2 - 7x + 5 \geq 0} \\ \qquad \Rightarrow |\mathbf{2x^2 - 7x + 5}| = \mathbf{2x^2 - 7x + 5} \\ \mathbf{Si}\ \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1};\ \mathbf{9}] \Rightarrow \mathbf{2x^2 - 7x + 5 \leq 0} \\ \qquad \Rightarrow |\mathbf{2x^2 - 7x + 5}| = -\mathbf{2x^2 + 7x - 5} \end{cases}$$

Exercices généraux

Exercice 1

Donner l'expression algébrique de A sur $\mathbb{R}$

$A(x) = |2x + 6| + |4 - 2x| + |x - 1|$

a) La valeur absolue appliquée aux équations

Exercice 2

Pour quelle valeur de x a-t-on :

$\left|\frac{-3}{x}\right| = \frac{3}{x}$?

Exercice 3

Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a ;

$\frac{|-5x^2|}{|25x|} = \frac{|x|}{5}$.

Exercice 4

Pour quelle valeur réelle x a-t-on :

$\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$?

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

■ $|3 - 2x| = 11$;

■ $2 - 3|4 - x| = 0$;

■ $1 + |5x - 6| = 0$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$|2x+3| = |3x-7|$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

■ $|5x-4| = |7x+1|$;

■ $|x^2-1| = |7-x^2|$.

Exercice 8

Résoudre les équations :

■ $|3x+1| + |x-2| = 9$;

■ $|2-5x| + |3x-1| = 1$.

Exercice 9

Résoudre les équations

☒ $\big||x+2|+3\big| = 5$

☒ $\big||x^2+9|-16\big| = 1$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$

☒ $\big||x-5|+6\big| = 7$

☒ $\big||x+4|-1\big| = 5$

☒ $\big||x-5|-8\big| = 1$

☒ $\big||x^2+10|+8\big| = 12$

☒ $\big||x^2-4|+11\big| = 6$

☒ $\big||x^2-3|-7\big| = 10$

b) La valeur absolue appliquée aux inéquations

Exercice 11

Déterminer les réels vérifiant :

$|5+3x| \leq 4$,

En donnant une représentation graphique de l'ensemble de solutions.

Exercice 12

Résoudre les inéquations :

■ $|7-2x| \leq 3$;

■ $|x^2-2| \leq 1$.

Exercice 13

Résoudre les inéquations :

■ $\dfrac{|2x-5|}{|x-4|} < 1$

■ $|3-x| \geq |x+3| - 2|x|$

Exercice 14

Résoudre les inéquations

☒ $\big||x-14|-3\big| \leq 1$

☒ $\big||x^2+7|-4\big| > 12$

Valeur absolue associée aux produits et quotients de polynômes

Exercice 15

Donner l'expression algébrique sur $\mathbb{R}$ de :

$$A(x) = |(x-5)(x+3)(2x+7)(3-4x)|$$
$$B(x) = |(-3x^2+5x+2)(2x^2-7x+3)|$$
$$C(x) = |(2x-3)(7-5x)(x^2+8x-9)|$$

Exercice 16

Donner l'expression algébrique sur $\mathbb{R}$ de :

$$D(x) = \left|\frac{(x-2)(x+6)(3x+2)}{(2x-7)(3-4x)}\right|$$
$$E(x) = \left|\frac{(x-9)(-3x^2+5x+2)(3x+2)}{(x^2+4x+4)(x^2-9)}\right|$$

VII- CALCUL VECTORIEL ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Faire savoir

Le cours

1. Notion de vecteur

Définition

Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est déterminé par ;

- Une longueur ; celle du segment $[AB]$ appelée norme de $\vec{u}$,
- Une direction ; celle de la droite (AB),
- Un sens ; celui de A vers B.

Remarque 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont égaux s'ils ont :

- La même longueur,
- Le même sens,
- La même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés s'ils ont :

- La même longueur,
- La même direction,
- Deux sens contraires.

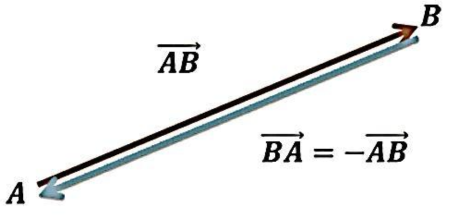
a) Relations vectorielles

Pour tout point A du plan $\mathcal{P}$, on a :

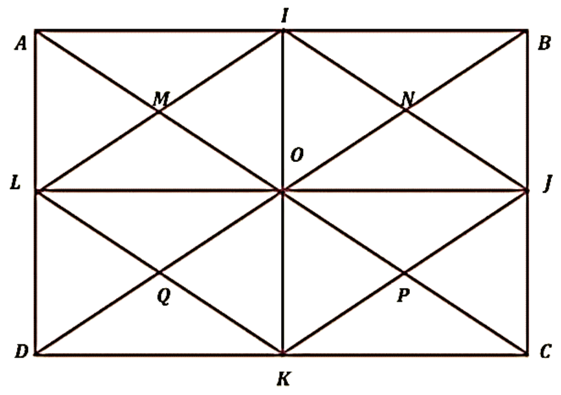
$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *(Vecteur nul).*

Pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$, on a :

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{BA}$ *est l'opposé de* $\overrightarrow{AB}$).



Exemple



Sur la figure ci-dessus, donner ;

■ Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;

■ Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;

■ Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

Solution

■ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{QK}$;

■ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$;

■ Vecteurs opposés à $\overrightarrow{AL}$: $-\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

b) Somme de vecteurs

Pour additionner des vecteurs, on utilise la relation de Chasles.

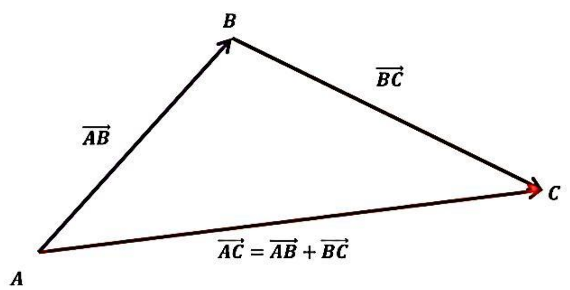
Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, on a :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *(Relation de Chasles).*

La relation de Chasles peut aussi s'écrire ;

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$.

En particulier ; $O \in \mathcal{P} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.



Exercice

Démontrer la deuxième écriture de la relation de Chasles.

Exemple

ABC est un triangle un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP}$ et $2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, déterminer les coordonnées de P et Q dans le repère $(B;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

Solution

$$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Rightarrow 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Rightarrow -3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow -7\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \boldsymbol{P}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}};\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\right)$$

$$2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BQ} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow -3\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \boldsymbol{Q}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$$

Exemple

Soit ABC un triangle non aplati, et soit M un point quelconque du plan tel que ;

$$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$$

En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

Solution

$$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}\ \text{colinéaire} \Rightarrow A, B\ et\ C\ \text{alignés}$$

c) Egalités vectorielles et configurations de base

1°/ Milieu et vecteurs

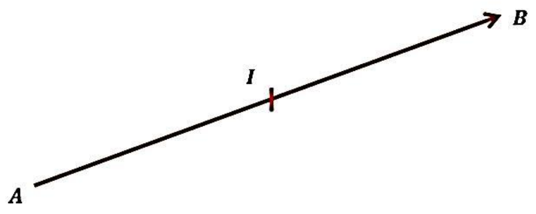
A°) Milieu d'un segment et vecteurs

Soit $[AB]$ un segment de milieu I, on a :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$.

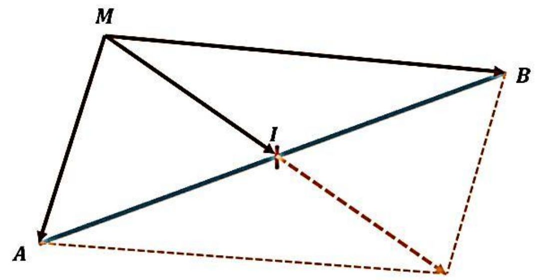
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$;

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$.



Exercice

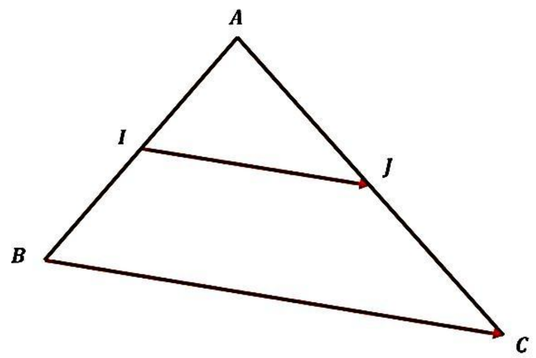
Démontrer la dernière propriété.

B°) Milieux des côtés d'un triangle et vecteurs

Soit ABC un triangle. I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ ;}$$

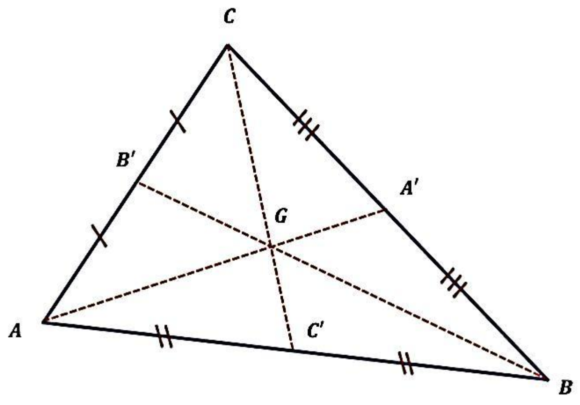
$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$$



Exercice

Démontrer la propriété précédente

2°/ Centre de gravité et vecteurs



Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

Et soit A' le milieu de $[BC]$, alors :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \ \boxed{\mathbf{1}};$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'} \ \boxed{\mathbf{2}};$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \ \boxed{\mathbf{3}}.$$

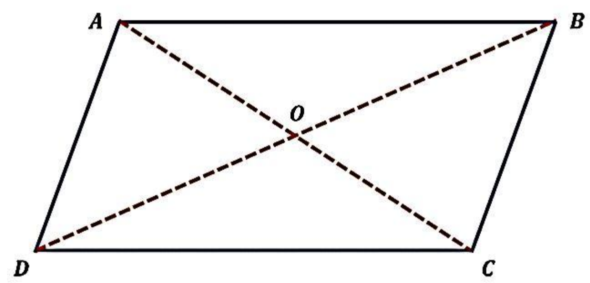
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \ \boxed{\mathbf{4}};$$

$$\forall\, M \in \mathcal{P} \ \Longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \ \boxed{\mathbf{5}}$$

Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

3°/ Parallélogramme et vecteurs



$ABCD$ est un parallélogramme de centre O ;

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}.$$

Exemple 1

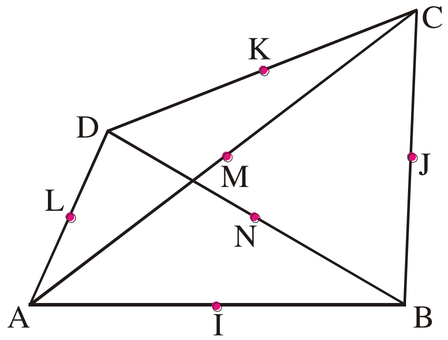
Soit $ABCD$ un quadrilatère. I; J; K; L; M; N les milieux respectives de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$; $[BD]$.

1) Démontrer que les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Solution

1) Dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;



Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Donc, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

Donc, $IJKL$ est un parallélogramme.

Donc $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.

Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$;

Dans le triangle BCD, on a : $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,

Donc ; $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{NJ}$;

Donc, $LMJN$ est un parallélogramme.

Donc $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

D'où les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2) On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

$$= 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK}) = 2(\vec{0}) = \vec{0}$$

Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Exemple 2

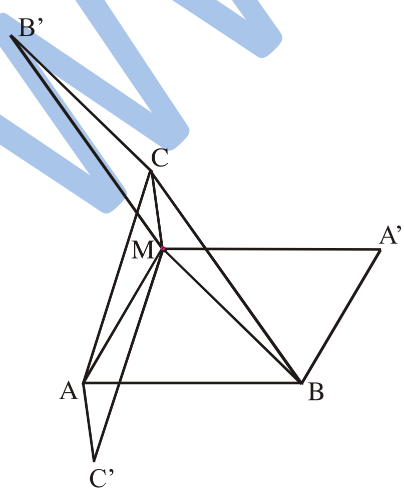
Soit ABC un triangle. M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).

1) Construire les points A' ; B' ; C' tels que $MABA'$; $MBCB'$; $MCAC'$ soient des parallélogrammes.

2) Démontrer que M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Solution

1) Construction



2) On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donc, M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exemple

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle ABC, D et E les points tels que ; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I le milieu de $[DE]$.

1° Faire une figure illustrant les données précédentes.

2° a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

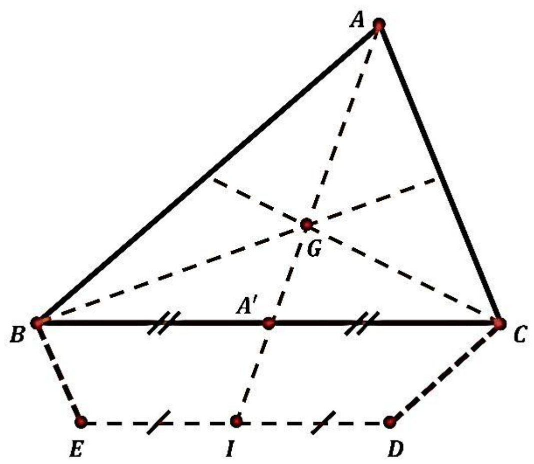
3° a) Démonter que les points A, A' et I sont alignés.

b) Démonter que le point G est le milieu de $[AI]$.

4° Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Solution

1°



2° a) Calculons $\overrightarrow{AI}$ par deux chemins :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \underbrace{\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$

3° a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{AI}}\ \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}=\mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}}\ \boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ on a ;

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AA'}\Longrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires $\Longrightarrow A, A'$ et I sont alignés.

b) G est le centre de gravité du triangle ABC et A' est le milieu de $[BC]$;

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\Longrightarrow \overrightarrow{AA'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

comme on a déjà $\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}\Longrightarrow \overrightarrow{AA'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

$\Longrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}\Longrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\Longrightarrow \boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}*\boldsymbol{I}$

4° on a ;

$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{ED}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Longrightarrow \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$\Longrightarrow (\boldsymbol{BC})//(\boldsymbol{ED})$

4° Configuration de Thalès-Milet et vecteurs

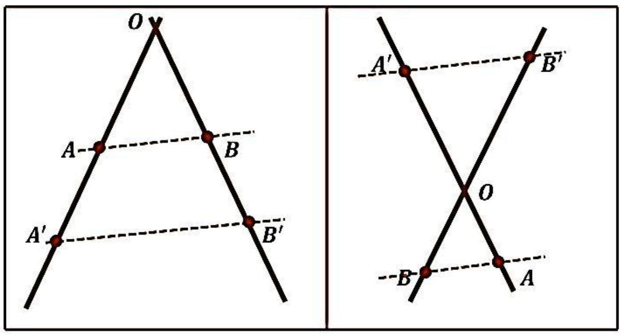
A/ Première version Thalès

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne les deux droites (AB) et $(A'B')$ sécante en O de sorte que ;

$$\overrightarrow{OA'}=x.\overrightarrow{OA}\ \ et\ \ \overrightarrow{OB'}=y.\overrightarrow{OB}$$

Alors ; les coefficients de colinéarité x et y sont égaux si et seulement si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Dans ce cas ; $\overrightarrow{A'B'}=x.\overrightarrow{AB}$



Démonstration

☒ $\boldsymbol{x = y} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OB} - x.\overrightarrow{OA}$

$= x.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = x.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow (\boldsymbol{A'B'})//(\boldsymbol{AB}).$

☒ $(\boldsymbol{A'B'})//(\boldsymbol{AB}) \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA}}\,\boxed{1}$$

D'autre part on a déjà ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{OB} - y.\overrightarrow{OA}}\,\boxed{2}$$

$x \neq k$ ou $y \neq k \Longrightarrow \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Donc $k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Remarque

1° Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ d'une part, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ d'autre part, sont de même sens, on a ;

$$x = \frac{OA'}{OA} \text{ et } y = \frac{OB'}{OB}$$

Sous ces conditions, on pourra énoncer :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB)//(A'B')$$

2° De même, lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraires, ainsi que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$;

$$x = -\frac{OA'}{OA} \text{ et } y = -\frac{OB'}{OB}$$

Sous ces conditions, on pourra énoncer :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB)//(A'B')$$

B/ Deuxième version Milet

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne le point O et les deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de sorte que $O \notin \mathcal{D}$ et $O \notin \mathcal{D}'$.

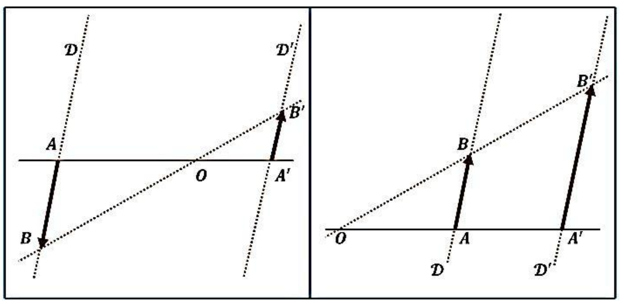
Soit A et B deux points de $\mathcal{D}$ et A' et B' deux points de $\mathcal{D}'$ tels que :

$$\overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA} \;\; et \;\; \overrightarrow{A'B'} = y.\overrightarrow{AB}$$

Alors les points O, B et B' sont alignés si et seulement si les coefficients de colinéarité x et y sont égaux.

Dans ce cas, on a aussi ;

$$\overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OB}$$



Démonstration

☒ **Supposons que $x = y$**

On a : $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OA} + x.\overrightarrow{AB} = x.\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = x.\overrightarrow{OB}$$

$\Longrightarrow O, B$ et B' sont alignés.

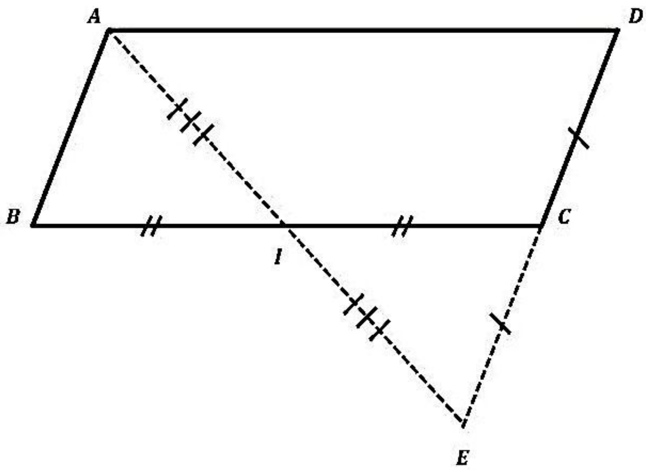
☒ **Inversement, lorsque O, B et B' sont alignés,** d'après la version 1 (*Thalès*), les trois coefficients de proportionnalité (*de $\overrightarrow{OA'}$ par rapport à $\overrightarrow{OA}$, de $\overrightarrow{OB'}$ par rapport à $\overrightarrow{OB}$, de $\overrightarrow{A'B'}$ par rapport à $\overrightarrow{AB}$*), sont égaux.

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et I le milieu de $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection de (AI) et (CD).

Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

Solution



$ABCD$ est un parallélogramme non aplati, alors

$$(AB)//(CD) \text{ et } \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}\ \boxed{1}$$

$$E \in (CD) \Longrightarrow (EC)//(AB)$$

$$\begin{cases} (EC)//(AB) \\ \quad et \\ I = B * C \end{cases} \Longrightarrow \frac{BI}{IC} = \frac{AI}{IE} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \\ \quad et \\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IE} \end{cases}$$

$\Longrightarrow I = A * E \Longrightarrow BACE$ est un parallélogramme

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}\ \boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \Longrightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} * \boldsymbol{E}$

d) Produit d'un vecteur par un réel

$$* \ \forall\, \vec{u} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \begin{cases} 0.\vec{u} = \vec{0} \\ 1.\vec{u} = \vec{u} \\ -1.\vec{u} = -\vec{u} \end{cases}$$

$$* \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \\ (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \\ \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{cases}$$

Exemple 7

1°/Sur la figure ci-dessous, compléter ;

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \cdots$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \cdots$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \cdots$;

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \cdots$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \cdots$; $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \cdots$; $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \cdots$.

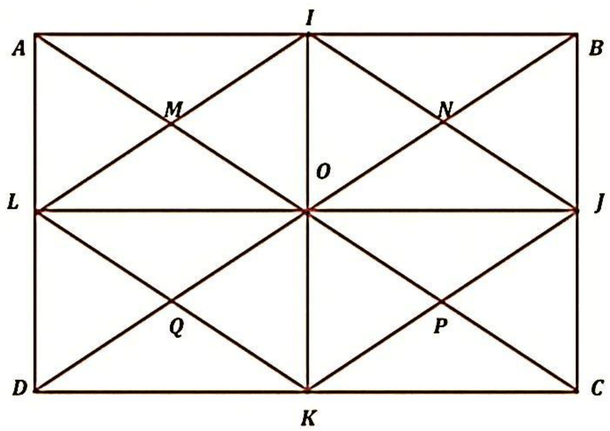
2°/ Compléter :

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\ldots J}$, $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ}$, $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots O} = \overrightarrow{DA}$.

3°/ compléter par le nombre qui convient ;

$\overrightarrow{DQ} = \cdots \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD} = \cdots \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ} = \cdots \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DB} = \cdots \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{CP} = \cdots \overrightarrow{AO}$.



Solution

1°/

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{AQ}$,

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI}$,

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO}$,

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK}$,

$\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{KI}$,

$\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CI}$.

2°/

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\ldots J} \Longrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NJ}$,

$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ} \Longrightarrow \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ}$,

$\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots O} = \overrightarrow{DA} \Longrightarrow \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{DA}$.

3°/

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4} \times \overrightarrow{DB}, \qquad \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{AP}, \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BO}$$

$$\overrightarrow{DB} = \frac{4}{3} \times \overrightarrow{DN}, \qquad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2} \times \overrightarrow{AO}.$$

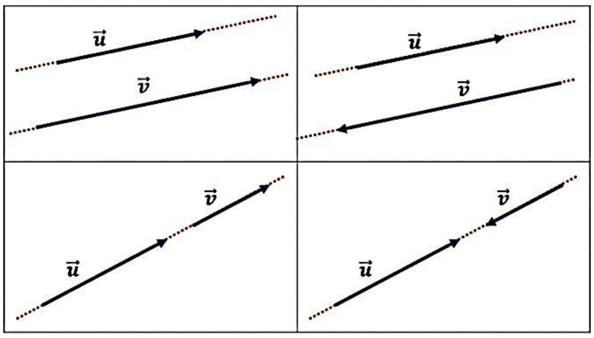
e) Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. C'est-à-dire, lorsqu'ils sont portés par deux droites parallèles ou par une même droite.

Autrement dit ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si ; $\vec{v} = k.\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On a	**Si et seulement si**
$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R}_+)$	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* *et de même sens*
$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R}_-)$	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* *et de sens contraires*



Remarque 1

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $0.\vec{u} = \vec{0}$. Le vecteur nul $(\vec{0})$ est colinéaire à tout vecteur.

On dit du vecteur nul $(\vec{0})$ qu'il a toutes les directions.

Remarque 2

Si deux vecteurs sont colinéaires, alors tout vecteur colinéaire à l'un est aussi colinéaire à l'autre.

a- Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$ et soit α et β deux réels.

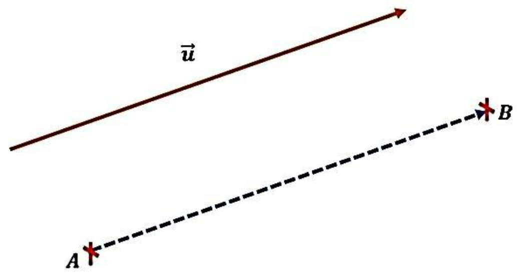
Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b- Norme d'un vecteur

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, et on la note $\|\vec{u}\|$, la distance entre deux points pris pour origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$.

C'est-à-dire que, si A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors ;

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$



Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a ;

$\|\vec{u}\| \geq 0$.

$\|\vec{0}\| = 0$ *et* $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k on a ;

$\|k.\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a ;

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice

Démontrer cette dernière propriété.

Exemple 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

1) Montrer que :

$\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2) On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Montrer que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Solution

1) On a : $\|\vec{w}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$

$\leq \|2\vec{u}\| + \|-3\vec{v}\|$

$\leq |2|\|\vec{u}\| + |-3|\|\vec{v}\|$

$\leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$

Donc, $\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbf{R}$.

Donc, $\vec{w} = 2\vec{u} + 3(k\vec{u}) = 2\vec{u} + (3k)\vec{u} = (2+3k)\vec{u}$

et $(2 + 3k) \in \mathbf{R}$.

Donc, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Donc ; les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont colinéaires.

c- Vecteur unitaire

On dit d'un vecteur $\vec{u}$ qu'il est unitaire lorsque ; $\|\vec{u}\| = 1$.

2. Base de $\mathcal{V}$ (*$\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs du plan*)

Définition

On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple ordonné $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires.

a) Projection vectorielle

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$.

Il existe un couple unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tels que ;

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1$ colinéaire à $\vec{\imath}$ et $\vec{u}_2$ colinéaire à $\vec{\jmath}$.

Le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$ et $\vec{u}_2$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\jmath}$ dans la direction de $\vec{\imath}$.

Définition

L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé projection vectorielle de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$.

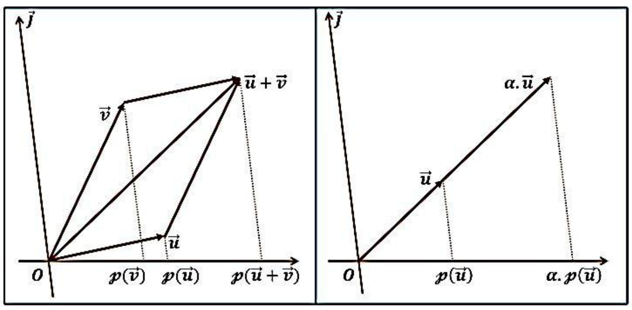
En général, on note $\wp$ une projection vectorielle, lorsque, aucune confusion sur les données n'est à craindre.

b) Propriété

Soit $\wp$ une projection vectorielle, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le réel α, on a :

$$\wp(\vec{u} + \vec{v}) = \wp(\vec{u}) + \wp(\vec{v}) \ \boxed{1}$$

$$\wp(\alpha.\vec{u}) = \alpha.\wp(\vec{u}) \ \boxed{2}$$



Exercice

Soit un triangle ABC, et E, F, D les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \ ; \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} \ ; \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

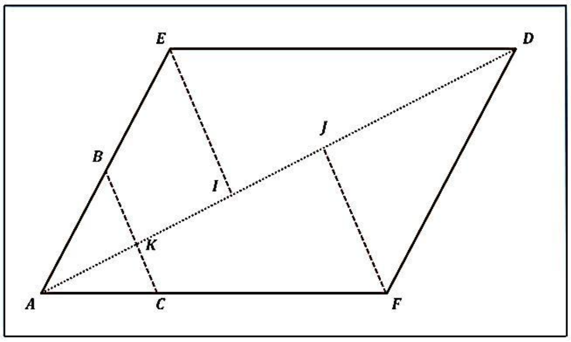
1° Les parallèles à (BC) passant par E et F coupent (AD) en I et J.

Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

2° On désigne par K le point d'intersection de (BC) et (AD).

Montrer que $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AK}$.

Solution



1° Soit p la projection vectorielle sur (AD) dans la direction de (BC)

On a ; $p(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD}$; $p(\overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AI}$; $p(\overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \Longrightarrow p(\overrightarrow{AD}) = p(\overrightarrow{AE}) + p(\overrightarrow{AF})$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}}$$

2°

$$\overrightarrow{AE} = 2.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow$$

$$p(\overrightarrow{AE}) = p(2.\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AI} = 2.p(\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{AF} = 3.\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$$

$$p(\overrightarrow{AF}) = p(3.\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AJ} = 3.p(\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = 2.\overrightarrow{AK} + 3.\overrightarrow{AK} = 5\overrightarrow{AK}$$

c) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Etant donné une base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{V}$ et un vecteur $\vec{w}$, il existe un seul couple (x, y) de réels appelées coordonnées de $\vec{w}$ tels que ; $\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$.

Exercice

Démontrer l'existence et l'unicité de ces coordonnées.

Définition

Les deux réels x et y sont les coordonnées ou composantes du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note ; $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})}$ ou $\vec{w}(x, y)$ ou $\vec{w}\left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$

d) Propriétés

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$, et α et β deux réels, on a les propriétés suivantes :

☒ $\boldsymbol{\vec{\imath} = 1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$;

☒ $\boldsymbol{\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$;

☒ $\boldsymbol{-\vec{\imath} = -1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\imath}\binom{-1}{0}}$;

☒ $\boldsymbol{-\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} - 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\jmath}\binom{0}{-1}}$;

☒ $\boldsymbol{\vec{0}\binom{0}{0}\ et\ \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0\ et\ y = 0}$;

☒ $\boldsymbol{\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'\ et\ y = y'}$;

☒ $\boldsymbol{-\vec{u}\binom{-x}{-y}}$;

☒ $\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}\binom{x + x'}{y + y'}}$;

☒ $\boldsymbol{\alpha\vec{u}\binom{\alpha x}{\alpha y}}$;

☒ $\boldsymbol{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\binom{\alpha x + \beta x'}{\alpha y + \beta y'}}$.

e) Déterminant de deux vecteurs

Définition

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ et on note $det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel défini par ;

$$\boldsymbol{det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

Exemple

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\binom{6}{-7}$ et $\vec{v}\binom{-5}{3}$, calculer $det(\vec{u}, \vec{v})$.

Solution

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - (-7) \times (-5) = 18 - 35 \Longrightarrow \boldsymbol{det(\vec{u}, \vec{v}) - 17}.$$

f) Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\boldsymbol{det(\vec{u}, \vec{v}) = 0}$.

Exemple

Dans une base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-7}$ et $\vec{v}\binom{-12}{21}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -7 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= (4 \times 21) - \big((-7) \times (-12)\big) = 84 - 84 = 0$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

g) Changement de base

Exercice

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$.

Par définition, $(\vec{u},\vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{V}$.

Démontrer alors que les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\vec{\boldsymbol{\imath}}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{b'}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \\ -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \end{pmatrix}\ ;\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}\begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{a'}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \end{pmatrix}$$

h) Conséquence

Exercice

Si un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées (x,y) dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, montrer alors que les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\vec{\boldsymbol{w}}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{b'x-a'y}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \\ \dfrac{\boldsymbol{ay-bx}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})} \end{pmatrix}$$

Application

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\binom{-7}{3}$, $\vec{v}\binom{5}{4}$ et $\vec{w}\binom{-2}{-1}$.

1°/ Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$

2°/ Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

3°/ Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

Solution

$$\mathbf{1}°/\ \det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-7)\times 4 - 3\times 5$$
$$= -28 - 15 = -43 \neq 0$$

Donc ; $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2°/ Les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans $(\vec{u},\vec{v})$ sont ;

$$\vec{\imath}\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{43} \\ \dfrac{3}{43} \end{pmatrix} ; \vec{\jmath}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{43} \\ \dfrac{7}{43} \end{pmatrix}$$

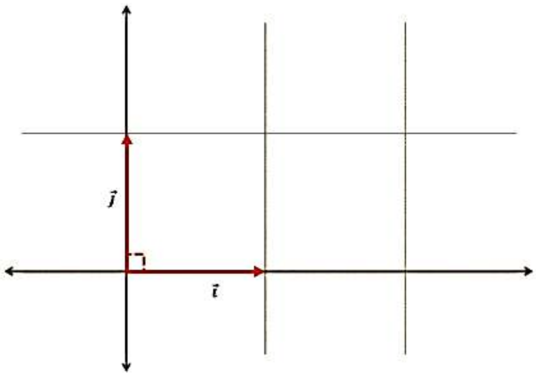
3°/ Les coordonnées de $\vec{w}$ dans $(\vec{u},\vec{v})$ sont :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} \dfrac{4\times(-2)-5\times(-1)}{-43} \\ \dfrac{-3\times(-2)+(-5)\times(-1)}{-43} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{43} \\ -\dfrac{11}{43} \end{pmatrix}$$

3. Base orthogonale, base orthonormale

Définition

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux (*de directions perpendiculaires*).



La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthonormée ou orthonormale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et unitaires.

C'est-à-dire ; $\vec{\boldsymbol{\imath}} \perp \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ et $\|\vec{\boldsymbol{\imath}}\| = \|\vec{\boldsymbol{\jmath}}\| = \mathbf{1}$.

a) Norme dans une base orthonormale

Dans une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ la norme de $\vec{u}$ est alors donné par ;

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}\,.$$

b) Vecteur unitaire adjoint à un vecteur

Dans une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix}$

est appelé vecteur unitaire adjoint au vecteur $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne le vecteur $\vec{u}\binom{3}{-5}$.

Donner la norme de $\vec{u}$ et les coordonnées de son vecteur unitaire associé.

Solution

La norme de $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.

Les coordonnées du vecteur unitaire associé $\overrightarrow{u'}$ sont :

$$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \dfrac{-5}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$$

Remarque

Un vecteur et son vecteur unitaire associé sont colinéaires.

4. Repère du plan

Définition

Soit O un point quelconque du plan. Et soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. Le triplet $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé un repère du plan. O est appelé point origine du repère.

Soit A, B et C trois points non alignés. Le triplet $(A; B, C)$ ou $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ forment un repère du plan.

a) Coordonnées d'un point dans un repère

Définition

Le point $M(x, y)$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie ; $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}.$$

Exercice

Soit $ABCD$ un rectangle.

On suppose que $AB = 7$ et $BC = 4$.

Soient E, F, G et H les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\ ;$$
$$\overrightarrow{GD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}\ .$$

Partie I : Outil analytique

1° Démontrer que $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

2° Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD})$

3° Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$, puis conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$

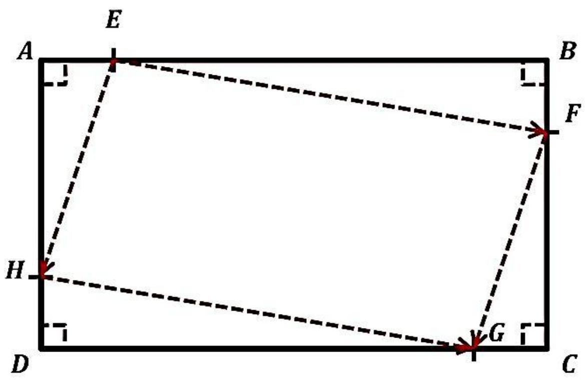
Partie II : Outil vectoriel

1° Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2° Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3° En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

Solution



Partie I : Outil analytique

1° $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan $\mathcal{P}$, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ constitue une base de $\mathcal{V}$, ce qui est le cas puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non nuls et non colinéaires.

2° Les coordonnées des points dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$:

$$A(0,0),\qquad B(1,0),\qquad C(1,1),\qquad D(0,1),$$
$$E\left(\frac{1}{7},0\right),\qquad F\left(1,\frac{1}{4}\right),\qquad G\left(\frac{6}{7},1\right),\qquad H\left(0,\frac{3}{4}\right)$$

3° Les composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$$

On en conclut que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Partie II : Outil vectoriel

$$\mathbf{1°}\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{2°}\ \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

3° Le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Remarque

Les trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si ; $\boldsymbol{det}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{AC}})=\mathbf{0}$.

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice

Soit $A(x_A,y_A)\ et\ B(x_B,y_B)$ donnés dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, montrer alors que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_B-x_A}\\ \boldsymbol{y_B-y_A}\end{pmatrix}.$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, sont donnés les points $A(-4,6)$ et $B(1,-5)$.

Calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$.

Solution

$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{1-(-4)}{-5-6} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{-11}}.$$

c) Coordonnées du milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$

Exercice

dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et I est le milieu de $[AB]$, monter alors que les coordonnées du point I sont données dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\boldsymbol{I}\left(\frac{\boldsymbol{x_A}+\boldsymbol{x_B}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{y_A}+\boldsymbol{y_B}}{\mathbf{2}}\right)$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-5,-4)$ et $B(9,-3)$.

Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Solution

Les coordonnées du milieu I d'un segment sont données par la relation ;

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-5+9}{2},\frac{-4+(-3)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{2},\frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{I}\left(\mathbf{2},\frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{2}}\right)$$

d) Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et soit G est le centre de gravité de ABC, montrer qu'alors les coordonnées du point G sont données dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{\boldsymbol{x_A}+\boldsymbol{x_B}+\boldsymbol{x_C}}{\mathbf{3}},\frac{\boldsymbol{y_A}+\boldsymbol{y_B}+\boldsymbol{y_C}}{\mathbf{3}}\right)$$

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(-4,12)$, $B(-9,-5)$ et $C(6,11)$.

Calculer les coordonnées du points G centre de gravité du triangle ABC.

Solution

Les coordonnées du point G sont données par la formule ;

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$$

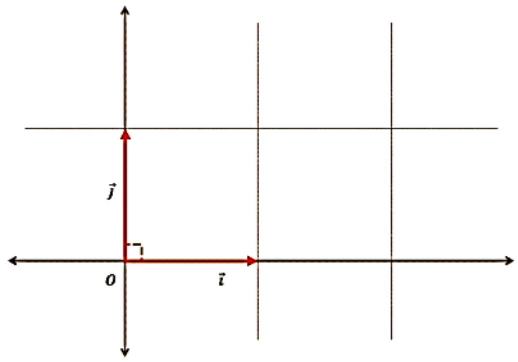
$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{(-4)+(-9)+6}{3} = -\dfrac{7}{3} \\ y_G = \dfrac{12+(-5)+11}{3} = \dfrac{18}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{G}\left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{3}}\right).$$

e) Repère orthogonal, repère orthonormé

Le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthogonale.

Soit O est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. Le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthonormé ou orthonormal si la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale.



f) Distance entre deux points A et B

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, montrer qu'alors la distance entre A et B est donnée par l'expression ;

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ soit les points $A(-13, 4)$ et $B(-7, 9)$, calculer AB.

Solution

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left((-7) - (-13)\right)^2 + (9 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} \Longrightarrow \boldsymbol{AB = \sqrt{61}}$$

g) Vecteurs orthogonaux dans une base

Exercice

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Monter que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ;

$$\boldsymbol{xx' + yy' = 0.}$$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Solution

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si $xx' + yy' = 0$.

$-12 \times 5 + (-6) \times (-10) = -60 + 60 = 0$.

Donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

5. Droites

a) Vecteur directeur

Définition

Soit une droite (D), tout vecteur non nul ayant la direction de (D), est un vecteur directeur de (D).

b) Droites parallèles, droites perpendiculaires

Soit deux droite (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$(D)//(D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$(D) \perp (D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Point appartenant à une droite

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit A un point de (D), $M \in (D)$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Soit A et B deux points distincts du plan ;

$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in [0,1]$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in \mathbb{R}$.

$M \in [AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in \mathbb{R}_+$.

d) Equation cartésienne d'une droite dans un repère

(D) est une droite si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, de la forme : $ax + by + c = 0$, avec a, b et c des réels tels que ; $(a,b) \neq (0,0)$.

Exemple 1

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6,-7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne de (D).

Solution

$M(x,y)$ est un point général de (D), signifie que ;

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-6\\y+7\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = \begin{vmatrix}x-6 & -3\\ y+7 & 4\end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow 4(x-6) + 3(y+7) = 0$$
$$\Rightarrow 4x - 24 + 3y + 21 = 0$$
$$\Rightarrow 4x + 3y - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{(D): 4x + 3y - 3 = 0}.$$

Exemple 2

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5,7)$ et $B(-6,9)$.

Donner une équation cartésienne de (D).

Solution

$M(x,y)$ est un point général de (D), signifie que ;

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Longrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-5 & -11 \\ y-7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 2(x-5)+11(y-7)=0$$

$$\Longrightarrow 2x-10+11y-77=0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D: 2x+11y-87=0}\ .$$

e) Coordonnées du vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne

La droite (D) : $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur ; $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Exemple

La droite (Δ) : $5x+6y-1=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-6}{5}$.

f) Forme réduite de l'équation d'une droite

Exercice

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, montrer que l'équation réduite d'une droite est de la forme ;

$$(D) : y = mx+p.$$

- ☒ m est appelé coefficient directeur de (D).
- ☒ p est appelé ordonnée à l'origine.
- ☒ $\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de (D).

g) Propriété

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit deux droites d'équations réduites ;

$$\begin{cases} (D) : y = mx+p \\ (D'): y = m'x+p' \end{cases}$$

$(D)//(D')$ si, et seulement si ; $m=m'$.

$(D)\perp(D')$ si, et seulement si ; $m.m'=-1$.

Exemple

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ;

$$(D): 4x-2y+6=0$$

$$(D'): x+2y-4=0$$

1° Donner les formes réduites des équations des deux droites ;

2° Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;

3° En déduire les positions relatives des deux droites ;

4° Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite :

$$(D''): y = -\frac{1}{2}x-5$$

Montrer que $(D')//(D'')$;

5° Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, représenter cette situation.

Solution

1° $(D): 4x - 2y + 6 = 0 \Longrightarrow 2y = 4x + 6$

$$\Longrightarrow y = \frac{4x+6}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = 2x + 3 \Longrightarrow \boldsymbol{(D): y = 2x + 3}$$

$$(D'): x + 2y - 4 = 0 \Longrightarrow 2y = -x + 4$$

$$\Longrightarrow y = \frac{-x+4}{2} = \frac{-x}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(D'): y = -\frac{1}{2}x + 2}$$

2° Les coefficients directeurs de (D) et (D') sont :

$$\boldsymbol{m = 2\,; \quad m' = -\frac{1}{2}}$$

3° $On\ a\,;\ m \times m' = 2 \times -\frac{1}{2} = -1 \Longrightarrow (D) \perp (D')$

4° $(D'') : y = -\frac{1}{2}x - 5 \Longrightarrow m'' = -\frac{1}{2}$

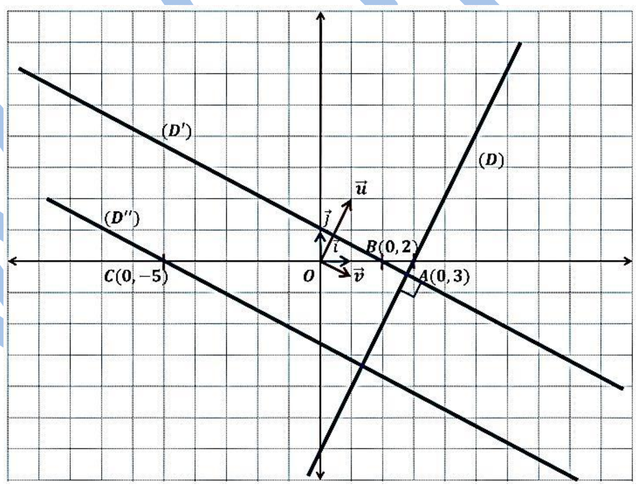
$$\boldsymbol{m' = m'' = -\frac{1}{2} \Longrightarrow (D')//(D'')}\,.$$

5° Représentation de la situation

La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $A(0,3)$.

La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(0,2)$.

La droite (D'') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $C(0,-5)$.



Exemple 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ})$.

1) Déterminer l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a) E d'équation cartésienne $x - a = 0$; $a \in \mathbb{R}$.

b) E d'équation cartésienne $y - a = 0$; $a \in \mathbb{R}$.

c) E d'équation cartésienne $y^2 - x^2 = 0$;

d) E d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$;

2) a) Déterminer une équation réduite de la droite (IJ).

b) Soit D la droite d'équation $y = x$. Montrer que D est la médiatrice de [IJ].

Solution

1) a) $x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Donc, E est la droite parallèle à (OJ) passant par le point de coordonnées (a ; 0).

b) $y - a = 0 \Leftrightarrow y = a$.

Donc, E est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées (0 ; a).

c) $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)\,(y + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ \text{ou} \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases}$

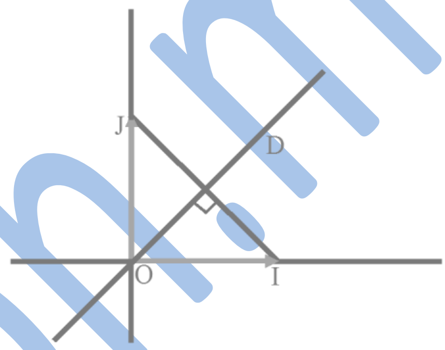
Donc ; E est la réunion des droites D_1 d'équation $y = x$ et D_2 d'équation $y = -x$.

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [(x-1)^2 - 1] + [(y+2)^2 - 4] + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (2)^2$.

Donc, E est le cercle d centre le point $\Omega(1 ; -2)$ et de rayon 2.



2) a) on a I(1 ; 0) et (J(0 ;1).

(IJ) : $y = mx + p$.

Avec $\begin{cases} p = 1 \\ m + p = 0 \end{cases}$

Donc, $p = 1$ et $m = -1$.

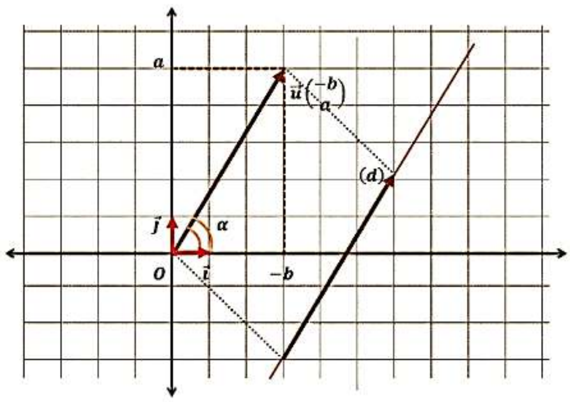
Donc ; (IJ) : $y = -x + 1$.

b) D : $y = x$. on a $(1)(-1) = -1$, donc $D \perp (IJ)$.

Or, OI = OJ et $O \in D$. Donc, D est la médiatrice de [IJ].

h) Interprétation géométrique du coefficient directeur

Le coefficient directeur d'une droite (D) est la valeur de la tangente de l'angle α que fait cette droite avec l'axe des abscisses.



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{\|\vec{u}\|}}{\frac{-b}{\|\vec{u}\|}} = -\frac{a}{b}$$

i) Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$. Le point $M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement s'il existe un réel t tel que ;

$$\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + at} \\ \boldsymbol{y = y_0 + bt} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit la droite $D(A;\ \vec{u})$ tels que $A(-5, 7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D.

Solution

Soit le paramètre t on a la représentation paramétrique de D: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x = -5 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 7 - 4t} \end{cases}$

j) Le vecteur normal

Définition

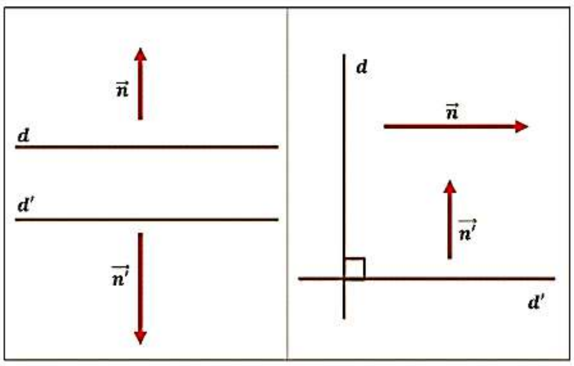
Soit une droite (D).

On appelle un vecteur normal à (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à (D).

a- Propriétés

Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$;

- $(D)//(D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.
- $(D) \perp (D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.



b- Propriété

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, et soit A un point de (D), alors ; Un point $M \in (D)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarque

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite $(D) : ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les droites d'équations cartésiennes :

$$(D) : -4x - 7y + 3 = 0\,;$$
$$(D') : \ 12x + 21y - 5 = 0;$$
$$(D'') : \ 7x - 4y + 1 = 0.$$

1° Donner les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n''}$ normaux respectivement aux droites $(D), (D')$ et (D'')

2° A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D)//(D')$ et que $(D) \perp (D'')$.

Solution

$$\vec{n}\binom{-4}{-7}; \ \overrightarrow{n'}\binom{12}{21} \ et \ \overrightarrow{n''}\binom{7}{-4}$$

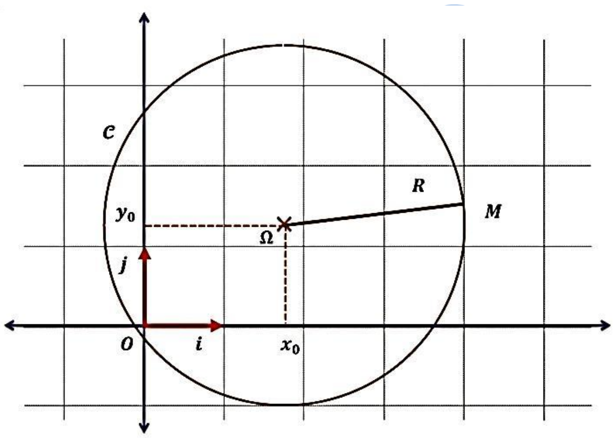
On a ; $(-4) \times 21 - (-7) \times 12 = 84 - 84 = 0$

$\Longrightarrow \vec{n}; \ \overrightarrow{n'}$ sont colinéaire, donc $(D)//(D')$.

On a ; $(-4) \times 7 + (-7) \times (-4) = -28 + 28 = 0$

$\Longrightarrow \vec{n}; \ \overrightarrow{n''}$ sont de directions orthogonales, donc $(D) \perp (D'')$.

6. Le cercle dans le plan



Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné, et soit R un nombre réel positif donné.

Une équation cartésienne de cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- ✧ $\mathcal{C} : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R.
- ✧ $\mathcal{C} : \ x^2 + y^2 = R^2$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon R.
- ✧ $\mathcal{C} : \ x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon 1.

Exemple 5

1) Soit $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ une base de **V.**

Soit $\vec{u} = 2\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

b) calculer det($\vec{u}\ ;\ \vec{v}$) dans la base ($\vec{i}\ ;\ \vec{j}$).

($\vec{u}\ ;\ \vec{v}$) est-elle une base de **V** ? Justifier.

2) On suppose que $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ est une base orthonormal et **V** le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que :

$x^2 + y^2 -2x -3 = 0.$

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ.

b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal $(\Omega ; \vec{i} ; \vec{j})$ où $\Omega(1 ; 0)$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Solution

1) a) $\vec{u} = 2\vec{i} = 2\vec{i} + 0\vec{j}$; donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$;

$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$; donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}$ = 2(1) –(0) (1) = 2.

Comme $\det(\vec{u} ; \vec{v}) \neq 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire,

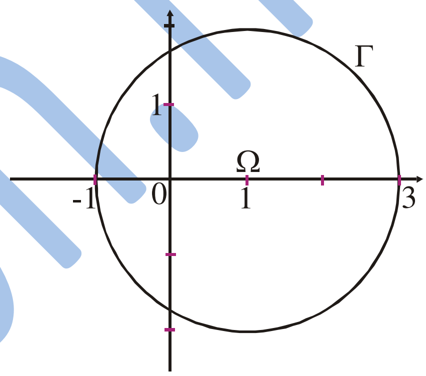
par conséquent, $(\vec{u} ; \vec{v})$ est une base de **V.**

2) a) $x^2 + y^2 -2x -3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 -2x -3 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = (2)^2.$



Donc, Γ est le cercle de centre le point $\Omega(1 ; 0)$ et de rayon 2.

b) $\Gamma : (x-1)^2 + (y-0)^2 = 4.$

M(x ; y) dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; M(X ; Y) dans $(\Omega ; \vec{i} ; \vec{j})$;

Donc $\begin{cases} X = x - 1 \\ y = y \end{cases}$;

Donc, l'équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega ; \vec{i} ; \vec{j})$ est $X^2 + Y^2 = 4$.

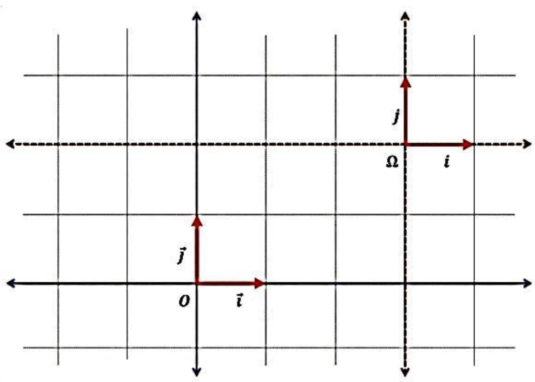
7. Changement d'un repère

a) (*Origine seulement*)

Dans ce repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné de $\mathcal{P}$.

$M(x, y)$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}) \Leftrightarrow M(X, Y)$ dans $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec ;

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}. \ En\ effet ;\ \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}.$$



b) (*Origine et base*)

Exercice

Soit un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$, et soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, et un point $\Omega(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$.

Par définition, le triplet $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ constitue une base de $\mathcal{P}$.

Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne le point $A(x_A, y_A)$, montrer que les coordonnées de A dans le nouveau repère $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\dfrac{(x_A - x_0)b' + (y_0 - y_A)a'}{det(\vec{u};\ \vec{v})}\\ \dfrac{(x_0 - x_A)b + (y_A - y_0)a}{det(\vec{u};\ \vec{v})}\end{pmatrix}$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et les deux points $A(-3, 7)$ et $B(-8, -2)$.

1° Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{P}$;

2° Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$;

3° Calculer les coordonnées du point A dans le repère $(B;\ \vec{u},\vec{v})$;

4° Calculer les coordonnées du point B dans le repère $(A;\ \vec{u},\vec{v})$.

Solution

1° Pour montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base, on a ;

$$Det(\vec{u};\ \vec{v}) = \begin{vmatrix}6 & 4\\-5 & 3\end{vmatrix} = 6\times 3 - (-5)\times 4 = 38$$

$\Longrightarrow Det(\vec{u};\ \vec{v}) \neq 0 \Longrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc, $(\vec{u};\ \vec{v})$ constitue une base du plan.

2° Coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$:

$$\begin{cases}\vec{\imath} = \dfrac{3}{38}\vec{u} + \dfrac{5}{38}\vec{v} \Longrightarrow \boldsymbol{\vec{\imath}}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{38}}\\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{38}}\end{pmatrix}\\ \vec{\jmath} = -\dfrac{4}{38}\vec{u} + \dfrac{6}{38}\vec{v} \Longrightarrow \boldsymbol{\vec{\jmath}}\begin{pmatrix}-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{38}}\\ \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{38}}\end{pmatrix}\end{cases}$$

3° Coordonnées de A dans le repère $(B;\ \vec{u},\vec{v})$:

$$A\begin{pmatrix}\dfrac{(x_A - x_B)b' + (y_B - y_A)a'}{38}\\ \dfrac{(x_B - x_A)b + (y_A - y_B)a}{38}\end{pmatrix} \Longrightarrow A\begin{pmatrix}\dfrac{3(-3+8) + 4(-2-7)}{38}\\ \dfrac{-5(-8+3) + 6(7+2)}{38}\end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}\left(-\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{38}};\ \frac{\mathbf{79}}{\mathbf{38}}\right)$$

4° Coordonnées de B dans le repère $(A;\ \vec{u},\vec{v})$:

$$B\begin{pmatrix}\dfrac{(x_B - x_A)b' + (y_A - y_B)a'}{38}\\ \dfrac{(x_A - x_B)b + (y_B - y_A)a}{38}\end{pmatrix} \Longrightarrow B\begin{pmatrix}\dfrac{3(-8+3) + 4(7+2)}{38}\\ \dfrac{-5(-3+8) + 6(-2-7)}{38}\end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{B}\left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{38}};\ -\frac{\mathbf{79}}{\mathbf{38}}\right)$$

Exemple 6

ABCD est un carré de centre O. M un point du segment [BD] qui se projette orthogonalement en P sur (AB) et Q sur (AD).

On se propose de montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

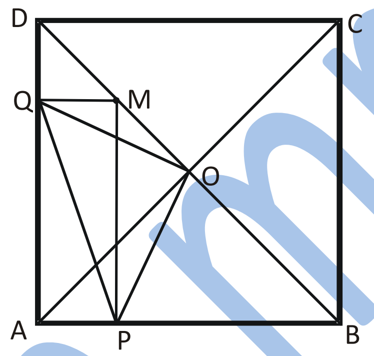
Le plan est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$) et on désigne par x l'abscisse du point M.

1) Exprimer en fonction de x l'ordonnée du point M.

En déduire les coordonnées des points P et Q.

2) a) Donner les coordonnés du point O.

b) Calculer OP^2 ; OQ^2 et PQ^2 ; conclure.



Solution

1) On a M $\in$ (BD).

Or B(1 ; 0) et D(0 ; 1).

Donc : l'équation réduite de (BD) est y = -x + 1.

Donc : l'ordonnée du point M est 1 – x.

Or ; les points P et M ont la même abscisse et les points Q et M ont la même ordonnée.

Donc ; P(x ; 0) et Q(0 ; 1 –x).

2) a) O$(\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2})$ (O milieu de [BD]).

b) $OP^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

$OQ^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 + (1 - x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - x)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - x + x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

$PQ^2 = (x - 0)^2 + (0 - 1 + x)^2 = x^2 + (x - 1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$

Comme $OP^2 = OQ^2$ et $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$.

Donc, le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercices généraux

Exercice 1

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.

Démontrer que ces deux triangles ont même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

2) ABC un triangle de centre de gravité G. A' ; B' ; C' les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ;[AB].

Montrer que G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

Exercice 2

ABC un triangle. I ; J ; K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \; ; \; \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$$

1) Faire une figure.

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

b) En déduire que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Exercice 3

ABC un triangle tel que AB = 5 ; AC = 6.

D est le symétrique de A par rapport au milieu de [BC].

1) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

b) Montrer que AD ≤ 11.

2) Soit E le symétrique de C par rapport à D.

Montrer que BE ≤ 11 et AE ≤ 16.

Exercice 4

Soit ($\vec{i}$; $\vec{j}$) une base de $\mathscr{V}$

1) Démontrer que : ($\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{j}$) ; ($2\vec{i}$; $2\vec{j}$) ; ($\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{i}+\vec{j}$) ; ($\vec{i}$; $-\vec{j}$) sont des bases.

2) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans ($\vec{i}$; $\vec{j}$).

a) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacune des bases ($\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{j}$) ; ($2\vec{i}$; $2\vec{j}$) ; ($\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{i}+\vec{j}$) ; ($\vec{j}$; $-\vec{j}$).

b) Calculer det ($\vec{u}$; $\vec{v}$) dans chacune des bass.

c) Montrer que si det ($\vec{u}$; $\vec{v}$) = 0 dans l'une de ces bases alors, det ($\vec{u}$; $\vec{v}$) = 0 dans les autres bases.

Exercice 5

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan. Soit D la droite d'équation : 2x – 3y + 1 = 0.

1) Les points suivants appartiennent- ils à D.

A(1 ; 1) ; B($\frac{1}{2}$; $\frac{-1}{3}$) ; C(0 ; $\frac{1}{3}$) ; D(-1 ; 3).

2) Donner :

a) u vecteur directeur de D.

b) l'équation réduite de D.

c) une droite D' parallèle à D.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) . Soit D la droite d'équation y = 3x -2.

1) Donner :

a) le coefficient directeur de D.

b) un vecteur directeur de D.

2) donner :

a) une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point A(0 ; 4).

b) une équation de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par le point B(0 ; 1)..

3) tracer D ; D' et D''.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Placer les points A(3 ; 2) ; B(0 ; 3) ; C(-2 ; 0).

2) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme, puis déterminer les coordonnées de son centre I.

3) Soit G et H les centres de gravités respectifs des triangles ABC et ACD.

Déterminer les coordonnées de G et H.

b) Montrer que I est milieu de [GH].

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). A ; B ; C trois points de coordonnées respectives :

(a_1 ; a_2) ; (b_1 ; b_2) ; (c_1 ; c_2).

I ; J ; K sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA].

1) Exprimer les coordonnées des points I ; J ; K à l'aide des réels a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2. *

2) Démontrer que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Placer les points : A(2 ; 0) ; B(-1 ; $\sqrt{3}$)

C(-1 ; -$\sqrt{3}$) .

2) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

Exercice 10

ABCD un carré. BCE et CDF sont deux triangles équilatéraux respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de ABCD.

On se propose de montrer que les points A, E , F sont alignés. On considère le repère (B ; C ; A).

1) Quelles sont les coordonnées des points A ; B ; C ; D ?

2) Calculer les coordonnées des points E et F.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.Calcule det($\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AF}$) et conclus.

Exercice 11

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan. Déterminer les équations des droites suivantes puis représente ces droites.

1°) la droite D_1 est la droite (AB) avec A(1 ; 2) ; B(-2 ; 1).

2°) la droite D_2 est la droite (AC) avec A(1 ; 2) ; C(1 ; -2).

3°) la droite D_3 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

4°) la droite D_4 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{i}$.

5°) la droite D_5 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{j}$.

Exercice 12

La droite D a pour équation 2x + 3y -1 = 0 dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Donner, pour D, les précisions suivantes :

a) un vecteur directeur
b) un vecteur directeur dont la première coordonnée est 1.
c) un vecteur directeur dont la seconde coordonnée est -3.
d) deux points
e) l'équation réduite.
f) le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Exercice 13

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormal du plan, et les points A(-3 ; 1) ; B(-2 ; -2) et C(5 ; $\frac{1}{2}$).

Soit D le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

Déterminer les coordonnées de D et faire la figure.

Le parallélogramme ABCD est-il un rectangle.

Vérifier l'égalité $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

Détermine et construis l'ensemble Γ des points M(x ; y) tels que : $x^2 + y^2 - 10x - y + 25 = 0$.

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit D_m la droite d'équation $y = x + 1 - m^2$ où $m \in \mathbf{R}$.

Soit M_n le point de coordonnées $(2^n ; 2^{2+n}\sqrt{2})$ où $n \in \mathbf{N}$.

1). a) que peut-on remarquer sur la direction de D_m ?

b) Déterminer les valeurs de m, pour lesquelles D_m passe par O.

2) Montrer que le point M_n appartient à une droite fixe passant par O.

VIII- BARYCENTRE

Faire savoir

Le cours

1. Barycentre d'un système de deux points

Physiquement, on appelle barycentre G d'un ensemble de points pesants, le point d'équilibre de cet ensemble de points.

Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

a) Point pondéré

Définition

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, et soit α un nombre réel. La notation $A(\alpha)$ ou $(A;\ \alpha)$ signifie que le point A est affecté du coefficient α, ou que le point pondéré A est affecté de la masse α.

Exemple 1

$(A, 5)$; $(B, -3)$; $(C, 2)$; $\left(D, -\frac{3}{4}\right)$; $(E, 0)$; $(F, \sqrt{2})$

Sont des points pondérés.

b) Barycentre de deux points

Définition

Soit A et B deux points du plan $\mathcal{P}$.

Et soit α et β deux nombres réels tels que ; $\alpha + \beta \neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ;

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Le point G est appelé barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β.

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système des deux points pondérés ; $A(\alpha); B(\beta)$ ou $\{(A, \alpha);\ (B, \beta)\}$.

c) Propriété

Le point G est le barycentre de deux points A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β si et seulement si ;

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

d) Notations

G est barycentre de A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β se note ;

$G = bar\{(A;\ \alpha), (B;\ \beta)\}$,

Ou encore ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

Exemple 2

$$Soit\ G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

e) Construction du barycentre G de deux points

Exercice

Montrer que ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$

Remarque

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$.

Dans le repère $(B;\ \overrightarrow{BA})$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$.

Exemple 3

A et B sont deux points distincts.

Soit $F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 5 & 7 \\ \hline\end{array}$

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$.

Solution

$$F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 5 & 7 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{7}{5+7}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \Rightarrow F\left(\frac{7}{12}\right)$$

Exemple 4

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$$E = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 4 & 5 \\ \hline\end{array}$$

$$F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -10 & -6 \\ \hline\end{array}$$

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline\end{array}$$

-8	1

Solution

$E = bar$

A	B
4	5

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{E}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)$

$F = bar$

A	B
-10	-6

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{-6}{-16}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{F}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\right)$

$G = bar$

A	B
-8	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{-7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{G}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right)$

Exemple 5

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = bar$

A	B
3	2

$G = bar$

A	B
-5	4

$H = bar$

A	B
11	-6

Solution

$F = bar$

A	B
3	2

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow F\left(\frac{2}{5}\right)$

$G = bar$

A	B
-5	4

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{-1}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow G(-4)$

$H = bar$

A	B
11	-6

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-6}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow H\left(-\frac{6}{5}\right)$

f) Méthodes de construction du barycentre de deux points

a- Méthode de l'abscisse

$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ $\quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

$$\Longrightarrow G \in (AB), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$G\ a\ pour\ abscisse\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ dans\ le\ repère\ (A;\ \overrightarrow{AB})$$

Exemple 6

Construisons le point $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$

Solution

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

b- Méthode du parallélogramme

Soit $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$

et soit P un point du plan $\mathcal{P}$ tel que ; $P \notin (AB)$ on définit les points P_1 et P_2 par ;

$$\overrightarrow{PP_1} = \alpha\overrightarrow{PA}\ et\ \overrightarrow{PP_2} = \beta\overrightarrow{PB}$$

Soit S le point tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2}$ et PP_1SP_2 est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{PS} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{PG} \Longrightarrow G \in (PS)$$

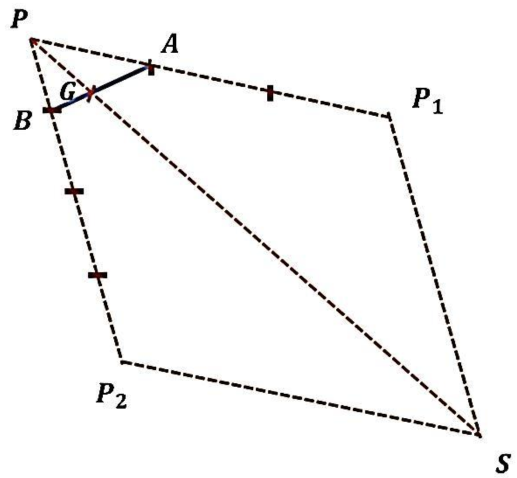
Or, $G \in (AB) \Longrightarrow G = (AB) \cap (PS)$

Exemple 7

En utilisant la méthode du parallélogramme, construire le point ;

$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$

Solution



Exemple 8

Soit [AB] un segment.

1) Construire le point G = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 3 & 2 \end{array}$.

2) « **Méthode du parallélogramme** »

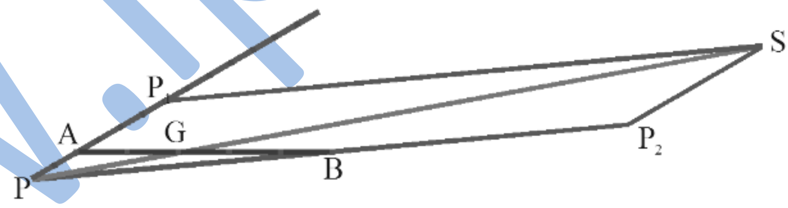
Soit P un point non situé sur la droite (AB). P_1 et P_2 les points tels que : $\overrightarrow{PP_1} = 3\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{PB}$.

S le point tel que PP_1SP_2 est un parallélogramme.

Montrer que G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).

Solution

1) G = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 3 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.



2) G = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 3 & 2 \end{array}$; Donc G $\in$ (AB).

Or, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PG}$.

Donc, le point G $\in$ (PS).

D'où G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).

c- Méthode des parallèles

Cette méthode consiste à ;

- Tracer le segment $[AB]$,
- Choisir un vecteur unité $\vec{u}$,
- Sur les droites $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$, tracer les deux vecteurs $\beta\vec{u}$ et $-\alpha\vec{u}$ respectivement à partir des points A et B,
- Joindre les deux extrémités des deux vecteurs $-\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{v}$, soit P_1 et P_2 leurs extrémités respectives.

Le point de concours des deux droites (AB) et (P_1P_2) est le point G barycentre du système

Justification

Construisons le point $G = bar$

A	B
α	β

Sur les droites parallèles $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$, construisons les points P_1 et P_2 définis par ;

$$\overrightarrow{AP_1} = \beta\vec{u} \Longrightarrow \vec{u} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1} \quad \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{BP_2} = -\alpha\vec{u} \Longrightarrow \vec{u} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1} = \boxed{2} \Longrightarrow \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2} \Longrightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} = -\beta\overrightarrow{BP_2}$$

$$\Longrightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} + \beta\overrightarrow{BP_2} = \vec{0}.$$

$$\Longrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_1}\right) + \beta\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP_2}\right) = \vec{0}.$$

$$\Longrightarrow \alpha\overrightarrow{AG} + \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{BG} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}.$$

Comme ; $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$,

$$\Longrightarrow \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}.$$

$\Longrightarrow G = bar$

P_1	P_2
α	β

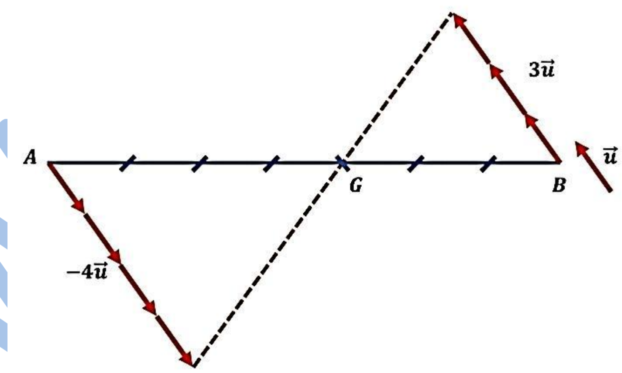
$$\Longrightarrow G \in (P_1P_2) \Longrightarrow G = (AB) \cap (P_1P_2).$$

Exemple 9

Construire le point $G = bar$

A	B
3	4

Solution



g) Existence et unicité de G

Le point $G = bar$

A	B
α	β

existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta \neq 0$.

La relation ; $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ établit l'existence et l'unicité de G.

h) Lien vectoriel du barycentre G de deux points

L'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ implique que $G \in (AB)$

$G = bar$

A	B

$\Longleftrightarrow G, A$ *et* B *sont alignés*

α	β	$\Leftrightarrow G \in (AB)$

i) L'ensemble des barycentres de A et B génère la droite (AB).

Soit A et B deux points distincts ; la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des deux points A et B.

Autrement dit ; $\forall\ M \in (AB)$ ils existent deux réels α et β tels que ;

$$M = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \quad \text{Avec, } \alpha + \beta \neq 0$$

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

Remarque

Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'exprimer comme barycentre des deux autres.

$\boldsymbol{on\ a}$	$\boldsymbol{Si, et\ seulement\ si}$
$\alpha = 0$	$G = B$
$\beta = 0$	$G = A$
$\alpha\beta > 0$ (*α et β sont de même signe*)	$G \in [AB] \setminus \{A, B\}$
$\alpha\beta < 0$ (*α et β sont de signes contraires*)	$G \in (AB) \setminus [AB]$
$\alpha\beta < 0\ (\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert)$	$G \in [BA) \setminus]AB[$
$\alpha\beta < 0\ (\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert)$	$G \in [AB) \setminus]AB[$

Remarques

- Si $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$

Avec $\alpha > \beta > 0$, alors ; G est plus proche de A que de B.

- Si $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$

Avec $\beta > \alpha > 0$, alors ; G est plus proche de B que de A.

j) Opérations conservant le barycentre G

Théorème de l'homogénéité (*Proportionnalité du barycentre*)

En multipliant ou en divisant les coefficients α et β par un même nombre réel non nul k, le barycentre G est conservé ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline k.\alpha & k.\beta \\ \hline\end{array} \quad \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} \\ \hline\end{array} \quad \boxed{\mathbf{2}}$$

Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

Exemple 10

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 9 & 6 \\ \hline\end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline\end{array}$$

Propriété

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha' & \beta' \\ \hline\end{array} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

Exercice

Démontrer la propriété précédente

Propriété 2

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow A = bar \begin{array}{|c|c|}\hline G & B \\ \hline \alpha + \beta & -\beta \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow B = bar \begin{array}{|c|c|}\hline G & A \\ \hline \alpha + \beta & -\alpha \\ \hline\end{array}$$

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

k) Isobarycentre de deux points

On définit l'isobarycentre de deux points comme le barycentre de deux points affectés du même coefficient non nul, c'est –à-dire ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline\end{array} \ ; \ \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{2\alpha}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G = A * B$$

G est isobarycentre de A et B si, et seulement si ;

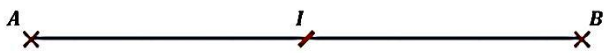
$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$I = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$[AB]$ a pour milieu I $\Leftrightarrow$ $\quad A = bar \begin{array}{|c|c|}\hline I & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$

$$B = bar \begin{array}{|c|c|}\hline I & A \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$



Exercice

Démontrer la propriété précédente

l) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, et soit α et β deux nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$.

Si	***Alors***
$\alpha + \beta \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$ Avec $G = bar\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$
$\alpha + \beta = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = -\alpha\overrightarrow{AB}$ f est constante ; (indépendante de M)

m) La projection conserve le barycentre

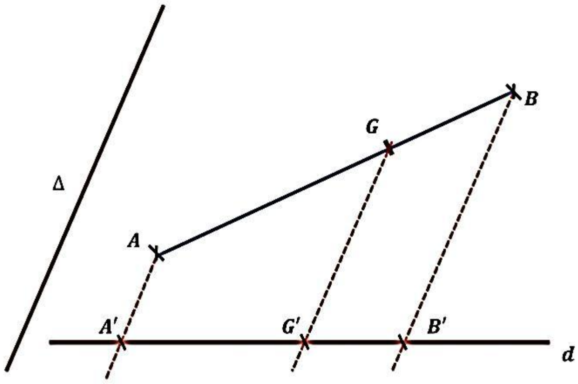
La projection conserve le barycentre ; c'est-à-dire ;

Si $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$

Et A', B' et G' sont les projetés respectifs de A, B et G. Sur la droite (d) parallèlement à (Δ).

Alors ; $G' = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A' & B' \\ \hline \end{array}$

	α	β



n) Caractérisation du barycentre

Propriété

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et G est le barycentre du système $\{(A, \alpha);\ (B, \beta)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$, que l'on peut écrire ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{MB}}$$

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

2. Barycentre d'un système de trois points

Définition

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

Et soit α, β et γ trois nombres réels tels que ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ;

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Le point G est appelé barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ.

a) Propriété

Le point G est le barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ si et seulement si ;

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Remarque

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système de points pondérés $A(\alpha); B(\beta); C(\gamma)$ ou $\{(A, \alpha);\ (B, \beta);\ (C, \gamma)\}$.

b) Notations

G est barycentre du système (A, α) ; (B, β) et (C, γ) se note ;

$G = bar\{(A;\ \alpha), (B;\ \beta), (C;\ \gamma)\}$,

Ou encore ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

Exemple 11

$Soit\ G = bar$

A	B	C
8	4	-5

$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

c) Comment construire le barycentre G de trois points

a- Méthode des coordonnées

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}}$$

Exemple 12

ABC est un triangle non aplati.

En utilisant la méthode des coordonnées, construire les points E et F tels que ;

$E = bar$

A	B	C
3	2	1

$F = bar$

A	B	C
-2	3	1

Solution

$E = bar$

A	B	C
3	2	1

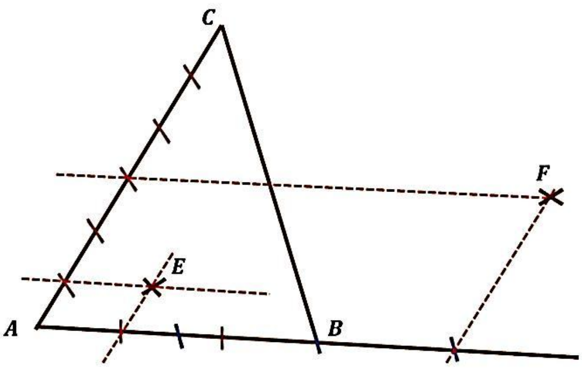
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$F = bar$

A	B	C
-2	3	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Construction



Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

Remarque

Dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, G a pour coordonnées ;

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}, \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}}\right)$$

b- Méthode du barycentre partiel

(*Associativité du barycentre*)

G est conservé lorsqu'on remplace deux points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline H & C \\ \hline \alpha+\beta & \gamma \\ \hline\end{array}$$

$$Avec\ \alpha+\beta \neq 0\ et\ H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

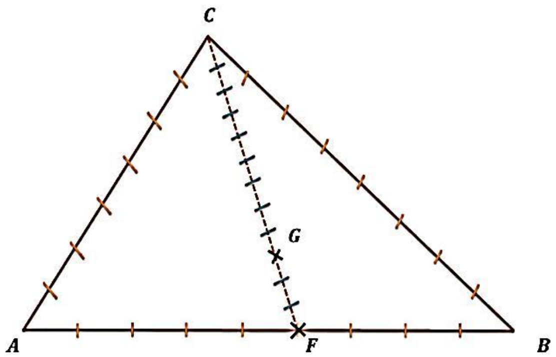
Exemple 13

Soit $G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 4 & 5 & 3 \\ \hline\end{array}$

Construire le barycentre G.

Solution

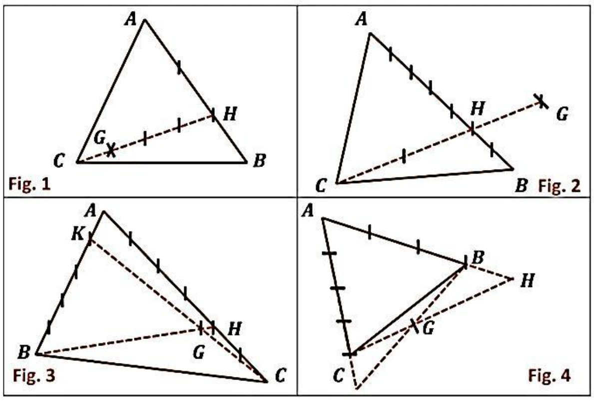
Soit $F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 4 & 5 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline F & C \\ \hline 9 & 3 \\ \hline\end{array}$



c- Savoir reconnaître un barycentre de trois points

Exemple 14

Etant donné les figures suivantes, exprimer G comme barycentre de A, B et C.



Solution

Fig. 1 :

$H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$ et $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & H \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array}$

$\Longrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & H \\ \hline 9 & 3 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boldsymbol{G = bar} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{9} \\ \hline\end{array}$

Fig. 2 :

$H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 5 \\ \hline\end{array}$ et $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & H \\ \hline \frac{-7}{3} & 7 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow$

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 5 & \frac{-7}{3} \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boldsymbol{G = bar} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{6} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{-7} \\ \hline\end{array}$

Fig. 3 :

$H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$ et $K = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 4 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$\Longrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline B & H \\ \hline \beta & 6 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & K \\ \hline \gamma & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\beta}{1} = \frac{4}{\gamma} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = \frac{1}{2}}} \quad et \quad \boxed{\boldsymbol{\gamma = 8}}$$

$$\Longrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 8 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 4 & 1 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{16} \\ \hline \end{array}$$

Fig. 4 :

$$K = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline -1 & 5 \\ \hline \end{array} \text{ et } H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline B & K \\ \hline \beta & 4 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & H \\ \hline \gamma & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{\beta}{4} = \frac{5}{\gamma} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = 4}} \quad et \quad \boxed{\boldsymbol{\gamma = 5}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \hline \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \hline \end{array}$$

d) Existence et unicité de G

Le point $G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$

existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'égalité ;

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{CB}$$

Etablit l'existence et l'unicité du barycentre G.

e) Lien vectoriel du barycentre G de trois points

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \qquad (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

$\Leftrightarrow G, A, B \; et \; C \; sont \; coplanaire \Leftrightarrow G \in (ABC)$

$\boldsymbol{on\ a}$	$\boldsymbol{Si, et\ seulement\ si}$

<table>
<tr><td colspan="2">$\alpha = \beta = 0$</td><td>$G = C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha = \gamma = 0$</td><td>$G = B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta = \gamma = 0$</td><td>$G = A$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha = 0$</td><td>$G \in (BC)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta = 0$</td><td>$G \in (AC)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\gamma = 0$</td><td>$G \in (AB)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">ABC un triangle non aplati</td><td>$\alpha + \beta = 0$</td><td>G appartient à la parallèle à (AB)passant par C</td></tr>
<tr><td>$\alpha + \gamma = 0$</td><td>G appartient à la parallèle à (AC)passant par B</td></tr>
<tr><td>$\beta + \gamma = 0$</td><td>G appartient à la parallèle à (BC)passant par A</td></tr>
<tr><td>α, β et γ du
Même signe</td><td>G est à l'intérieur du triangle ABC</td></tr>
<tr><td>Deux seulement de α, β et γ sont du même signe</td><td>G est à l'extérieur du triangle ABC</td></tr>
</table>

f) Opérations conservant le barycentre G

Théorème de l'homogénéité (*Proportionnalité du barycentre*)

En multipliant ou en divisant les coefficients α, β et γ par un même nombre réel non nul k, le centre de gravité G est conservé ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Leftrightarrow G = bar$

A	B	C
$k.\alpha$	$k.\beta$	$k.\gamma$

$\Leftrightarrow G = bar$

A	B	C
$\frac{\alpha}{k}$	$\frac{\beta}{k}$	$\frac{\gamma}{k}$

Exercice

Démontrer cette propriété.

Propriété 1

$$bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline \end{array} \text{ avec}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

Exercice

Démontrer cette propriété.

Propriété 2

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ A = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & B & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\beta & -\gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ B = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & A & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ C = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & A & B \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\beta \\ \hline \end{array}$$

g) L'ensemble des barycentre de trois points non alignés A, B et C, génère le plan (ABC).

Soit A, B et C trois points distincts et non alignés ; le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des trois points A, B et C.

Autrement dit ; $\forall\, M \in (ABC)$ ils existent trois réels α, β et γ tels que ;

$$M = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \text{ Avec, } \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

Exercice

Démontrer cette propriété.

h) Caractérisation du barycentre de trois points

a- Propriété

Soit (A,α), (B,β) et (C,γ)trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et G le barycentre du système ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$, que l'on peut écrire ;

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$$

Exercice

Démontrer cette propriété.

Exemple 15

Soit $G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

i) Isobarycentre de trois points

Définition

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$ avec ; $\alpha \neq 0$

Alors, G est appelé isobarycentre des points A, B et C, appelé aussi centre de gravité du triangle ABC.

a- Propriété

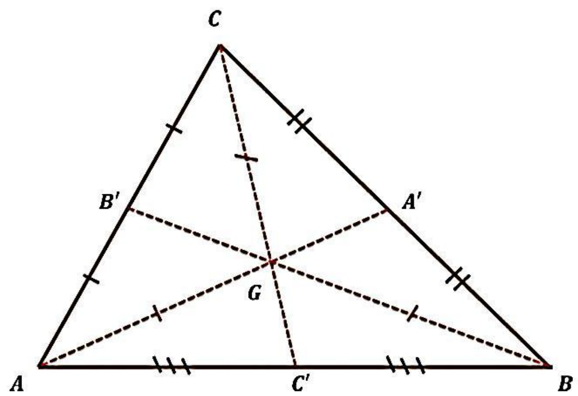
G est centre de gravité de ABC si, et seulement si ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Tel que ; $A' = B * C,\ B' = A * C,\ C' = A * B$.

$$\Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & A' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline B & B' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline C & C' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$



j) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, et soit α, β et γ trois nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

Si	***Alors***
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$, avec $G = bar\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

	$= \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$ $= \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ f est constante ; (indépendante de M)

Exemple 16

ABC un triangle; I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 2 \end{array}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) et (JA) se coupent en G.
Les droites (BG) et (AC) se coupent en K.

1) Faire une figure.
2) a) Déterminer des réels α ;β ; γ tels que G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

b) Déterminer α_1 ;β_1 ; γ_1 tels que G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{array}$ et $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$.

3) Déterminer la position du point K sur la droite (AC).
4) Déterminer et construire les ensembles :

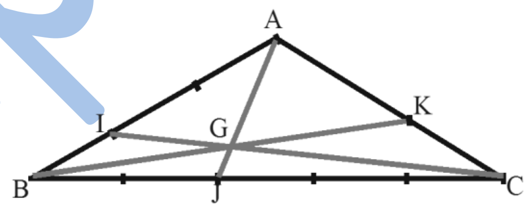
a) Δ des points M du plan tels que :

$$\left\|5\overrightarrow{MA} + 10\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|9\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\right\|$$

b) Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{13}{3}\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$$

Solution



1) I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ 3 & 2 \end{array}$

2) a) G $\in$ (IC) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c} I & C \\ 3 & \gamma \end{array} \Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 2 & \gamma \end{array}$

G $\in$ (JA) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c} A & J \\ \alpha & 5 \end{array} \Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \alpha & 3 & 2 \end{array}$

Donc, $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{2} = \frac{2}{\gamma}$; d'où $\alpha = \frac{3}{2}$.

Donc G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \frac{3}{2} & 3 & 2 \end{array} \Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & 6 & 4 \end{array}$

b) G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & 6 & 4 \end{array}$ et $3 + 6 + 4 = 13$

Donc, G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \frac{3}{13} & \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{array}$ et $\frac{3}{13} + \frac{6}{13} + \frac{4}{13} = \frac{13}{13} = 1$

3) G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & 6 & 4 \end{array}$. Soit N = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ 3 & 4 \end{array}$

On a N $\in$ (AC) et G = bar $\begin{array}{c|c} N & B \\ 7 & 6 \end{array}$

Donc N $\in$ (AC) et N $\in$ (BG)
D'où N = K ; donc K = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ 3 & 4 \end{array}$.

4) a) on a I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 5 & 10 \end{array}$ et J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ 9 & 6 \end{array}$ .Donc, M $\in \Delta$ si, et seulement si, $\left\|15\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|15\overrightarrow{MJ}\right\|$

$\Leftrightarrow$ IM = MJ.

Donc, Δ est la médiatrice du segment [IJ]

b) On a G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 3 & 6 & 4 \end{array}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CI}$

donc M $\in \Gamma$ si, et seulement si, $\left\|13\overrightarrow{MG}\right\| = \dfrac{13}{3}\left\|3\overrightarrow{CI}\right\|$.

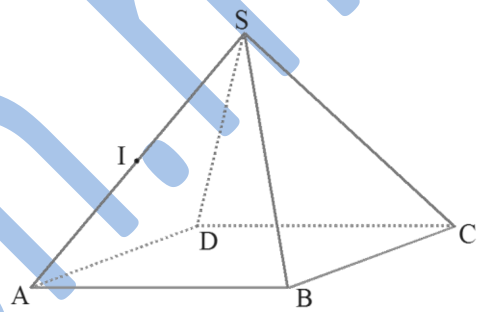
$\Leftrightarrow$ MG = IC. Donc, Γ est le cercle de centre G et de rayon IC.

Alignement

Exemple 17

SABCD une pyramide de base un parallélogramme ABCD. I est le milieu de [SA] ; G est le centre de gravité du triangle BDS. Démontrer que les points I ; G ; C sont alignés.

Solution



Comme ABCD est un parallélogramme, alors, C = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ -1 & 1 & 1 \end{array}$

Donc, C = bar $\begin{array}{c|c|c|c|c} A & S & S & B & D \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

Or, bar $\begin{array}{c|c} A & S \\ -1 & -1 \end{array}$ = I et bar $\begin{array}{c|c|c} S & B & D \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ = G.

Donc, C = bar $\begin{array}{c|c} I & G \\ -2 & 3 \end{array}$ d'où les points I; G ; C sont alignés.

Droites concourantes

Exemple 18

ABCD un tétraèdre. G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_4 les centres de gravité respectifs des triangles ABC ; ABD ; ACD ; BCD. Démontrer que les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes.

Solution

On a : G_1= bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_2 = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_3 = bar $\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_4 = bar $\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$.

Soit G = bar $\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

On a : G = bar $\begin{array}{c|c} G_1 & D \\ 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_2 & C \\ 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_3 & B \\ 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_4 & A \\ 3 & \end{array}$

Donc; G $\in (G_1D)$; G $\in (G_2C)$; G $\in (G_3B)$; G $\in (G_4A)$.
Donc, les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes en G.

k) Sommets d'un parallélogramme et barycentre

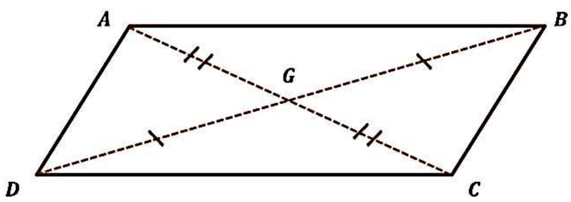
$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ;

$A = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$ $\quad B = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$

$C = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & D \\ \hline \end{array}$ $\quad D = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array}$

-1	1	1

1	-1	1



$G = bar$

A	B	C
1	1	-1

Si , et seulement si ;

Les point A, B, C et G sont les sommets d'un parallélogramme, dont G et C en sont des sommets opposés.

Exercice

Démontrer ces égalités.

I) Barycentre et géométrie analytique

Coordonnées du barycentre dans un repère

a- De deux points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

Si $G = bar$

A	B
α	β

$(\alpha + \beta \neq 0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A et B)

Exemple 19

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les deux points $A(5;\ -7)$ et $B(3; 4)$ tels que ;

$G = bar$

A	B
3	4

Calculer les coordonnées de G.

Solution

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{3 \times 5 + 4 \times 3}{3 + 4} = \dfrac{27}{7} \\ y_G = \dfrac{3 \times -7 + 4 \times 4}{3 + 4} = \dfrac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G\left(\frac{27}{7};\ \frac{-5}{7}\right)}$$

b- De trois points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

Si $G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A, B et C)

Exercice

Démontrer ces résultats.

Exemple 20

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(2;\ -3), B(-4;\ -5)$ et $C(6;\ -2)$ tels que ;

Si $G = bar$

A	B	C
7	-8	10

$(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$;

Solution

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{7 \times 2 - 8 \times (-4) + 10 \times 6}{7 - 8 + 10} = \dfrac{106}{9} \\ y_G = \dfrac{7 \times (-3) - 8 \times (-5) + 10 \times (-2)}{7 - 8 + 10} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G}\left(\mathbf{\frac{106}{9}}; \mathbf{\frac{4}{9}}\right)$$

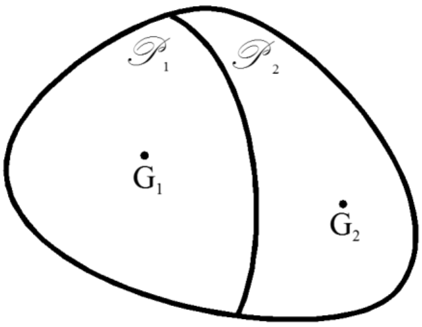
Remarque

Pour montrer que trois points distincts sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'écrire comme barycentre des deux autres.

3. Centre d'inertie d'une plaque homogène

a) Principes généraux

Soit P une plaque d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie I de la plaque est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. *(C'est donc un barycentre d'une infinité de points)*. Il s'agit d'une notion mathématique difficile à définir. Cependant, il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque homogène grâce aux propriétés suivantes (*admise à notre niveau*).

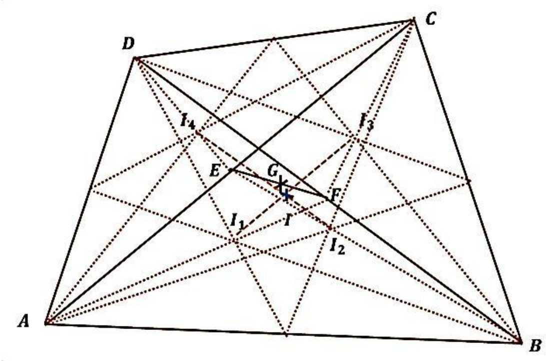


On donne quelques principes utilisés en physique concernant les centres d'inertie des plaques homogènes :

a) Cas simples

- Le centre d'inertie d'une tige homogène est le point milieu de cette tige.

- Le centre d'inertie d'une plaque homogène triangulaire est le centre de gravité des sommets de ce triangle.
- **Attention !** Le centre d'inertie d'une plaque quadrilatère $ABCD$ est, en général différente de l'isobarycentre des sommets A, B, C et D.



b) Principes de symétrie

- Si la plaque admet un centre de symétrie I, le centre d'inertie est le point I.
- Si la plaque admet comme axe de symétrie la droite Δ, le centre de symétrie est sur la droite Δ.

c) Principes de juxtaposition et de décomposition

- Le centre d'inertie d'une juxtaposition de morceaux de tiges homogènes est le barycentre des centres d'inertie de ces morceaux de tige.
- Si une plaque P_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'inertie I_2, alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie le barycentre G du système $(I_1,\ a_1)$ et $(I_2,\ a_2)$. Comme les plaques sont homogènes, leurs aires a_1 et a_2 sont proportionnelles à leurs masse m_1 et m_2, on a donc aussi *(d'après l'homogénéité des coefficients)* ;
  $G = bar\{(I_1,\ m_1);\ (I_2,\ m_2)\}$.
- Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en deux plaques $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, alors le centre d'inertie G de la plaque $\mathbb{P}$ est le barycentre du système $\{(G_1, m_1);\ (G_2, m_2)\}$ où la plaque $\mathbb{P}_1$ a pour masse m_1 et pour centre d'inertie G_1, la plaque $\mathbb{P}_2$ a pour masse m_2 et pour centre d'inertie G_2.
- Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en plusieurs plaques, on lui applique le même principe.

Exercices généraux

Exercice 1

Construire le point $G = bar$

A	B
3	-2

Exercice 2

A et B sont deux points distincts.

Soit $F = bar$

A	B
2	1

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$.

Exercice 3

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$E = bar$

A	B
2	3

$F = bar$

A	B
-2	-3

$G = bar$

A	B
-2	3

Exemple 4

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = bar$

A	B
2	5

$G = bar$

A	B
-3	5

$H = bar$

A	B
4	-1

Exercice 5

Construisons le point $G = bar$

A	B
-2	3

Exercice 6

Construire le point $G = bar$

A	B
-3	2

Exercice 7

Soit le triangle ABC.

On considère $G = bar$

A	B	C
1	1	2

Construire G

Exercice 8

ABC est un triangle non aplati.

$G = bar$

A	B	C

	1	2	3

Construire G en utilisant la méthode des coordonnées de G dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, puis en utilisant la méthode de l'associativité (*barycentre partiel*).

Exercice 9

Soit ABC un triangle non aplati. En utilisant la méthode des barycentres partiels, construire le barycentre G du système $\{(A,3);\ (B,4);\ (C,5)\}$.

Problème d'alignement

Exercice 10

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de centre de gravité respectifs G et G'.

1) Montrer que ; $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$
2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $G = G'$.

Exercice 11

ABC est un triangle non aplati. I, J et K sont des points tels que ;

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\ \ et\ \ \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$$

1) Faire une figure ;
2) Démontrer que les droites (AJ),(BK) et (CI) sont concourantes.

Exercice 12

Soit ABC un triangle non aplati.

Et soit $I = bar$

A	B
1	2

Et $J = bar$

B	C
-1	3

Et $K = bar$

A	C
1	-6

1° Placer les points $I, J\ et\ K$;

2° Montrer que (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes.

Exercice 13

ABC est un triangle non aplati de centre de gravité le point G.

Soit $I = B * C$. La parallèle à (BC) passant par G coupe (AC) en E.

1° Placer le point D tel que ; $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

2° Montrer que ; $E = bar$

A	C
1	2

3° Montrer que $B = A * D$

4° Montrer que ; $I = bar$

A	D	C
1	1	2

En déduire que D, I et E sont alignés, puis préciser la position de I sur (DE).

Exercice 14

ABC est un triangle non aplati. D, E et F sont des points définis par les relations ;

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$.

1° a) Exprimer D, E et F sous forme de barycentres ;

b) Placer D, E et F sur la figure ;

2° a) Montrer que D, E et F sont alignés ;

b) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;

c) En utilisant le résultat $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{CD}$,

Montrer que ; $B = bar$

C	D	E
3	2	1

3° (EB) coupe (CD) en G, préciser la position de G sur (CD).

Exercice 15

Soit ABC un triangle non aplati. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A.

Soit $I = A * C$ et J le point tel que ;

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

1) Démontrer que D, I et J sont alignés ;
2) Faire une figure.

Exercice 16

ABC est un triangle non aplati.

I est le point tel que ;

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

D est le symétrique de B par rapport à A.

(BI) et (CD) se coupent en G.

La parallèle à (AB) menée de C coupe (BI) en H.

1) Faire une figure ;
2) A°/ Déterminer les réels α, β et γ tels que ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

B°/ Déterminer x, y et z tels que ;

$H = bar$

A	B	C
x	y	z

Utilisation du barycentre pour résoudre des problèmes et dans les démonstrations

Problème de concours de droites

Exercice 17

ABC est un triangle non aplati, les points P, Q et R sont tels que ;

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\ ; \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}\ ; \qquad \overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les droites (AQ) ; (BR) et (CP) sont concourantes.

Problème de parallélisme de droites

Exercice 18

ABC est un triangle non aplati, les points E et F sont définis par ;

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}\ ; \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Parallélisme de trois droites

Exercice 19

ABC est un triangle non aplati.

On donne $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.

1°/ Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est indépendant du choix du point M.

2°/ Soit $P = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ $\quad Q = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 1 & -3 \\ \hline \end{array}$

$$R = bar \begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline 2 & -3 \\ \hline \end{array}$$

Montrer que les droites ; (AR); (BQ) et (CP) sont parallèles.

Exercice 20

$ABCD$ est un carré de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

On pose ;

$P = (AJ) \cap (DI)$; $\qquad Q = (AJ) \cap (BK)$

$R = (CL) \cap (BK)$; $\qquad S = (CL) \cap (DI)$

1°/ A) Faire une figure

B) Exprimer P comme ;

- **a)** Barycentre de A et J,
- **b)** Barycentre de D et I,
- **c)** Barycentre de A, B et C,
- **d)** Barycentre de A, B et D,

2°/ Exprimer Q comme ;

- **a)** Barycentre de A et J,
- **b)** Barycentre de B et K,
- **c)** Barycentre de A, B et C,
- **d)** Barycentre de B, C et D,

3°/ Peut-on exprimer P, Q, R ou S comme barycentres des points A, B, C et D ?

4°/ En utilisant le point O, montrer que $PQRS$ est un carré.

Fonction vectorielle de Leibniz

Détermination du lieu géométrique

Exercice 21

ABC est un triangle non aplati.

1) Construire les points

$E = bar$

A	B	C
2	3	-1

$F = bar$

A	B	C
3	-2	1

2) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M tels que ;

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3) Déterminer et construire l'ensemble Π des point M tels que ;

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 4.$$

Exercice 22

Soit A, B et C trois points fixés du plan $\mathcal{P}$.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe les fonctions vectorielles ;

$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

Et $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1°/ Calculer $\overrightarrow{f(A)}, \overrightarrow{f(B)}$ et $\overrightarrow{f(C)}$,

2°/ Soit $G = bar$

A	B	C
2	3	-1

Calculer $\overrightarrow{f(G)}$,

3°/ Exprimer $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$,

4°/ Soit $F = bar$

A	B	C
1	3	1

Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

$\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$,

5°/ Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

$\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = AB$ et $\left\|\overrightarrow{g(M)}\right\| = BC$.

Exemple 23

$ABCD$ est un carré de côté 5cm. On définit les fonctions suivantes ;

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$$

1°/ Déterminer ; $\overrightarrow{f(A)}, \overrightarrow{f(B)}, \overrightarrow{f(C)}$ et $\overrightarrow{f(D)}$,

2°/ Déterminer $\overrightarrow{f(O)}$, O centre du carré,

3°/ Déterminer ; $\overrightarrow{g(A)}, \overrightarrow{g(B)}, \overrightarrow{g(C)}$ et $\overrightarrow{g(D)}$,

4°/ Soit $G = bar$

A	B	C	D
2	-1	4	-1

Déterminer $\overrightarrow{g(G)}$,

5°/ Déterminer puis construire les ensembles suivants ;

$$E_1 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = 10\sqrt{2}$$

$$E_2 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = 10$$

$$E_3 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$$

6°/ Faire une figure.

Barycentre et géométrie analytique

Exercice 24

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ et $C(2, -4)$ et soit les points ;

$$P\left(\frac{11}{6}, 0\right); Q\left(8, \frac{-11}{2}\right); \mathrm{R}(-5, -7).$$

1°/ Montrer que ; $P = bar$

A	B	C
1	2	3

2°/ Montrer que ; $Q = bar$

A	B	C
-2	1	3

3°/ Montrer que ; $R = bar$

A	B	C
1	-1	1

4°/ Quelle est la nature du quadrilatère $ABCR$?

Exercice 25

Etant donné un triangle ABC non aplati et un réel k, on considère les points $A'; B'\ et\ C'$ tels que ;

$$\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA'} = k\overrightarrow{CA}\,.$$

Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 26

On se donne un triangle ABC non aplati et un point O vérifiant ;

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}\ et\ OA = OB = OC.$$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral en montrant que les médianes sont aussi les médiatrices.

Exercice 27

On se donne un triangle ABC non aplati.

Pour tout point M de $\mathcal{P}$ on pose ;

$$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

1° P désignant un point quelconque de $\mathcal{P}$, prouver que ;

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)}\ (f\ constante)$$

2° Construire G_1 barycentre de $(B;\ -3)\ et\ (C;1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{G_1A}$.

3° Construire G_2 barycentre de $(A;\ 2)\ et\ (C;1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{BG_2}$.

4° On désigne par G_3 le barycentre de $(B;\ -3)\ et\ (A;2)$. Montrer que les droites ;

(AG_1) ; $(BG_2)\ et\ (CG_3)$ sont parallèles.

5° En déduire une construction de G_3.

Exercice 28

Etant donné un triangle ABC non aplati, construire les points I, J et K définis par ;

- I est le barycentre de $(A\,;2)\ et\ (C\,;1)$;
- J est le barycentre de $(A\,;1)\ et\ (C\,;2)$;
- K est le barycentre de $(C\,;1)\ et\ (B\,;-4)$.

1° Démontrer que B est le barycentre de $(K\,;3)\ et\ (C\,;1)$.

2° Quel est le barycentre de $(A\,;2), (K\,;3)\ et\ (C;1)$?

3° Déduire du 2° que I, J, K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.

4° L étant le milieu de $[CI]$, et M celui de $[KC]$, démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B, C.

Exercice 29

On se donne deux points A et B distints, deux réels α et β $(\alpha + \beta \neq 0\ et\ \beta \neq 0)$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul. I est le barycentre de $(A;\ \alpha)\ et\ (B;\ \beta)$.

1° M_0 étant un point fixé, construire N_0 tel que I soit le barycentre de $(M_0;\ \alpha)\ et\ (N_0;\ \beta)$.

2° Un point M décrit la droite Δ passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On désigne par N les point tel que I soit le barycentre de $(M;\ \alpha)\ et\ (N;\ \beta)$.

Quel est l'ensemble des points N ?

Exercice 30

1° On désigne par ABC un triangle non aplati et par G le barycentre de $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$

$$(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$$

Donner les coordonnées de G dans le repère (A,B,C).

2° Un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (A,B,C). Déterminer α,β *et* γ de façon que M soit le barycentre $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ et que $\alpha+\beta+\gamma=1$.

3° Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points G barycentres de $(A;\alpha),(B;2\alpha),(C;1-3\alpha)$ lorsque α décrit $\mathbb{R}$?

4° Donner l'équation de $\mathcal{D}$ dans le repère (A,B,C).

Exercice 31

Dans chacun des cas suivants, construire les barycentres indiqués.

1) [AB] un segment ; G = bar

2) [AB] un segment ; I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 2 & -1 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ -1 & 2 \end{array}$

Montrer que les segments [AB] et [IJ] ont même milieu G.

3) ABC un triangle ; I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ -2 & 3 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ 1 & 4 \end{array}$

K = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ 1 & -2 \end{array}$

Exercice 32

Soit A et B deux points du plan. Construire les points suivants :

G_1 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 2 \end{array}$, G_2 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ -3 & 2 \end{array}$; G_3 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & -3 \end{array}$

Exercice 33

Exprimer le point G comme barycentre des points A et B dans chacun des cas :

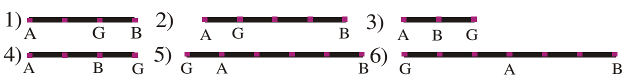
$1)\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ 4)\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ 7)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$2)\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}\ ;\ 5)\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\ 8)3\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

$3)\overrightarrow{AG}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}\ ;6)\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ 9)\text{-}2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

Exercice 34

Dans les cas suivants exprimer G comme barycentre des points A et B.



Exercice 35

ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BJ}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

1) Faire une figure.

2) Compléter les tableaux :

$$I=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline & \end{array}\ ;\quad J=\text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline & \end{array}\ ;\quad K=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline & \end{array}$$

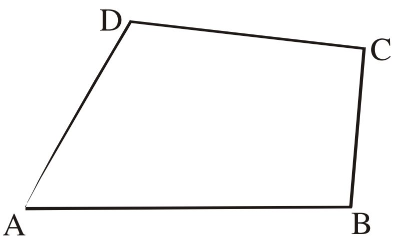
Exercice 36

ABC trois points tels que : $5\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$

1) Exprimer A comme barycentre des points B et C.

2) Exprimer B comme barycentre des points A et C.

3) Exprimer C comme barycentre des points A et B.



Placer le point G sachant qu'il est barycentre des points A et C d'une part et des points B et D d'autre part.

Justifier.

Exercice 37

A et B deux points distincts, déterminer le réel x dans chacun des cas :

1) $\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array}=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 10 & x \end{array}$

2) $\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array}=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline x+2 & x-3 \end{array}$

1) $\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array}=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 10 & x \end{array}$

3) $\text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2x+1 & x-3 \end{array}$ est le milieu de [AB].

Exercice 38

A et B deux points distincts donnés dans le plan. D est une droite dans le plan ;

Déterminer l'ensemble (E) des barycentre des points A et B, appartenant à D.

Exercice 39

ABC un triangle ; I milieu de [AB].

$H = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$; $Z = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$

1) Faire une figure.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ZAH.

Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 40

ABC un triangle I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 3 \end{array}$

K = bar $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & -2 \end{array}$

Les droites (AJ) et (BK) se coupent en G_1

Les droites (AJ) et (CI) se coupent en G_2

Les droites (BK) et (CI) se coupent en G_3.

Placer les points cités sur une figure.

Exprimer chacun des points G_1 ; G_2 ; G_3 comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 41

ABCD un quadrilatère dans le plan. G est l'isobarycentre des points ABC. O est l'isobarycentre des points A ; B ; C ; D.

Montrer que les points O ; G ; D sont alignés.

Exercice 42

ABC un triangle. I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -1 & 3 \end{array}$

K = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & -6 \end{array}$

1) Placer les points cités sur une figure.

2) Démontrer que les droites (IC) ; (JA) et (KB)

sont concourantes.

Exercice 43

ABC un triangle non aplati. I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

J = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

Les droites (IC) et (JB) se coupent en G.

On muni le plan du repère (A ; B ; C).

1) a) Donner les coordonnées de chacun des points

A ; B ; C ; I ; J.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (IC) et (JB).

c) en déduire les coordonnées du point G.

2) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 44

ABC un triangle. D est symétrique de A par

rapport au milieu de [BC]. I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

La parallèle à (AD) passant par B coupe (IC) en G.

1) Faire une figure.

2) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

3) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|$.

Exercice 45

Soit A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{MG}$ ou G est un point à préciser.

1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$; 4) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB}$

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; 5) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

3) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$; 6) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

Exercice 46

Soit A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, déterminer le vecteur indiqué dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$; 3) $3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$; 4) $-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$

Exercice 47

ABC un triangle. t est un réel.

Soit G_t le barycentre du système $\{(A ; 2t+1) ; (B ; -t) ; (C ; 1)\}$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le point G_t est défini.

2) Le point G_t peut-il être

a) l'un des sommets du triangle ABC ?

b) situé sur l'une des droites (AB) ; (AC) ; (BC) ?

c) centre de gravité de ABC ?

3) Construire G_0 ; G_{-1} ; G_1

Exercice 48

ABC un triangle. m un réel.

On pose :

$G_m = \text{bar}\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ m)\ ;\ (C\ ;\ -m)\}$

$H_m = \text{bar}\{(A\ ;\ 1-2m);(B\ ;\ m);\ (C\ ;\ m)\}$

1) a) Montrer que les point G_m et H_m existent

pour toute valeur de m.

Que peut-on dire des points G_0 et H_0.

b) Pour $m \neq 0$, peut-on avoir $G_m = H_m$?

2)a) Déterminer et construire le lien géométrique du point G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer et construire le lien géométrique du point H_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

IX- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Faire savoir

Le cours

1. Notion de fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. f est une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathcal{D}$, signifie que f est un procédé qui permet d'associer à tout réel $x \in \mathcal{D}$, un réel unique y noté $f(x)$.

a) Notations et expressions

On note ; $f : x \longmapsto y = f(x)$ ou $f(x) = y$.

On lit "*y est l'image de x par f*" ou, "*f associe à x le réel y*".

y est appelé image de x,

x est appelé antécédent y.

Exemple 1

A. Dans cet exercice on demande de traduire les phrases suivantes par des égalités du type $\boldsymbol{f}$(a) =b.

a) Un antécédent de 5 par $\boldsymbol{f}$ est -2.
b) L'image de 3 par $\boldsymbol{f}$ est nulle.
c) La courbe C_f passe par le point A(1 ; 4).
d) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

B. Soit $\boldsymbol{f}(x) = -x^2 + 2x - 1$ et $\boldsymbol{g}(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

a) Pour chacune des deux fonctions, calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.
b) Peut-on calculer l'image de 1 pour les deux fonctions ?
c) Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Solution

A. $\boldsymbol{f}(-2) = 5$; $\boldsymbol{f}(3) = 0$; $\boldsymbol{f}(1) = 4$; $\boldsymbol{f}(-3) = 0$;

B. a) $\boldsymbol{f}(0) = -0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$; $\boldsymbol{f}(-2) = -2^2 + 2 \times (-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$;

$\boldsymbol{f}(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2 \times (-\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}$.

$\boldsymbol{g}(0) = \dfrac{2\times 0-3}{0-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$; $\boldsymbol{g}(-2) = \dfrac{2\times(-2)-3}{(-2)-1} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$;

$$\boldsymbol{g}(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3)}{(2-1)} = 1-\sqrt{2}$$

b) $\boldsymbol{f}(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$; donc 1 est un élément de D_f.
Par contre, on ne peut pas calculer $\boldsymbol{g}(1)$, car $\boldsymbol{g}(1)$ n'existe pas et par conséquent 1 n'est pas un élément de D_g.

c) Il suffit de résoudre les équations $\boldsymbol{f}(x) = 1$ et $\boldsymbol{g}(x) = 1$.
$\boldsymbol{f}(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$, cette dernière égalité est impossible, donc 1 n'a pas d'antécédent par $\boldsymbol{f}$.
$\boldsymbol{g}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$, donc les antécédents de 1 par $\boldsymbol{g}$ sont les éléments du singleton $\{-4\}$.

Le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble de définition de f ou domaine de définition de f noté aussi $\mathcal{D}_f$.

On peut noter ;

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

N. B. *Pour des raisons pratiques, dans tout ce chapitre, nous dirons fonction lorsqu'il s'agit de fonctions numériques à variables réelles.*

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction f est en général donné par un énoncé de la forme ;

« *Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $[0; 1]$ *par ;* $f(x) = x^2$ ».

Cet énoncé impose $\mathcal{D} = [0; 1]$ comme ensemble de définition pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$.

Si l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ n'est pas explicitement donné, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 2

La fonction ; $f : x \longmapsto x^3 + 5$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction ; $g : x \longmapsto \frac{x-7}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

La fonction ; $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;\ +\infty[$.

Exemple 3

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)};\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$$

Solution

$f(x) = \frac{-5x^2+4x+1}{x(x-3)(x+2)}$ est définie pour $x(x-3)(x+2) \neq 0$

C'est-à-dire pour ; $x \neq 0, x \neq -2$ et $x \neq 3$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}}$$

$g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$ est définie pour $3x^2 + 5x - 2 \geq 0$

On résout l'équation : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2 \times 3} = \frac{-12}{6} = \mathbf{-2}; \quad x_2 = \frac{-5+7}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2 + 5x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A partir du tableau de l'étude des signes, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R} \setminus \left]\mathbf{-2}; \mathbf{\frac{1}{3}}\right[$$

Exemple 4

Indiquer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3 - x}$; $x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$.

b) $x \mapsto \sqrt{-x}$; $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \sqrt{1-x}$; $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; $(3-2x)(5x+1)$.

Solution

La fonction	Son ensemble de définition	La fonction	Son ensemble de définition
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{-x}$	$\mathbf{R}_-$
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$	$\mathbf{R}_+ \cap \left[\frac{-1}{3}; +\infty\right[= \mathbf{R}_+$
$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lvert x \rvert}}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3 - x}$	$\mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$	$x \mapsto \sqrt{1-x}$	$]-\infty ; 1]$
$x \mapsto 2x^2 + \frac{\lvert x \rvert}{x^2+1}$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$	$\left]\frac{-7}{3}; +\infty\right[$
		$x \mapsto (3-2x)(5x+1)$	$\mathbf{R}$

2. La représentation graphique d'une fonction

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

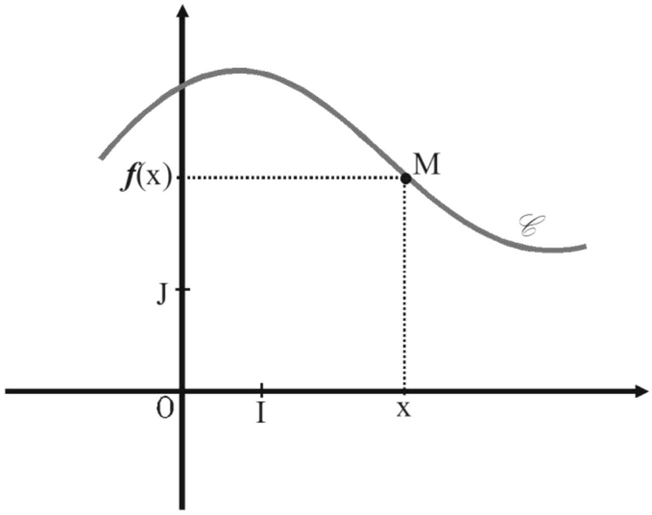
La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

$\mathcal{C}$ est appelée la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Notation

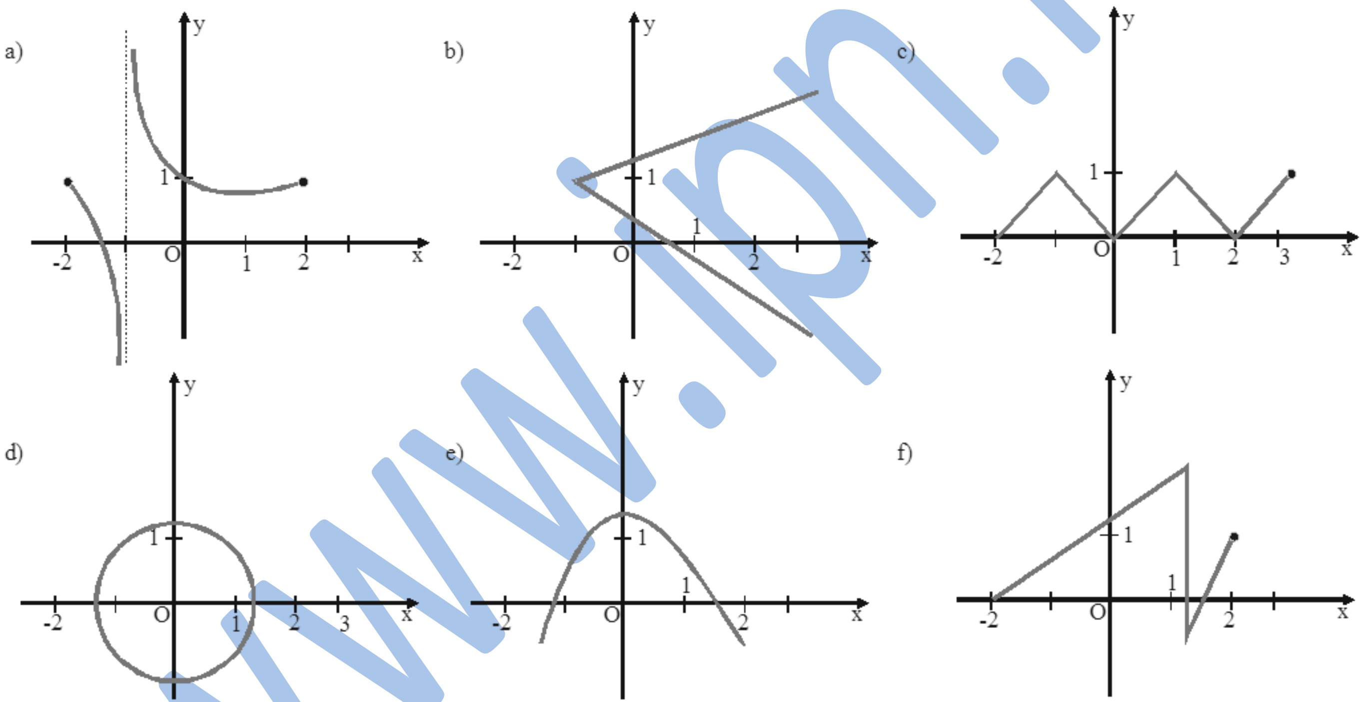
La courbe $\mathcal{C}$ de f est notée $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$.

$$\mathcal{C}_f = \{M(x,y) /\ x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$$



Exemple 5

Reconnaître les courbes représentant des fonctions, puis donner l'ensemble de définition de ces fonctions.



Solution

Courbes définissants des fonctions	Ensembles de définition associés
a)	[-2 ; 2] \ $\{-1\}$
c)	[-2 ; 3]
e)	$\mathbb{R}$

3. Variation d'une fonction et extrémums

a) Sens de variations

a- Croissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus grandes.

C'est-à-dire ; f est croissante sur I si ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

b- Décroissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus petites.

C'est-à-dire ; f est décroissante sur I si ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

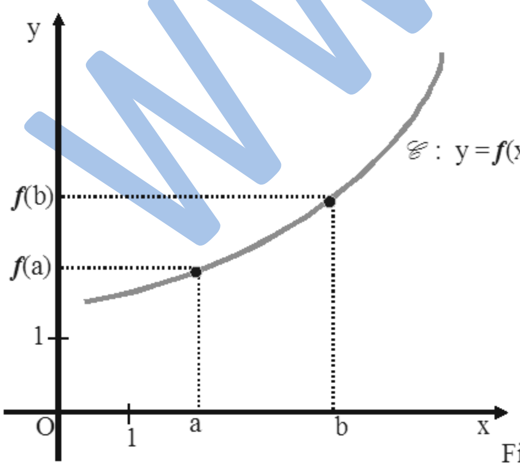


Fig. 1

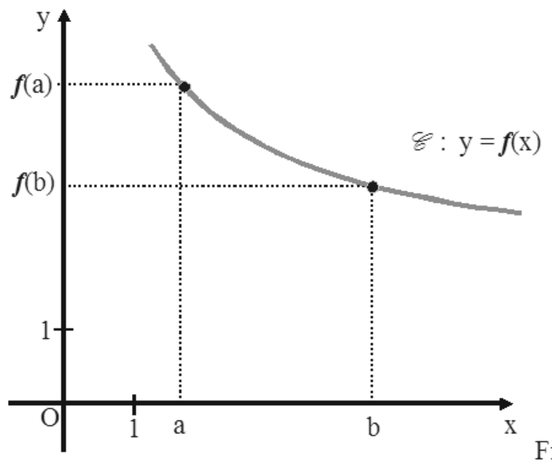


Fig. 2

On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

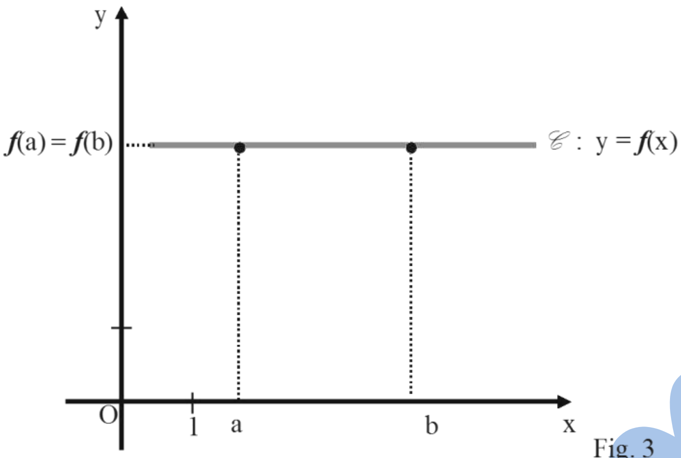


Fig. 3

Résumé

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

- *f* est strictement croissante sur I si, et seulement si :

Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) < *f* (b) (fig. 1)

- *f* est croissante sur I si, et seulement si :

Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* a) ≤ *f* (b).

- *f* est strictement décroissante sur I si, et seulement si :

Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) > *f* (b).

- *f* est décroissante sur I si, et seulement si :

Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* (a) ≥ *f* (b), (fig. 2)

- *f* est constante sur I si, et seulement si :

Pour tous a et b éléments de I, *f* (a) = *f* (b), (fig. 3)

Exemple 6

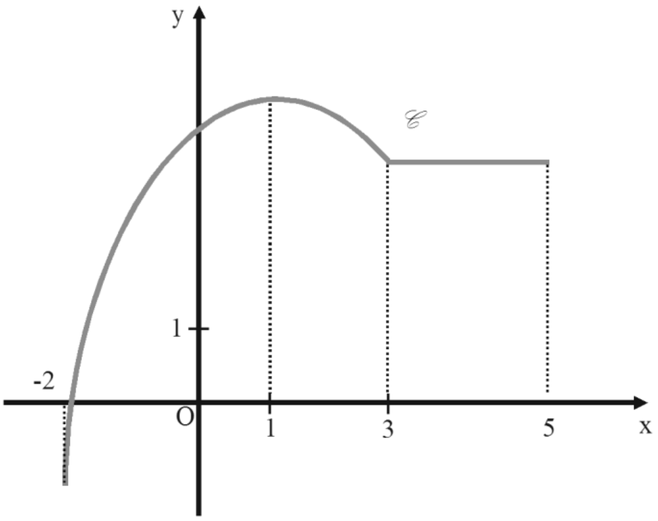
La courbe C de la figure ci- contre

est la courbe représentative

d'une fonction *f* qui est :

- strictement croissante sur [-2 ; 1] ;
- strictement décroissante sur [1 ; 3] ;

- constante sur [3 ; 5].



Exemple 7

Soit ***f*** la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2		2		5		10
f(x)	2	↗	5	↘	0	↗	6

a) Décrire les variations de ***f***.

b) Préciser, s'ils existent, les extremums de ***f*** sur son ensemble de définition.

Solution

a) ***f*** est croissante sur [-2 ; 2] ; décroissante sur [2 ; 5] ; croissante sur [5 ; 10].

b) ***f*** admet les nombres 5 et 6 en tant que maximums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].
Elle admet aussi 2 et 0 en tant que minimums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].

Etude des graphiques de fonctions

Quand on connaît l'écriture d'une fonction, on peut préciser son ensemble de définition et déterminer son sens de variation. On complète ensuite un tableau de valeurs pour faire sa représentation graphique.

Réciproquement, on peut partir de la représentation graphique d'une fonction pour trouver son ensemble de définition et déduire son tableau de variation.

On peut également utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des équations ou des inéquations.

Lire les images et les antécédents d'un nombre sur une courbe de fonction

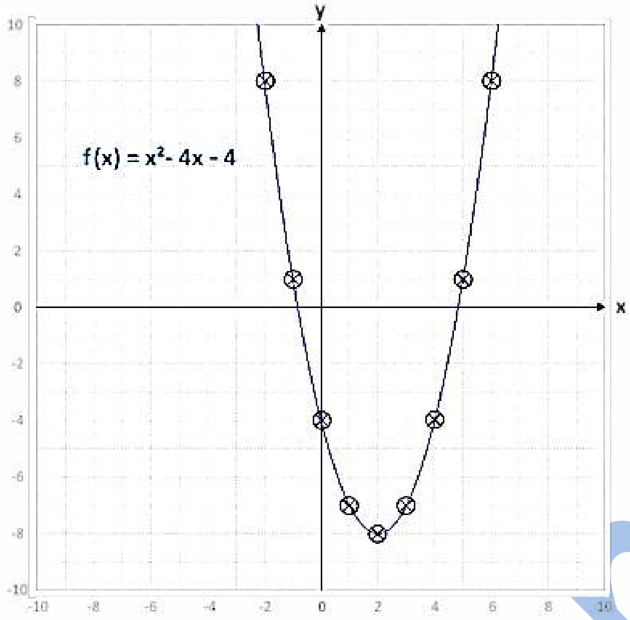
Exemple 8

Ici le tableau de valeurs de la fonction :

$$f(x) = x^2 - 4x - 4$$

Chaque couple $(x; f(x))$ de ce tableau est représenté par un point sur la courbe.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8



Nous avons la courbe représentative de f, définie par ; $f(x) = x^2 - 4x - 4$ représentée dans un repère orthonormé.

Cette fonction est un polynôme du second degré, et sa courbe est une parabole... qu'on étudiera plus tard.

8 est l'image de -2 par f

-4 est l'image de 4 par f

2 est l'antécédent de -8 par f

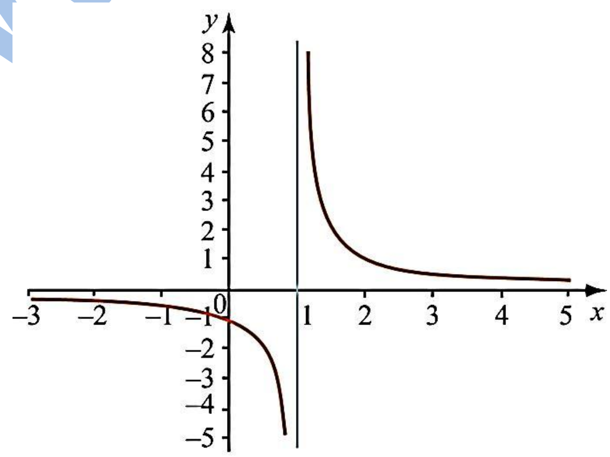
-2 et 6 sont les antécédents de 8 par f

Lire l'ensemble de définition sur la courbe d'une fonction

Sur l'axe horizontal, on lit les abscisses des points de la courbe. L'ensemble de définition est l'ensemble de ces abscisses. Il s'écrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

Exemple 9

La représentation graphique ci-dessous est formée de points dont l'abscisse est comprise entre -3 et 5, le nombre 1 étant exclu. Elle représente une fonction définie sur la réunion des intervalles : $]-3; 1[\cup]1; 5[$.



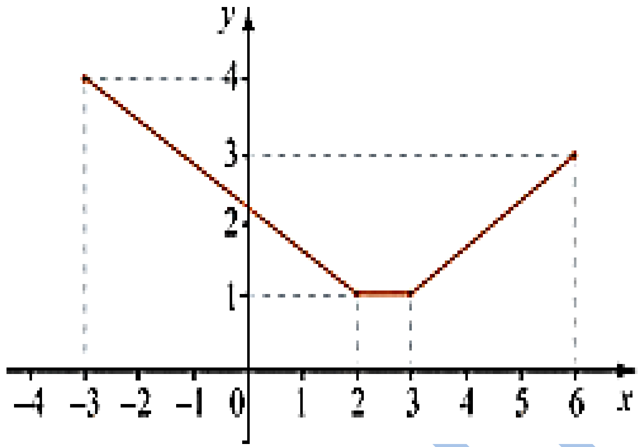
Etablir le tableau de variation d'une fonction à partir de sa courbe

Une fonction est croissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées augmentent.

Une fonction est décroissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées diminuent.

Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est un segment horizontal.

Exemple 10



La ligne brisée ci-dessus représente une fonction f :
– décroissante sur l'intervalle ; $[-3\,;\,2]$;
– constante sur l'intervalle ; $[2\,;\,3]$;
– croissante sur l'intervalle ; $[3\,;\,6]$.

Elle atteint son minimum 1 sur l'intervalle ; $[2\,;\,3]$.
On résume ces informations dans un tableau de variation :

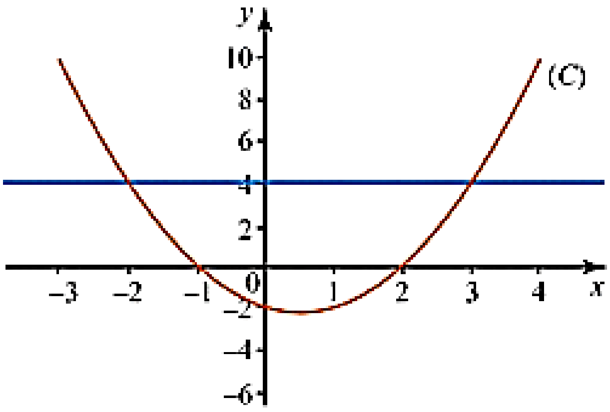
x	-3		2		3		6
sens de varation de f	4	$\searrow$	1	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	3

Lire les solutions d'une équation sur une courbe de fonction

• Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

Dans le cas particulier de l'équation $f(x) = 0$, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exemple 11

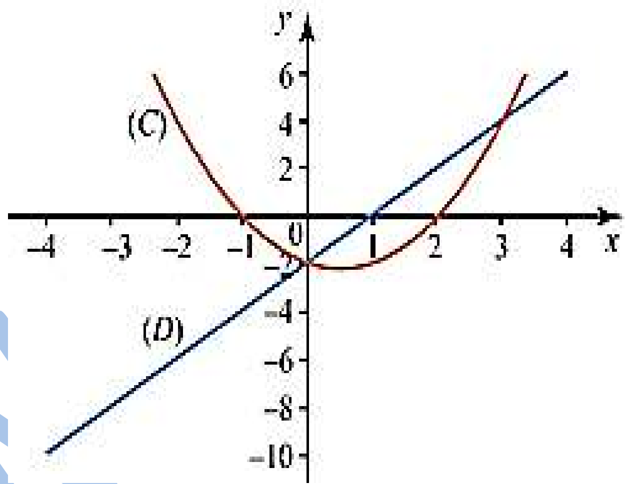


La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est : $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \{-1\ ;\ 2\}$.

• Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f avec la courbe représentant g.

Exemple 12

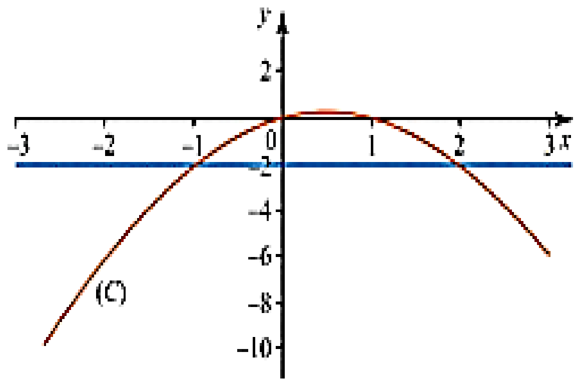
La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f et la droite (D) une fonction g. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est : $S = \{0\ ;\ 3\}$.



Lire les solutions d'une inéquation sur une courbe de fonction

• Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

Dans le cas particulier de l'équation $f(x) < 0$, les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de l'axe des abscisses.



Exemple 13

La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -2$ est : $S_1 =]-1; 2[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est : $S_2 =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

• Plus généralement, les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentant f, situés au-dessous de la courbe représentant g :

$$S_3 =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Remarque

Une fonction croissante conserve l'ordre ;

Une fonction décroissante inverse l'ordre.

b) Le taux d'accroissement (*de variations*) d'une fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction numérique f, soit $I \subset \mathcal{D}_f$, et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I que l'on note Δf ou T, le nombre réel défini par ;

$$\boxed{\boldsymbol{T = \Delta f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}}$$

Si $\Delta \boldsymbol{f} > 0$ alors $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $\boldsymbol{I}$,

Si $\Delta \boldsymbol{f} < 0$ alors $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $\boldsymbol{I}$,

Si $\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ alors $\boldsymbol{f}$ est constante sur $\boldsymbol{I}$,

Remarque

Une fonction est dite croissante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta \boldsymbol{f} > 0$$

Une fonction est dite décroissante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta \boldsymbol{f} < 0$$

Une fonction est dite constante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

c) Extrémum et extremum relatif (*local*)

a- Maximum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = M$.

On dit que M est le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \leq M$$

b- Maximum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = M_1$.

On dit que M_1 est un maximum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \leq M_1$$

c- Minimum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = m$.

On dit que m est le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \geq m$$

d- Minimum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = m_1$.

On dit que m_1 est un minimum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \geq m_1$$

Résumé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in$ I.

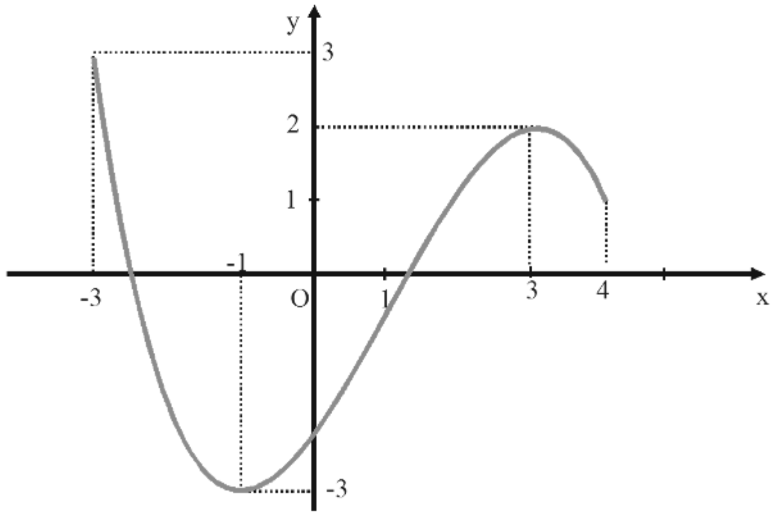
- f présente un maximum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f présente un minimum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple 14

Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$

est la courbe représentative

d'une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur I = [-3 ; 4].



Sur l'intervalle [-3 ; 4], $\boldsymbol{f}$ présente :

un maximum en -3, qui est égal à 3 ;

un minimum en -1, qui est égal à -3 ;

De plus, sur l'intervalle [1 ; 4]

par exemple, $\boldsymbol{f}$ présente un maximum

en 3, qui est égal à 2.

4. Courbes et symétrie, courbes et translation

a) Courbes symétriques par rapport à un point

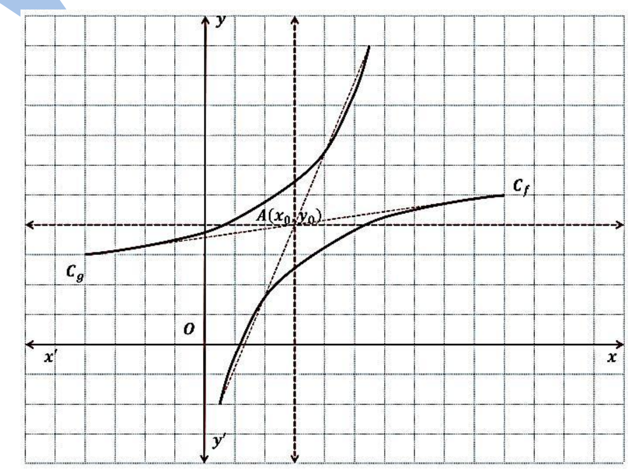
Propriété 1

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à un point $A(a, b)$, si, et seulement si ;

$$\boldsymbol{g(2a - x) + f(x) = 2b}$$

Exercice

Démontrer la propriété 1.



Cas particuliers

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, A est alors le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)+f(x)=2b}$$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et O (*origine du repère*) est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 0$$
$$\Longrightarrow f(-x)+f(x)=0 \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$$

Définition

Une fonction f est dite impaire si, et seulement si elle admet O (*le point d'origine*) comme centre de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit ***f*** une fonction définie sur un ensemble D de réels.

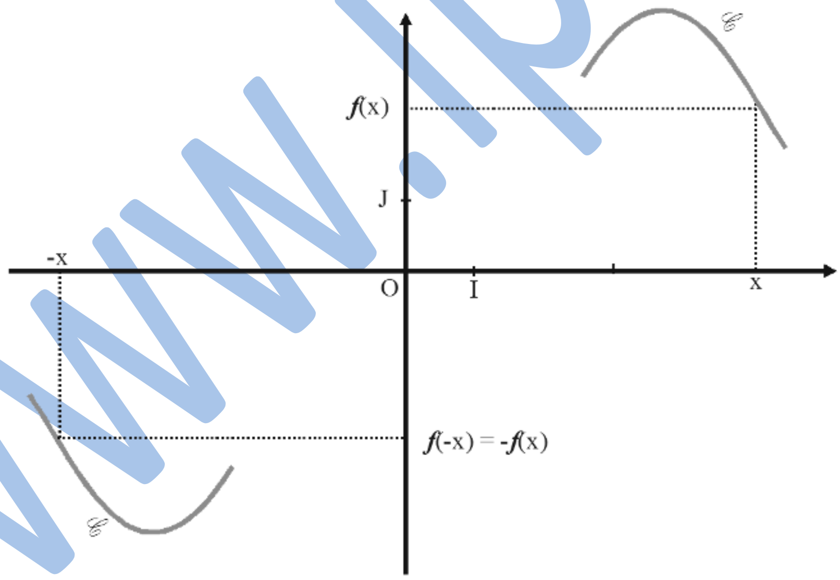
f est impaire si, et seulement si : pour tout x $\in$ D, -x$\in$ D et ***f***(-x) =- ***f***(x).

Exemple 15

La fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x^3 est impaire.

La fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}^*$ par g(x) = $\frac{1}{x}$ est impaire.

Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative C d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

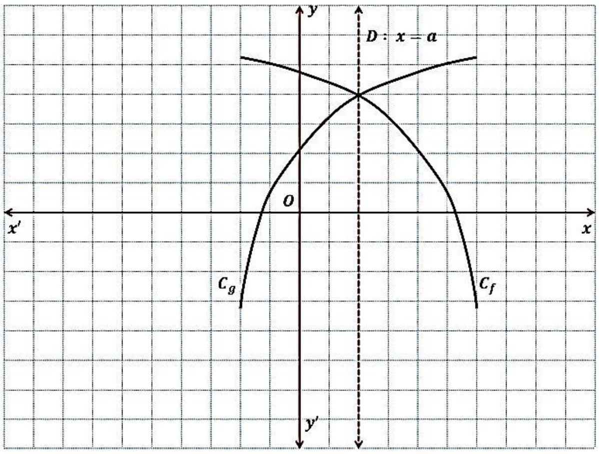


b) Courbes symétriques par rapport à un axe vertical

Propriété 2

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à une droite Δ : $x=a$, si, et seulement si ;

$$\boldsymbol{g(2a-x)=f(x)}$$



Exercice

Démontrer la propriété 2.

Cas particuliers

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, Δ est alors l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$$\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et yOy' (*axe des ordonnées*) est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2 \times 0 - x) = f(x)$$
$$\Longrightarrow f(-x) = f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

Définition

Une fonction f est dite paire si, et seulement si elle admet yOy' (*axe des ordonnées*) comme axe de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit *f* une fonction définie sur un ensemble D de réels.

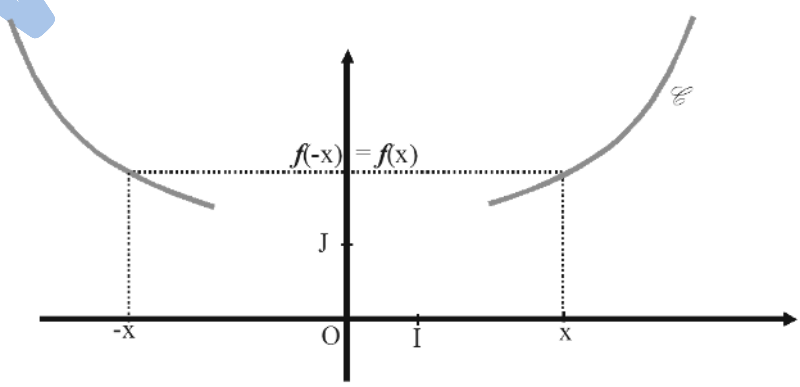
f est paire si, et seulement si : pour tout x ∊ D, -x∊ D et *f*(-x) = *f*(x).

Exemple 16

La fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par ***f***(x) = x^2 est paire.

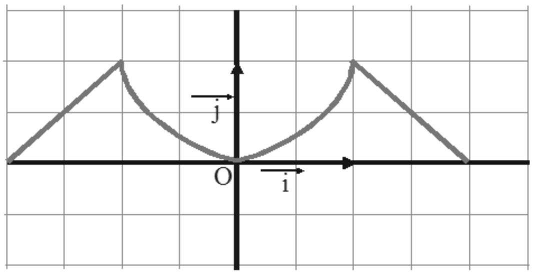
La fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}$ par ***g***(x) = $3x^4 - x^2 + 1$ est paire.

Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative C d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

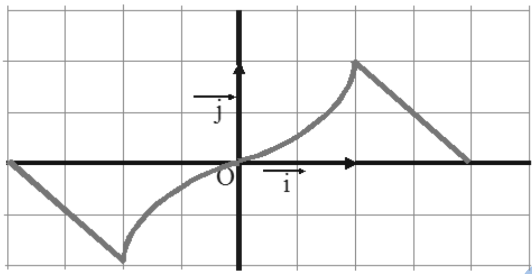


Conclusion

Si f est paire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'axe des ordonnées.



Si f est impaire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'origine du repère.

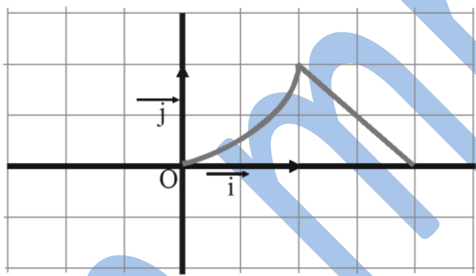


Exemple 17

A. Etudier la parité des fonctions données en **2.**

B. Le repère $(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est orthonormal.

La courbe C ci-contre est une partie de la courbe qui représente une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur [-2 ; 2].
La compléter, en supposant d'abord que $\boldsymbol{f}$ est paire, puis que $\boldsymbol{f}$ est impaire.



Solution

A. Le tableau suivant donne la parité des fonctions de l'application 2.

La fonction	Type de parité	La fonction	Type de parité
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	Paire	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	Paire
$x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$	Impaire	$x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$	Impaire
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	Paire		

c) Image d'une courbe par une translation

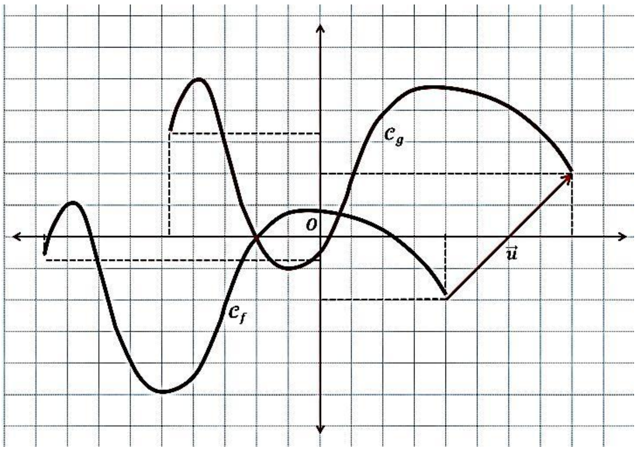
Propriété 3

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$, si et seulement si ;

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = b + g(x-a)}}.$$

Exercice

Démontrer la propriété 3

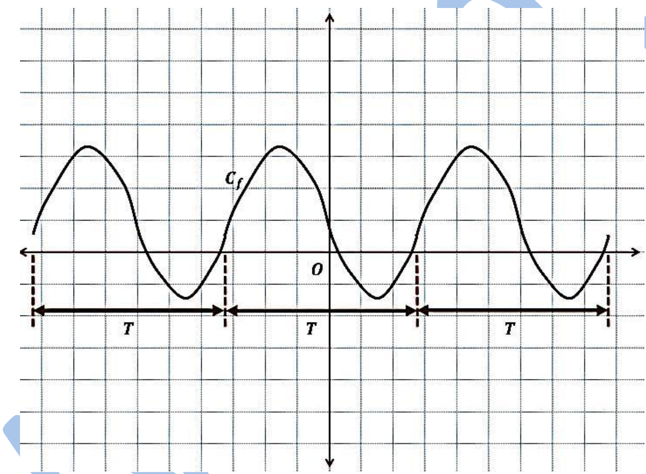


Cas particuliers

$b = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{a}{0} \Longrightarrow g(x) = f(x-a) \Leftrightarrow t_u$ est une translation horizontale.

$a = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{0}{b} \Longrightarrow g(x) = b + f(x) \Leftrightarrow t_u$ est une translation verticale.

5. Fonctions périodiques et période d'une fonction



Définition

Une fonction f est dite périodique, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x+T) = f(x)$$

T est appelée la période de f.

Exemple 18

On considère les fonctions trigonométriques ;

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \tan x \Longrightarrow T = \pi$$

a) Expression de langage

Lorsqu'une fonction f est de période π, on dit que f est π −périodique ;

Lorsqu'une fonction f est de période 2π, on dit que f est 2π −périodique, etc.

6. Domaine d'étude d'une fonction

1° Lorsqu'une fonction est paire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de (yOy').

2° Lorsqu'une fonction est impaire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'origine.

Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de O.

3° Lorsqu'une fonction est périodique, alors sa courbe graphique présente une répétition sur chaque période.

Il suffit donc de l'étudier sur une période $[0;\ T[$ de son domaine de définition et compléter la courbe en procédant par reproduction, ou translations successives de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Fonctions linéaires. Fonctions affines

Définitions

A. Fonction affine

On appelle fonction affine définie sur R toute fonction : ***f*** **:** x$\mapsto$ ax + b,

a et b étant des réels donnés.

B. cas particuliers

- si b = 0, ***f*** est une fonction linéaire.
- si a = 0, ***f*** est une constante.
- si a = b = 0, ***f*** est une fonction nulle.

Propriétés

A. Sens de variation

- Si a > 0, la fonction affine **:** x$\mapsto$ ax + b est strictement croissante sur R et l'on a le tableau de variation suivant :

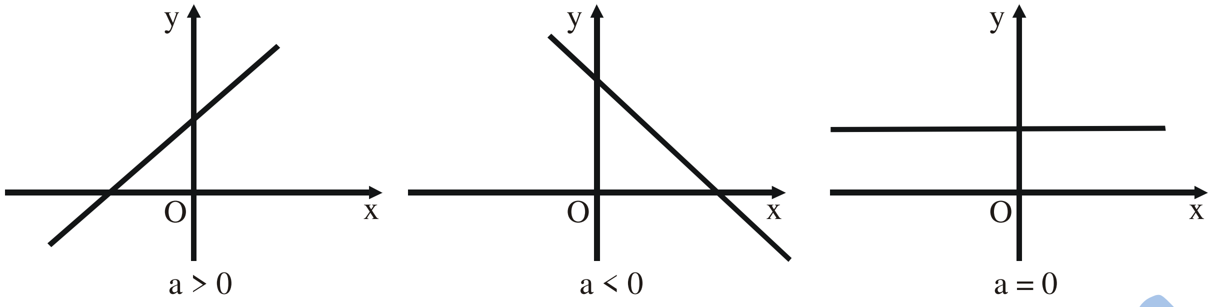
x	-∞ +∞
ax + b	↗

- Si a < 0, la fonction affine **:** x$\mapsto$ ax + b est strictement décroissante sur R et l'on a le tableau de variation suivant :

x	-∞ +∞
ax + b	↘

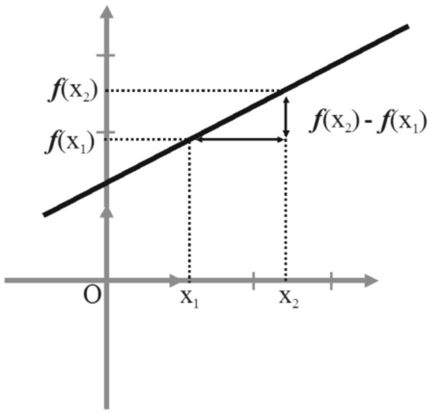
B. Représentation graphique

La représentation graphique de ***f*** est une droite qui sera déterminée par la construction de deux de ses points (par exemples, les points d'intersection avec les axes de coordonnées si ces points existent).



- a est le coefficient directeur de la droite.

b est l'ordonnée à l'origine.



a = $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$;

b = ***f***(0).

C. Fonction affine et proportionnalité

- Cas des fonctions linaires : ***f***(x) = ax.

f (x) est proportionnelle à x. le coefficient de proportionnalité est a.

- Cas des fonctions affines : ***f***(x) = ax + b.

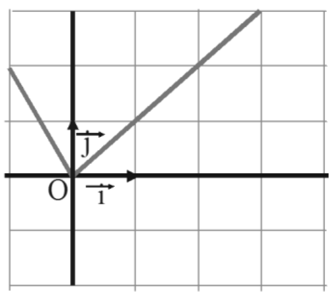
Pour tous réels x_1 et x_2 distincts : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$.

L'accroissement ***f***(x_2) – ***f***(x_1) est proportionnel à l'accroissement $x_2 - x_1$.

On dit que l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Le coefficient de proportionnalité est a.

Exemple 19



Soit ***f*** la fonction définie sur [-1 ; 4] par :

$$\begin{cases} \text{si } -1 \leq x \leq 0, \text{ alors } \boldsymbol{f}(x) = -2x \\ \text{si } 0 \leq x \leq 4, \text{ alors } \boldsymbol{f}(x) = x \end{cases}$$

a) Résoudre *f*(x) = 1.
b) Résoudre ***f***(x) = 3.
c) Vérifier graphiquement les résultats.

Solution

a) ***f***(x) = 1 ⇔ x = 1 ou x = $\dfrac{-1}{2}$; b) ***f***(x) = 3 ⇔ x = 3.

c) On observe ces solutions sur la représentation ci-contre.

Exercice généraux

Exercice 1

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$h(x) = \sqrt{|x|}\ ;\ j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}$$

$$k(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5|x|}\ ;\ l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$$

$$m(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4}}\ ;\ n(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}$$

$$p(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{\big||x|-5\big|-2}}\ ;\ q(x) = \sqrt{3x^3 + |x|}$$

$$s(x) = \sqrt{\big||x^2-4|-8\big|-1}\ ;$$

$$t(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{\big||x^2-2|-7\big|}}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier si possible l'expression :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x^2}$$

$$B(x) = \frac{6-2x}{x^2 - 6x + 9}$$

$$C(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$D(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$E(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4}$$

$$F(x)=\frac{16}{12x-4}-\frac{15x+5}{(3x+1)^2}+\frac{9x}{9x^3-x}$$

$$G(x)=\frac{x+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$H(x)=\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)\times\frac{x^2-4}{2x}$$

$$I(x)=\frac{x-\frac{3x}{3-x}}{x+\frac{3x}{3-x}}$$

Exercice 3

On donne les fonctions suivantes ;

$$f(x)=3x-7;\;\; g(x)=4x^2+5x-2;$$
$$h(x)=5x^3-1 \text{ et } l(x)=-4x+6.$$

1° Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2° Montrer que l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires, les fonctions impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires ;

$$f: x\longmapsto x^2\;;\quad g: x\longmapsto x^3\;;\quad h: x\longmapsto \frac{1}{x}\;;$$

$$j: x\longmapsto x+\frac{1}{x}\;;\quad k: x\longmapsto 2x^2+\frac{3}{x^2}\;;$$

$$l: x\longmapsto x^2+\frac{5}{x}\;;\quad m: x\longmapsto \frac{x^2+1}{x^3-2x}$$

$$n: x\longmapsto 2x^2+\frac{|x|}{x^2-6}\;;\; p: x\longmapsto \sqrt{-x}\;;$$

$$q: x\longmapsto \sqrt{x}\times\sqrt{3x+1}\;;\quad r: x\longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x|}}$$

$$s: x\longmapsto \sqrt{1-x}\;;\; t: x\longmapsto \frac{-5x}{\sqrt{3x+5}}\;;$$

$$a: x\longmapsto (3-2x)(5x+2)$$

Exercice 5

Etudier la parité des fonctions suivantes

$$f(x)=\frac{-5x^2-4|x|}{(x-3)(3-x)};\; g(x)=\sqrt{3x^2+5x-2}$$

$$h(x)=\sqrt{|x|}\;;\; j(x)=\sqrt{3x^2+4|x|}$$

$$k(x)=\sqrt{x^4+3x^2+5|x|}\;;\; l(x)=\sqrt{2|x|-5}$$

$$m(x) = \frac{2|x| + 5}{\sqrt{x^2 - 4}} \; ; \; n(x) = \frac{3x - 7}{\sqrt{3|x| + 8}}$$

$$p(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{\big||x| - 5\big| - 2}} \; ; \; q(x) = \sqrt{3x^3 - |x|}$$

$$s(x) = \sqrt{\big||x^2 - 4| - 8\big| - 1} \; ;$$

$$t(x) = \frac{4|x| + 1}{\sqrt{\big||x^2 - 2| - 7\big|}}$$

Notion de fonction

Exercice 6

Soit ***f*** la fonction définie par le tableau :

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
f(x)	2	4	3,5	2	-0,5	-14

Quelles sont les images par ***f*** des nombres : 0 ; 1 et 1,5 ?

Quels nombres ont pour image par ***f*** le nombre 2 ?

Exercice 7

Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

f(x) = $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

b) Quels est le nombre dont l'image par f est 4 ?

Exercice 8

Soit ***f*** une fonction définie pour tout réel x sauf $\frac{4}{3}$, par ***f***(x) = $\frac{2x+1}{3x-4}$.

Déterminer les images par f de 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

Déterminer les antécédents par f de 2.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de C avec l'axe des abscisses.

Domaine de définition

Exercice 9

f et ***g*** sont définies par :

f(x) = $2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x$.

g(x) = $\frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$.

Trouver D_f et D_g.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction ***f***.

a) ***f***(x) = $(7 - \frac{3}{2x})(5x + 1)$; b) ***f***(x) = $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+7}}$.

c) ***f***(x) = $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$;

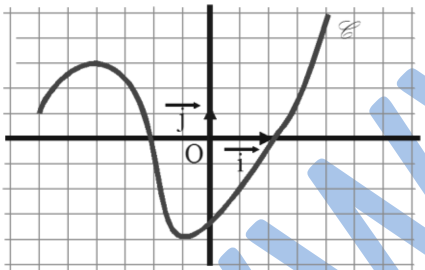
d) ***f***(x) = $\frac{1}{(x+2)(x-3)}$. e) ***f***(x) = $\frac{1}{|x|+1}$ f) ***f***(x) = $|x| - 1$.

Représentation graphique

Exercice 11

Pourquoi la courbe $\mathscr{C}$, de la figure ci-dessous, représente-t-elle une fonction ?

Soit ***f*** cette fonction.



a) L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 1,5 ;
b) Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est -1.
c) Les coordonnées des sommets de $\mathscr{C}$;
d) L'image de -1 par ***f*** ;
e) Les antécédents de 3 par ***f***.

Exercice 12

La courbe $\mathscr{C}$, ci-dessous, représente la fonction définie su $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par ***f***(x) = $\frac{2x+3}{x-2}$.

1°) Déterminer graphiquement :

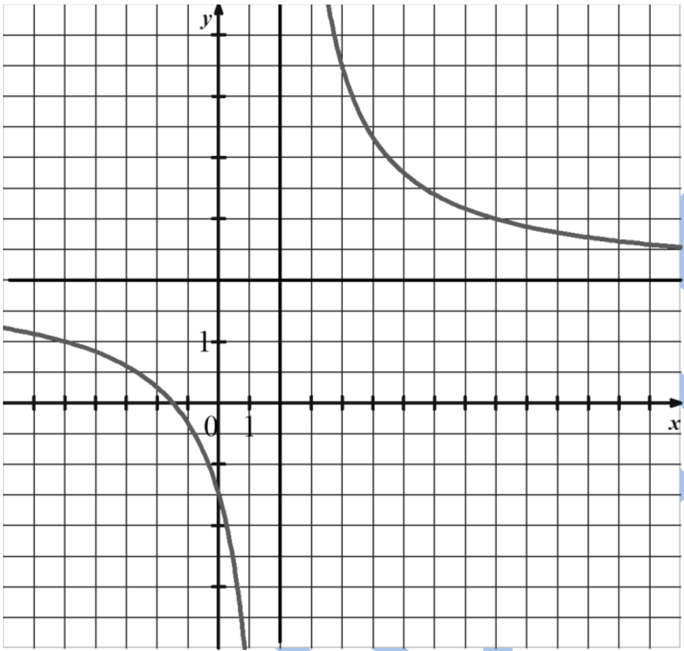
a) Les images de 1 et 11 ;

b) Les antécédents, s'ils existent, de 4, 2 et 0.

2°) a) Calculer les images de 1 et de 11.

c) Calculer les antécédents de 4 ; 2 ; 0.

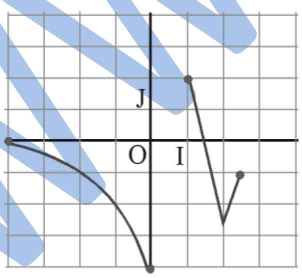
d) Soit m un nombre réel quelconque. Calculer les antécédents de m.

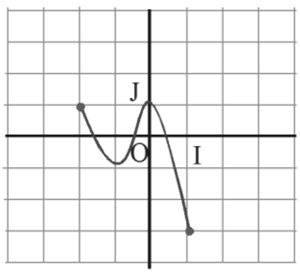


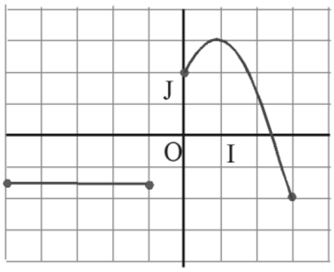
Exercice 13

Les courbes ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions numériques.

Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.







Sens de variation

Exercice 14

Associer les tableaux de variation aux et les courbes représentatives.

1.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

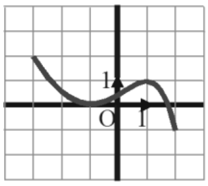
2.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

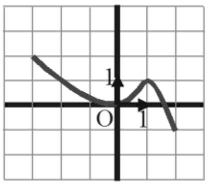
3.

x	-3		-1		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

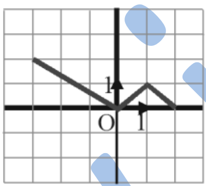
a



b)



c)



Exercice 15

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$.

Soit a et b deux réels. Démontrer que :

$f(a) - f(b) = (a - b)(a + b + 2)$.

En déduire que f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et que f est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

Exercice 16

Soit $f : x \mapsto \frac{-2}{x^2}$.

Montrer, en utilisant les règles sur les inégalités que la fonction f est croissante sur $]0 ; +\infty]$.

Parité d'une fonction

Exercice 17

Etudier la parité des fonctions définies par :

1) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = 1 + x^2$; 2) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = 5x^3 - 2x$

3) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = |x^3 + x|$; 4) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = x + 1$

5) $x \geq 2$ et $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1) Exprimer $f(-x)$ puis comparer avec $f(x)$.

Soit M le point de coordonnées (x ; f (x)) et M' celui de coordonnées (-x ; f (-x)).

2) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f sur $\mathbf{R} - \{-1\ ;\ 1\}$?

Exercice 19

Soit la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$g(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2+1}$.

1) Exprimer $g(-x)$ puis comparer avec $g(x)$.

Soit N le point de coordonnées (x ; g(x)) et N' celui de coordonnées (-x ; g(-x)).

2) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de g sur $\mathbf{R}$.

Fonctions affines

Exercice 20

On considère la fonction $f : x \mapsto |x|$.

1) Quel est son ensemble de définition ?

2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; I ; J).

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$f(x) = |x + 2|$.

1) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue suivant les valeurs du réel x.

2) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f.

Exercice 22

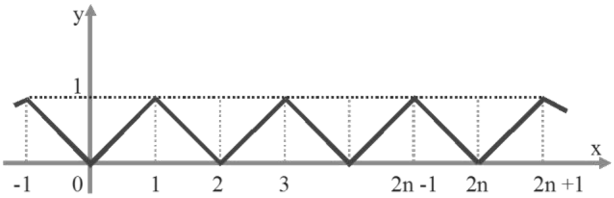
Soit la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$. L'unité de longueur sur les deux axes perpendiculaires est 1 cm.

1) Calculer $f(x)$ dans l'intervalle

[2n ; 2n + 1] ($n \in \mathbf{Z}$).

2) Trouver une période de f.

3) Trouver graphiquement les solutions de l'équation $\boldsymbol{f}(x) = \frac{1}{2}$ appartenant à l'intervalle [-1 ; 3].



X- FONCTIONS USUELLES, ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE, FONCTIONS ASSOCIEES

Faire savoir

Le cours

1. Les fonctions algébriques de base

Définition

Sont appelées fonctions algébriques de base ou de référence, les fonctions suivantes :

Les fonctions linéaires c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax\ (a \in \mathbb{R}^*)}.$$

Les fonctions "carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2\ (a \in \mathbb{R}^*)}.$$

Les fonctions "cube" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax^3\ (a \in \mathbb{R}^*)}.$$

Les fonctions "inverse" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x}\ (a \in \mathbb{R}^*)}.$$

Les fonctions "racine carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ax}\ \ (a \in \mathbb{R}^*)}.$$

Les fonctions ; constante, linéaire et affine ont été étudiées en $4AS$. Cette étude a permis d'établir leurs représentations graphiques qui sont des droites ; parallèle à l'axe (xOx') pour la fonction constante, passant par l'origine pour la fonction linéaire et passant hors de l'origine pour la fonction affine.

La partie qui suit, permet d'approfondir l'étude de ces fonctions.

Les étapes de l'étude et de la construction de la courbe d'une fonction

L'étude et la construction de la courbe d'une fonction comprend les étapes suivantes :

a) Détermination de son domaine de définition.

b) Détermination de son domaine d'étude, en étudiant sa parité et sa période.

c) Détermination de sa variation étape qui comprend ;

- Le calcul de son taux d'accroissement.
- Le dressage de son tableau de variation.
- Détermination des extrema s'ils existent.

d) Sa représentation graphique, étape qui comprend ;

- L'établissement d'un tableau de valeurs de la fonction.

- La construction de sa courbe graphique.

1°/ Fonctions affines sur intervalles

Exemple 1

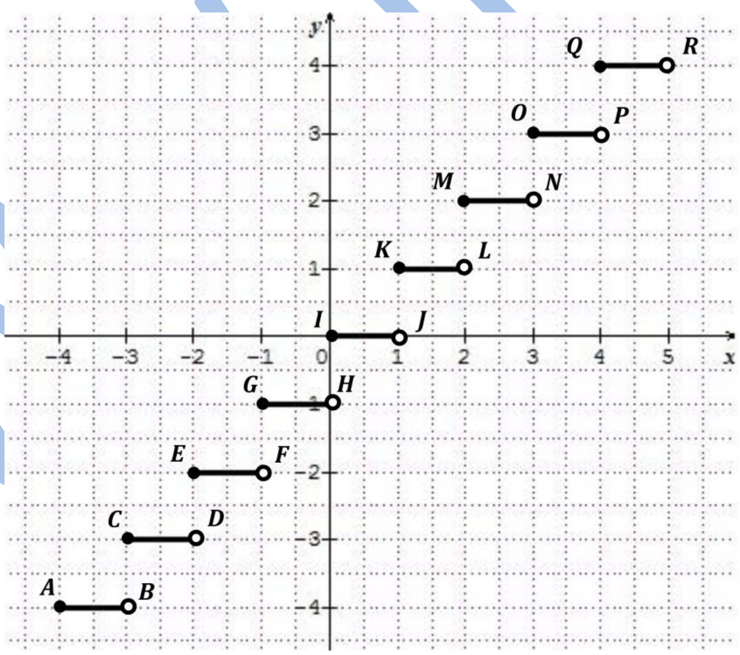
Soit f la fonction partie entière de x définie par ; $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que $n \leq x \leq n + 1$.

$f(x) = E(x) = n$ telle que ; $n \leq x \leq n + 1$

($E(x)$ *est le plus grand entier inférieur ou égal à* x, appelée également fonction en escalier).

Etude et représentation graphique de f

$$\ldots$$
$$x \in [-4;\ -3[\Longrightarrow f(x) = -4$$
$$x \in [-3;\ -2[\Longrightarrow f(x) = -3$$
$$x \in [-2;\ -1[\Longrightarrow f(x) = -2$$
$$x \in [-1;\ 0[\Longrightarrow f(x) = -1$$
$$x \in [0;\ 1[\Longrightarrow f(x) = 0$$
$$x \in [1;\ 2[\Longrightarrow f(x) = 1$$
$$x \in [2;\ 3[\Longrightarrow f(x) = 2$$
$$x \in [3;\ 4[\Longrightarrow f(x) = 3$$
$$\ldots$$



La courbe C_f de f est la réunion des segments de droites :

$$C_f = \cdots \cup [AB[\cup [CD[\cup [EF[\cup [GH[\cup [IJ[\cup [KL[\cup [MN[\cup [PO[\cup \ldots$$

2°/ Fonction carré

Exemple 2

Soit la fonction :

$$f(x) = x^2$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

f est paire et admet donc (yOy') comme axe de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à (yOy').

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2)$$
$$\boldsymbol{T = x_1 + x_2}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
T		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c- Extrémums

La fonction f est symétrique par rapport à (yOy'), donc, 0 est un minimum de f.

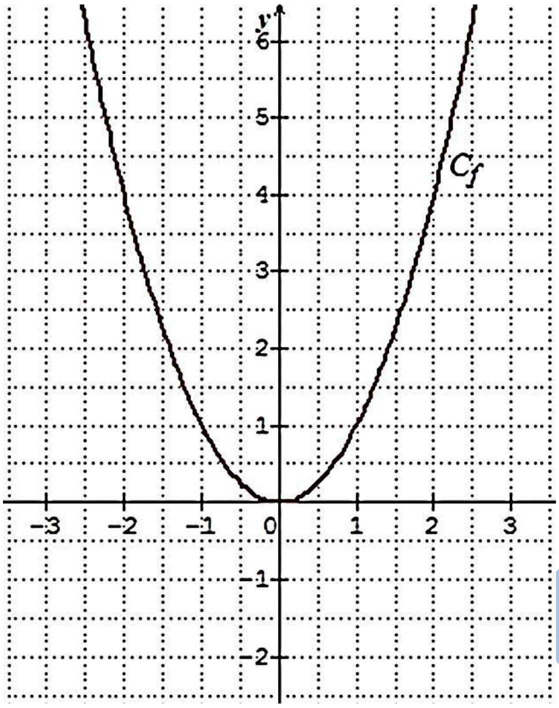
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{f(x)}$	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**

b- Courbe de f.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole.



3°/ Fonction cube

Exemple 3

$$f(x) = x^3$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x)$$
$$= -(x^3) = -f(x)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction $f(x) = x^3$ est impaire. Sa courbe admet l'origine O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T = x_1{}^2 + x_1x_2 + x_2{}^2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
T	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

c- Extrémums

Comme la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition, elle n'a donc pas d'extrémums.

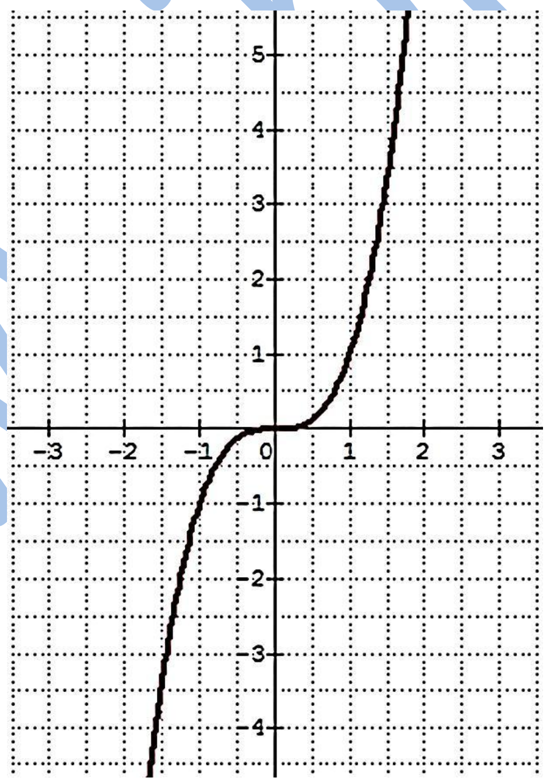
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216

b- Courbe de f

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^3$ est la courbe suivante.



4°/ Fonction racine carrée

Exemple 4

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = [0;\ +\infty[= \mathbb{R}_+}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{D}_f} \Longrightarrow -x \notin \boldsymbol{\mathcal{D}_f}$$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire.

Son domaine d'étude est donc égal à son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+$.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0 $+\infty$
T	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

c- Extrémums

La fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

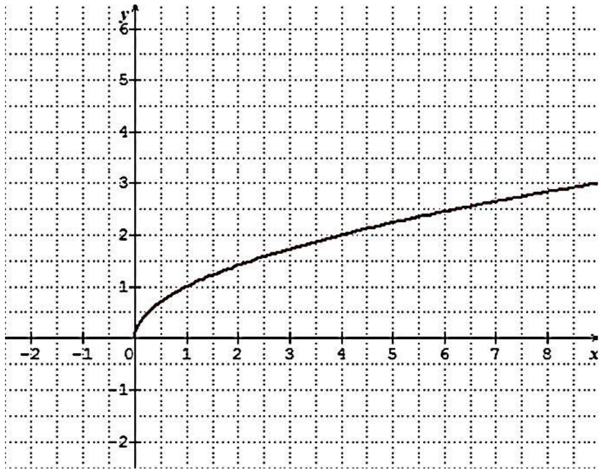
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**
$\boldsymbol{f(x)}$	**0**	**1**	$\boldsymbol{\sqrt{2}}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

b- Courbe de $\boldsymbol{f}$

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une demi-parabole de direction $[Ox)$.



5°/ Fonction inverse

Exemple 5

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Etude et représentation graphique de $\boldsymbol{f}$

a) Domaine de définition

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \neq 0, f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est impaire. Sa courbe représentative admet donc O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)}{(x_1 x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2}$$

$$T = \frac{-1}{x_1 x_2}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^* \Longrightarrow T < 0 \Longrightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}_-^*$

b- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
T		$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

c- Extrémums

La fonction f est strictement décroissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

d- Représentation graphique de f

a- Tableau de valeurs

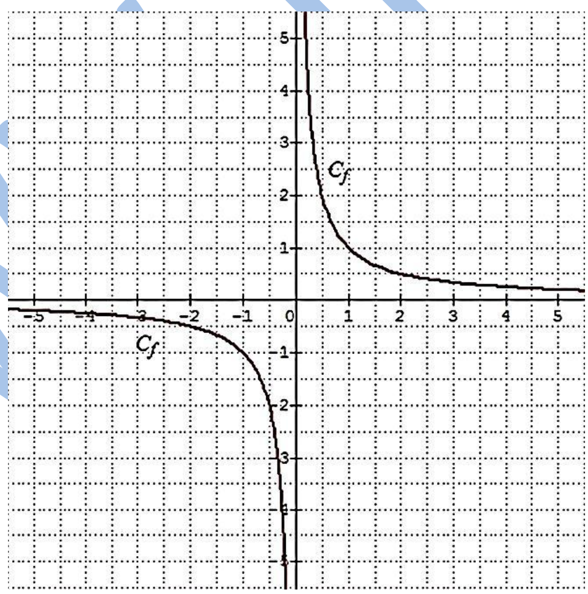
x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\|\|$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b- Courbe de f.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est une hyperbole.



Utilisation des Fonctions usuelles

Exemple 6

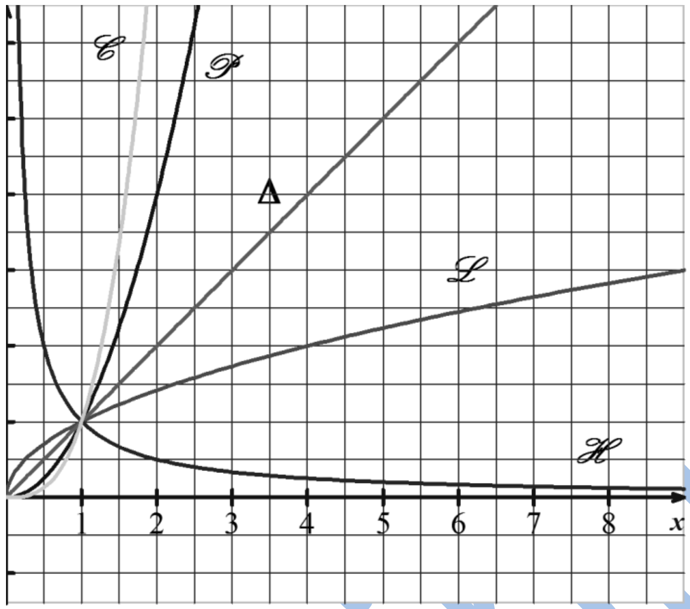
a) Comparaison des nombres a ; a^2 ; a^3 ; $\sqrt{a}$; $\frac{1}{a}$ (a > 0)

A l'aide des courbes (graphiques), on peut comparer un nombre positif, son carré, son cube, sa racine carrée et son inverse.

Il suffit de tracer dans le plan muni d'un repère orthogonal les courbes :

- (P) d'équation $y = x^2$ ($x \geq 0$),

- (L) d'équation $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$),
- (Δ) d'équation y = ($x > 0$),
- (H) d'équation $y = \frac{1}{x}$ ($x \geq 0$),
- (C) d'équation $y = x^3$ ($x \geq 0$),



Les positions relatives de ces courbes permettent de retrouver et d'illustrer la **propriété** suivante :

- si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$
- si $a=1$ alors $\frac{1}{a} = \sqrt{a} = a = a^2 = a^3$
- si $a > 1$ alors $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$

2. Fonctions associées à des fonctions de base

Définition

Soit g une fonction algébrique. f est une fonction associée à g si et seulement si, il existe une transformation géométrique qui transforme $\mathcal{C}_g$ en $\mathcal{C}_f$.

Remarque 1

Sauf mention contraire, lorsqu'on parle de fonctions associées, il s'agit de fonctions associées aux fonctions dites de base ou de référence.

a) Fonctions associées et courbes

a- Fonctions associées par une symétrie centrale

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport au point $A(a, b)$, (*$\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie de centre A*), si, et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{g(2a - x) + f(x) = 2b}$$

Centre de symétrie

Le point $A(a,b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)+f(x)=2b}$$

Remarque 2

Les fonctions associées par symétrie centrale ont des variations de sens contraires.

b- Fonctions associées par une symétrie axiale

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'axe vertical $\Delta :\ x=a$, ($\mathcal{C}_g$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la symétrie axiale d'axe* Δ), si, et seulement si, on ;

$$\boldsymbol{g(2a-x)=f(x)}$$

Axe de symétrie

Δ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)=f(x)}$$

Remarque 3

Les fonctions associées par symétrie axiale ont des variations de même sens lorsque leur axe de symétrie est vertical.

d- Fonctions associées par une translation

La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(x)=g(x-a)+b.}$$

Remarque 4

Les fonctions associées par translation ont des variations de même sens.

Remarque 5

La valeur absolue engendre également certaines formes de fonctions associées.

Etude des fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$

Exemple 7

1) a étant un nombre réel non nul on veut étudier la fonction

$f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$\quad x \mapsto ax^2$

- L'ensemble de définition : D$f = \mathbf{R}$
- Sens de variation : on peut distinguer deux sens selon le signe de a comme le montre les tableaux suivants :

a > 0

x		0		$+\infty$
ax^2	↘	0	↗	

a < 0

x		0		$+\infty$
ax^2	↗	0	↘	

2) a étant un nombre réel non nul on veut étudier la fonction :$f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \mapsto \frac{a}{x}$

- L'ensemble de définition D$f = \mathbf{R}^* =]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

- Sens de variation : on peut distinguer deux sens selon le signe de a comme le montre les tableaux suivants :

a > 0

x		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

a < 0

x		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Conclusion

Les courbes représentatives des fonctions du type : $ax^2 + bx + c$; $\sqrt{ax+b}$; $ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\frac{ax+b}{cx+d}$ se déduisent des courbes des fonctions de référence x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$ par des transformations simples (translations , homothéties, …) dont on déterminera les caractéristiques.
Un changement de repère (origine ; agrandissement, réduction) peut permettre de retrouver la courbe d'une fonction de référence dans le nouveau repère.

Exemple 8

Etudier les variations de la fonction f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \mapsto x^2 - 2x + 5$

et tracer sa courbe représentative.

Solution

- Df = $\mathbf{R}$

$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$

Supposons : $u - 1 < v - 1 \leq 0$

$u < v \leq 1$

$(u-1)^2 > (v-1)^2$

$(u-1)^2 + 4 > (v-1)^2 + 4$

$f(u) > f(v)$

f est décroissante sur$]-\infty ; 1[$

Supposons : $0 < u - 1 < v - 1$

$1 \leq u < v$

$(u-1)^2 < (v-1)^2$

$(u-1)^2 + 4 < (v-1)^2 + 4$

$f(u) < f(v)$

f est croissante sur$]1 ; +\infty[$

- **Tableau de variation**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

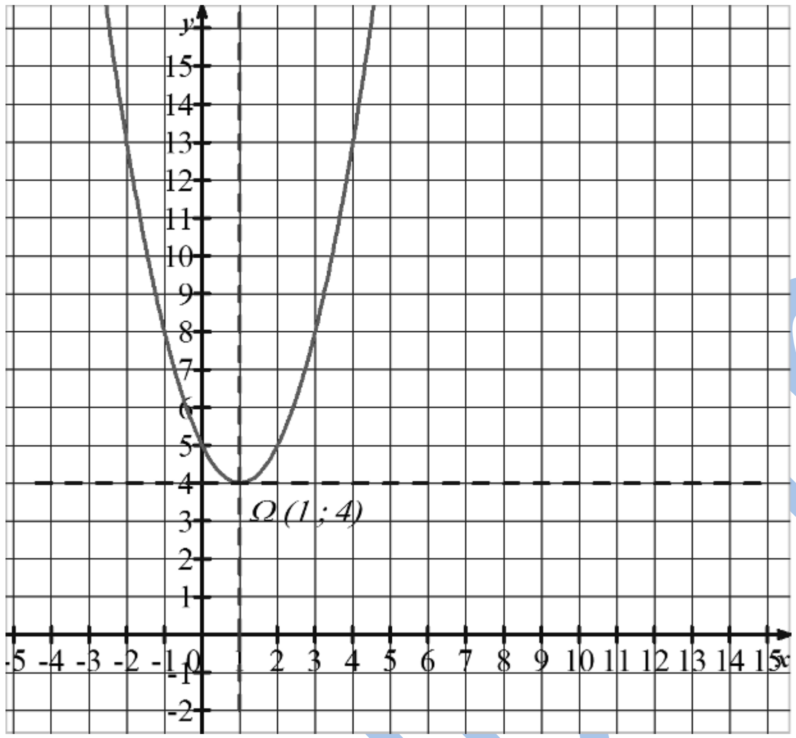
- **Tableau de valeurs**

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	8	5	4	5	8	13

- **Courbe représentative**

On peut remarquer que le graphique de la fonction ***f*** dans le repère ci-contre est celui de la fonction x^2 dans le repère d’origine Ω. Avec Ω (1 ; 4).

C’est-à-dire C_f c’est l’image de C_{x^2} par la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.



Exemple 9

On considère la fonction ***f***(x) = $\frac{2x+3}{x+1}$.

a) vérifier que pour tout réel $x \neq -1$; ***f***(x) = 2 + $\frac{1}{x+1}$.

b) Etudier les variations de ***f*** et tracer sa courbe représentative.

Solution

a) $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$; donc $\forall\, x \neq -1$: ***f***(x) = $2 + \frac{1}{x+1}$.

b) D***f*** = $\mathbb{R} - \{-1\}$ =]-∞ ; -1[∪] -1 ; +∞ [

- Sens de variation :

$u + 1 < v + 1 \leq 0$

$u < v < -1$

$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

$2 + \frac{1}{u} > 2 + \frac{1}{v}$

f(u) > ***f***(v)

f est décroissante sur]-∞ ; -1[

$0 < u + 1 < v + 1$

$-1 < u < v$

$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

$2 + \frac{1}{u} > 2 + \frac{1}{v}$

f(u) > ***f***(v)

f est décroissante sur]-1 ; +∞[

f est toujours décroissante sur D***f***

- **Tableau de variation**

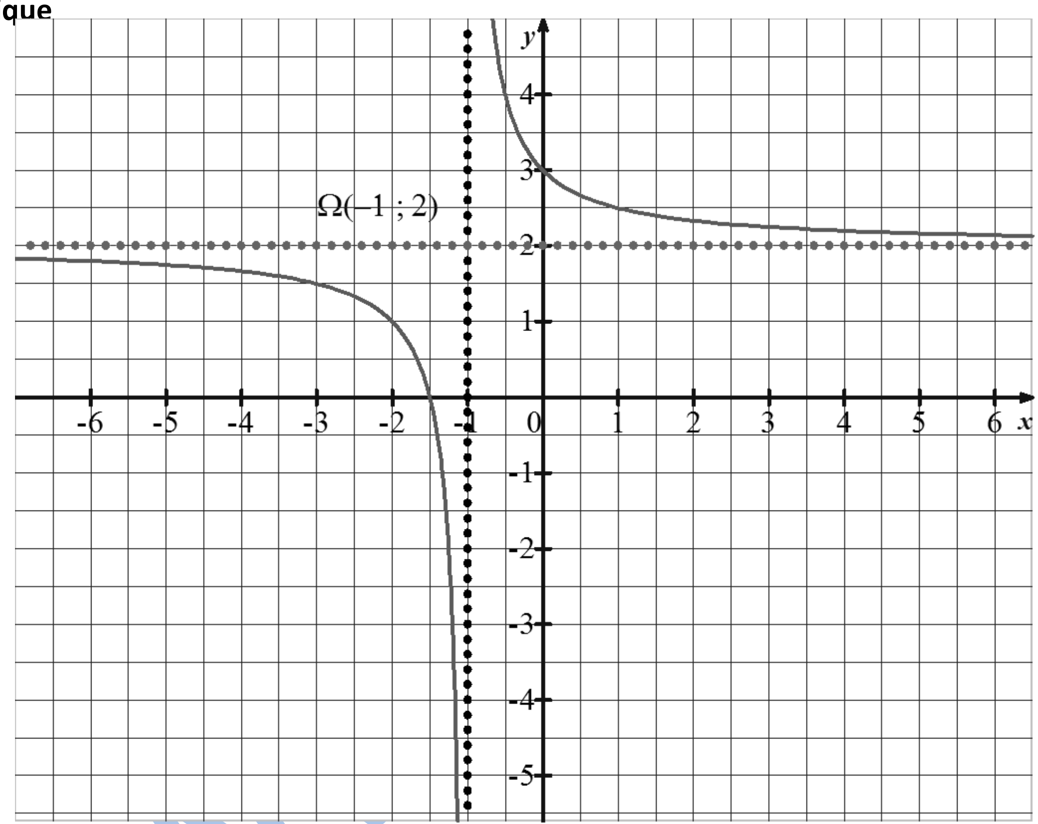
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$		$\searrow$

- **Tableau de valeurs**

x	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5
f(x)	1,6	1,5	1,3	1	0	4	3	2,6	2,5	2,4

- **Représentation graphique**

On remarque que le Graphique de ***f*** dans le repère ci-contre c'est celui de $\frac{1}{x}$ dans le repère d'origine Ω et de même base.



Exemple 10

Soit la fonction ***g***(x) = $2 + \sqrt{x+3}$.

Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative.

Solution

- Ensemble de définition D***g*** = [-3 ; +∞[.
- Sens de variation : On suppose que $-3 \leq u \leq v$

$$0 \leq u + 3 \leq v + 3$$
$$0 \leq \sqrt{u+3} \leq \sqrt{v+3}$$
$$2 \leq 2 + \sqrt{u+3} \leq 2 + \sqrt{v+3}$$
$$g(u) \leq g(v)$$

g est croissante sur son ensemble de définition.

- **Tableau de variation**

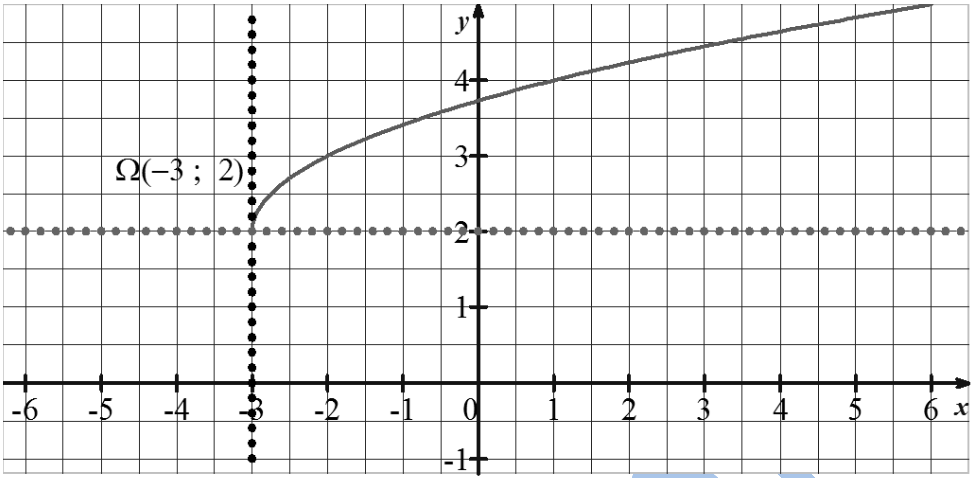
x	-3	$+\infty$
g(x)	**2** $\nearrow$	

- **Tableau de valeurs**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	3	3,41	3,73	4	4,23	4,44

- **Représentation graphique**

Le graphique de ***g*** est l'image du graphique de la fonction $\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Exemple 11

Soit la fonction ;

$$f(x) = \frac{4x-3}{x+2}$$

Montrer que le point $A(-2, 4)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Solution

Pour montrer que A est le centre de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(2a-x) + f(x) = 2b$,

$$a = -2 \Longrightarrow 2a = -4 \,;\; b = 4 \Longrightarrow 2b = 8$$

$$\Longrightarrow f(2a-x) + f(x) = f(-4-x) + f(x)$$

$$= \frac{4(-4-x)-3}{-4-x+2} + \frac{4x-3}{x+2}$$

$$= \frac{-16-4x-3}{-x-2} + \frac{4x-3}{x+2} = \frac{4x+19}{x+2} + \frac{4x-3}{x+2}$$

$$= \frac{4x+19+4x-3}{x+2} = \frac{8x+16}{x+2}$$

$$= \frac{8(x+2)}{x+2} = 8 = 2 \times 4 = 2b$$

Donc, le point $A(-2, 4)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Exemple 12

Soit la fonction ;

$$f(x) = x^2 - 5x - 6$$

Montrer que la droite

$$\Delta : x = \frac{5}{2}$$

est l'axe de symétrie de la courbe de f.

Solution

Pour montrer que Δ est l'axe de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(2a-x) = f(x)$,

$$a = \frac{5}{2} \Longrightarrow 2a = 5$$
$$\Longrightarrow f(2a-x) = (5-x)^2 - 5(5-x) - 6$$
$$= (25 - 10x + x^2) - 25 + 5x - 6$$
$$= 25 - 10x + x^2 - 25 + 5x - 6$$
$$= x^2 - 5x - 6 = f(x)$$

Donc la droite
$$\Delta : x = \frac{5}{2}$$
est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exemple 13

Soit la fonction ;
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$$
A/ Montrer que $f(x)$ peut s'écrire ;
$$f(x) = (x-2)^3 + 6$$
B/ En se servant de la dernière écriture, montrer que le point $A(2,6)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Solution

A/ $(x-2)^3 + 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 2 = f(x)$$
B/ Pour montrer que A est le centre de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(2a-x) + f(x) = 2b,\ a = 2 \Longrightarrow 2a = 4\ ;\ b = 6 \Longrightarrow 2b = 12$
$$\Longrightarrow f(2a-x) + f(x)$$
$$= (4-x-2)^3 + 6 + (x-2)^3 + 6$$
$$= (-x+2)^3 + 6 + (x-2)^3 + 6$$
$$= -(x-2)^3 + 6 + (x-2)^3 + 6 = 12 = 2b$$
Donc, le point $A(2,6)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Exemple 14

Soit la fonction ;
$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$
A/ Déterminer l'axe de symétrie (D) de la courbe de la fonction ;

B/ Caractériser son extrémum.

Solution

A/ $(D) : x = a$. Pour déterminer a, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(2a-x)=f(x)$$
$$f(2a-x)=3(2a-x)^2-5(2a-x)+1=3x^2-5x+1$$
$$\Longrightarrow 3(4a^2-4ax+x^2)-10a+5x+1=3x^2-5x+1$$
$$\Longrightarrow 12a^2-12ax+3x^2-10a+5x+1=3x^2-5x+1$$
$$\Longrightarrow 12a^2-10a+1-12ax+5x+3x^2=1-5x+3x^2$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 12a^2-10a+1=1 \\ -12a+5=-5 \\ 3=3 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 12a^2-10a=0 \\ -12a=-10 \\ 3=3 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{a=\frac{5}{6}}$$

La droite $D : x=\frac{5}{6}$ est l'axe de symétrie de la courbe de f.

Vérification

$$f\left(\frac{5}{3}-x\right)=3\left(\frac{5}{3}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{3}-x\right)+1$$
$$=3\left(\frac{25}{9}-\frac{10}{3}x+x^2\right)-\frac{25}{3}+5x+1$$
$$=\frac{25}{3}-10x+3x^2-\frac{25}{3}+5x+1$$
$$=3x^2-5x+1=f(x)$$

B/ L'extrémum de la courbe de f est un minimum, il est atteint pour la valeur de $x=\frac{5}{6}$

Exemple 15

On donne les fonctions suivantes :

☒ $g(x)=x^2-4x+5$;

☒ $h(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$;

☒ $k(x)=(x+1)^3-3$;

☒ $l(x)=5+\sqrt{x-3}$.

a/ Déterminer les translations qui transforment des fonctions algébriques de base en g, h, k et l.

b/ Utiliser ces fonctions de base pour représenter graphiquement les fonctions g, h, k et l.

Solution

☒ $g(x)=x^2-4x+5$

a/ L'écriture canonique de g donne ;

$g(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

Posons $X=x-2$

Soit la fonction ;

$j(x)=x^2 \Longrightarrow j(X)=X^2=(x-2)^2=j(x-2)$

$f(x)=(x-2)^2+1=j(x-2)+1$

$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = j(x-2)+1}$

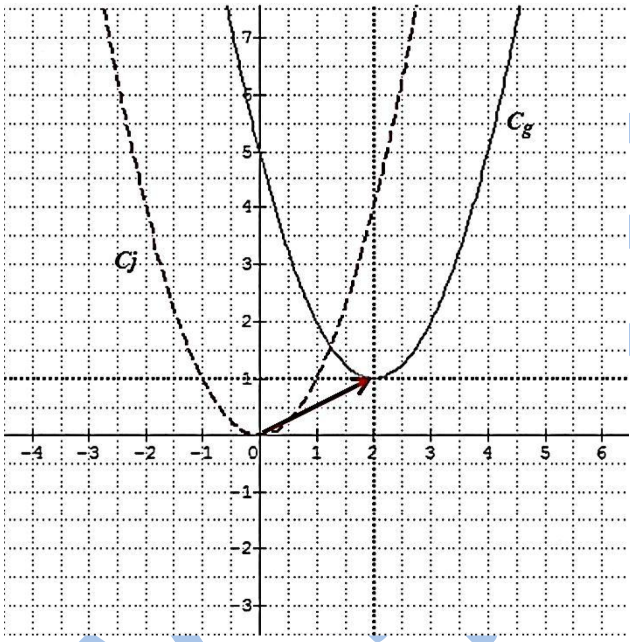
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{2}{1}$.

La courbe C_f de f est l'image de la courbe C_j de j par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(2,1)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $g(x) = x^2 - 4x + 5$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $j(x) = x^2$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$g(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$\Longrightarrow g(x) - 1 = (x-2)^2$

En posant ;

$X = x - 2$ et $Y = g(x) - 1 \Longrightarrow \boldsymbol{Y = X^2}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de g on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(2;1)$.

$$\boxtimes\ h(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

a/ Posons $X = x + 1$

Soit la fonction

$$e(x) = \frac{-5}{x} \Longrightarrow e(X) = \frac{-5}{X} = \frac{-5}{x+1} = e(x+1)$$

$$h(x) = 2 - \frac{5}{x+1} = e(x+1) + 2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{h(x) = e(x+1) + 2}$$

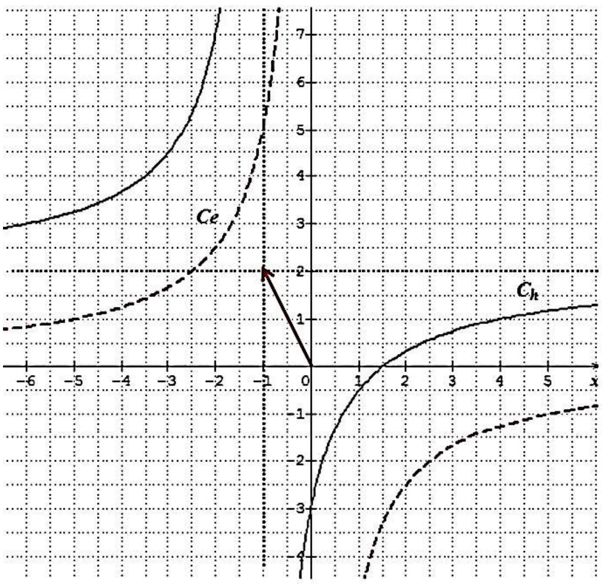
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{2}$.

La courbe C_h de h est l'image de la courbe C_e de e par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(-1,2)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter la courbe de $h(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $e(x) = \frac{-5}{x}$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$h(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

$$\Rightarrow h(x) - 2 = -\frac{5}{x+1}$$

En posant ;

$$X = x + 1 \text{ et } Y = h(x) - 2 \Rightarrow \boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{-5}}{\boldsymbol{X}}$$

Ainsi, pour obtenir la courbe de h, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\Omega(-1;2)$.

$$\boxtimes\ k(x) = (x+1)^3 - 3\ ;$$

a/ Posons $X = x + 1$

Soit la fonction ;

$$m(x) = x^3 \Rightarrow m(X) = X^3 = (x+1)^3 = m(x+1)$$

$$k(x) = (x+1)^3 - 3 = m(x+1) - 3$$

$$\boldsymbol{k(x) = m(x+1) - 3}$$

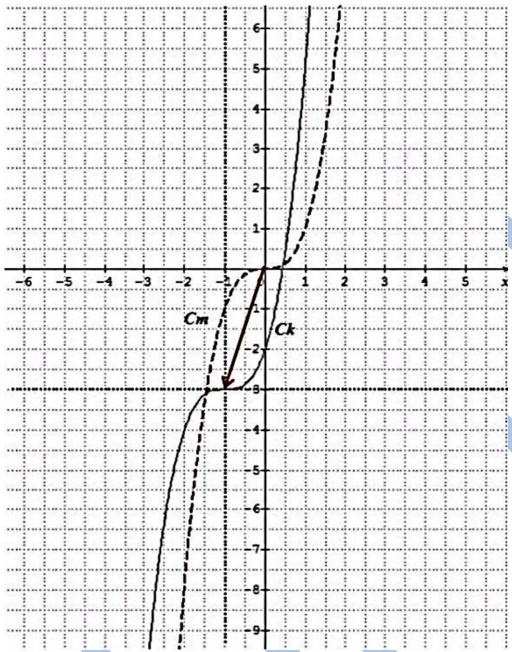
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{-3}$.

La courbe C_k de k est l'image de la courbe C_m de m par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(-1,-3)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $k(x) = (x+1)^3 - 3$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $m(x) = x^3$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$k(x) = (x+1)^3 - 3 \Longrightarrow k(x) + 3 = (x+1)^3$$

En posant ;

$X = x + 1$ et $Y = k(x) + 3 \Longrightarrow \boldsymbol{Y = X^3}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de k, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\Omega(-1;-3)$.

$$\boxtimes\ l(x) = 5 + \sqrt{x-3}$$

a/ Posons $X = x - 3$

Soit la fonction ;

$$n(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow n(X) = \sqrt{X} = \sqrt{x-3} = n(x-3)$$

$$l(x) = 5 + \sqrt{x-3} = n(x-3) + 5$$

$$\boldsymbol{l(x) = n(x-3) + 5}$$

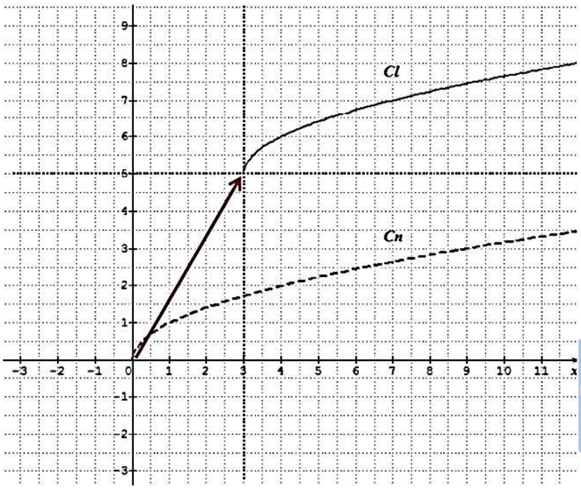
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{3}{5}$.

La courbe C_l de l est l'image de la courbe C_n de n par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(3,5)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $l(x) = 5 + \sqrt{x-3}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $n(x) = \sqrt{x}$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$l(x) = 5 + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} + 5$$
$$\Longrightarrow l(x) - 5 = \sqrt{x-3}$$

En posant ;

$X = x - 3$ et $Y = l(x) - 5 \Longrightarrow \boldsymbol{Y = \sqrt{X}}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de l, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(3; 5)$

Exercice généraux

Exercice 1

5° Déterminer le centre de symétrie A de la courbe de la fonction ;

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

6° Déterminer le centre de symétrie B de la courbe de la fonction ;

$$f(x) = \frac{6x-3}{x+2}$$

Exercice 2

Soit les fonctions ;

⊛ $f(x) = x - 3$;

⊛ $g(x) = x^2 - 6x - 1$

⊛ $h(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$

- $k(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

A/ En utilisant des fonctions de base et des translations convenables, construire les courbes de ces fonctions.

B/ En déduire les constructions des courbes graphiques des fonctions ;

- $L(x) = |x-3\,|$;
- $M(x) = |x^2 - 6x - 1|$
- $N(x) = |x^3 + 6x^2 + 12x + 10|$
- $Q(x) = \left|\dfrac{3x-1}{x+2}\right|$

Exercice 3

Soit les fonctions ;

- $f(x) = x^2 - 6x + 7;$
- $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$
- $h(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$
- $k(x) = 2 + \sqrt{x-3}$

Etudier et construire les courbes de ces fonctions en utilisant le taux d'accroissement.

Exercice 4

A partir de la représentation graphique de la courbe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x},$$

Déduire les courbes des fonctions suivantes dans le même graphique ;

$$g(x) = -\sqrt{x}; \quad h(x) = \sqrt{-x}; \quad k(x) = -\sqrt{-x}$$

Exercice 5

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$$

1° Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2° Déterminer les images par f des nombres 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

3° Déterminer le ou les antécédents éventuels de 2 par f.

4° Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = ax^2 + bx + 12$, tels que a et b sont des réels.

1° Calculer a et b sachant que $f(1) = -6$ et $f(-2) = 30$.

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f(x) = 0$ et $f(x) \geq 0$.

3° Factoriser $f(x)$.

4° Montrer que la droite $D : x = \frac{-5}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

Exercice 7

Soit la fonction :

$$f_m(x) = \frac{-mx + 2}{x^2 + x}$$

1° Déterminer $\mathcal{D}_{f_m}$.

2° Calculer m pour que $\mathcal{C}_{f_m}$ passe par le point $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

3° Déterminer les réels a et b tels que ;

$$f_m(x) = \frac{ma}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

4° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f_m(x) \geq 0$.

5° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f_m(x) = 2$ (*Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de* m).

Exercice 8

Soit f une fonction définie par ;

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1° Sachant que $f(x+1) = 2x^2 + 11x$; déterminer l'expression de $f(x)$.

2° Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

3° Montrer que la droite d'équation $(d) : x = \frac{-7}{4}$ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

4° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ; $f(x) \geq 0$.

5° a/ Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite (Δ) d'équation ; $(\Delta) : y = 3x - 3$,

b/ Puis préciser leurs positions relatives

6° Ecrire f sous la forme canonique ;

$(f(x) = 2(x + \alpha)^2 + \beta)$

7° Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation que l'on caractérisera.

8° Représenter graphiquement cette situation.

Exercice 9

Soit f une fonction définie par ;

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Tels que a, b, c et d son des réels non nuls.

$$\text{Sachant que ; } \begin{cases} f(0) = \dfrac{-1}{2} \\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ f(3) = 7 \end{cases}$$

1° Donner l'expression de f.

2° Montrer que le point $A(2; 2)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ; $f(x) \geq 0$.

4° Déterminer les réels a' et b' tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = a' + \frac{b'}{x-2}$$

Exercice 10

On considère la fonction définie par ;

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1° Déterminer a, b, c et d sachant que ;

$$\begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ f(-1) = \frac{3}{4} \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

2° Montrer que le point $A(3; 2)$ est le centre de symétrie $\mathcal{C}_f$

3° Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, construire $\mathcal{C}_f$ et en déduire $\mathcal{C}_{|f|}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Sachant que $f(0) = 3$, et que le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Δf		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1° Déterminer les réels a, b et c.

2° Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie D, dont on précisera l'équation.

3° Tracer D et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur intervalles par :

$$f(x) = \begin{cases} x \in]-\infty; -5] \Rightarrow f(x) = 3x+2 \\ x \in]-5; -1] \Rightarrow f(x) = -x+4 \\ x \in]-1; 4] \Rightarrow f(x) = 2x-3 \\ x \in]4; +\infty[\Rightarrow f(x) = 4x+1 \end{cases}$$

Etudier et représenter graphiquement f.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = |2x-5| + |2-3x| + |4x+1|$$

1/ Donner l'expression de f sur $\mathbb{R}$;

2/ Etudier et représenter graphiquement f.

Fonction affine

Exercice 14

a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $1-2x \leq x + 4$

b) Déduire de a) que :

- si $x \leq -4$ alors $\min(1 -2x ; x + 4)= x + 4$
- si $x \geq -4$ alors $\min(1 -2x ; x + 4)= 1-2x$

c) représenter graphiquement les trois fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et qui à x associent successivement

$x + 4$; $1 -2x$ et $\min(1 -2x ; x + 4)$.

Exercice 15

1) construire un triangle ABC isocèle en A, tel que BC = 6cm et tel que sa hauteur issue de A mesure 4 cm. Combien valent AB et AC ?

2) soit H le milieu de [BC] et M un point de [AH] on pose HM = x.

a) quel est l'ensemble de valeurs de M ?

b) la parallèle à (BC) menée par M coupe (AB) en P et (AC) en Q.

Exprimer la distance PQ en fonction de x.

c) tracer la droite d'équation $y = \frac{3}{2}(4 - x)$ et déterminer graphiquement pour quelle valeur de x on a PQ = 3 ; Retrouver ce résultat par le calcul et l'expliquer géométriquement.

Exercice 16

L'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = 4 ; On pose BC = x.

1) a) Quel est l'ensemble D des valeurs possibles de x.

b) Exprimer en fonction de x le périmètre P(x) de ABC.

C) Représenter graphiquement la fonction définie sur D par $x \mapsto P(x)$.

D) Quelle est la moyenne m entre les valeurs minimum et maximum de P ?

Quelle est la nature du triangle ABC

lorsque P(x) = m ?

2) Soit B' le projeté orthogonal de B sur (AC), on pose BB' = h.

a) Quel est l'ensemble D' des valeurs de h ?

Exprimer en fonction de h l'aire du triangle ABC

(A(h)).

Représenter graphiquement la fonction définie sur D' par $h \mapsto A(h)$.

d) Pour quelle valeur de h la fonction A est-elle maximum ?

Quelle est alors, la nature du triangle ABC ?

Fonction valeur absolue

Exercice 17

1) Sur un axe de repère (Ω ; $\vec{u}$), on considère les points I(1) ; J(-1) et M(x) ; Montrer que

$\Omega I + \Omega M = 1 + |x|$; et $JM = d(x\,;\,-1) = |x+1|$

2) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + |x|$ et $g(x) = |x+1|$.

a) tracer le graphique C de la fonction valeur absolue.

b) en déduire les tracés des courbes Cf et Cg représentant f et G.

Exercice 18

Soient A et B deux points distincts, O est le milieu de [AB], et x l'abscisse d'un point M de (AB) dans le repère (O ; $\overrightarrow{OA}$).

Exprimer MA + 2MB en fonction de x, et représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = MA + 2MB.

Fonction carrée

Exercice 18

Utiliser la représentation graphique de la fonction carré pour répondre à la question : Que peut-on dire de x^2 lorsque :

1) $1 \le x \le 2$; 2) $-1 \le x \le 2$; 3) $x \le -1$.

Exercice 19

Résoudre graphiquement

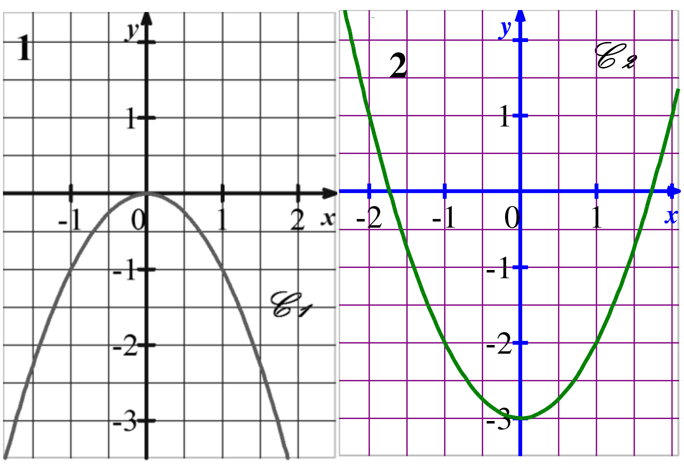
1) $x^2 \ge 1$; 2) $x^2 \le 2x$; 3) $x^2 = x + 1$.

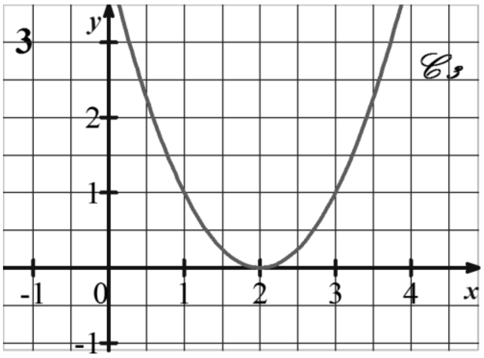
Exercice 20

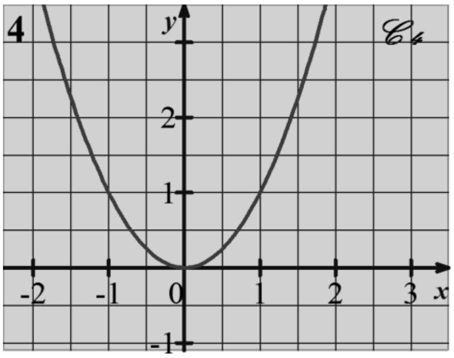
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction carré ***f***.

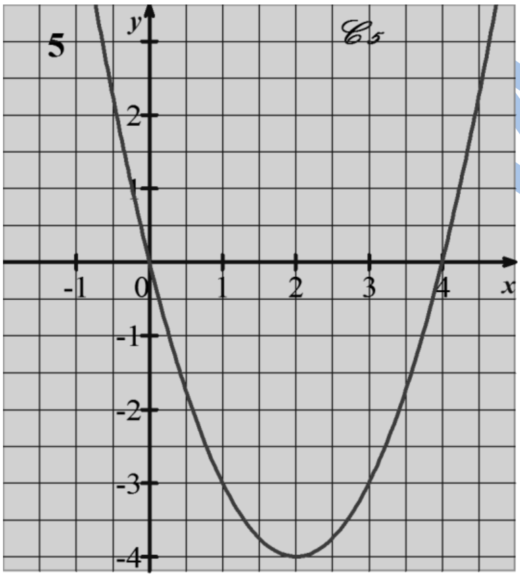
Les courbes ci-dessous se déduisent de $\mathscr{C}$ par des transformations simples.

En déduire les fonctions définies par ces courbes.









Exercice 21

Dans un repère orthogonal du plan, On considère le point A(3 ; 1) et la droite (D) d'équation y = 2x.

1) Pour un réel x quelconque développer

$(x - 1)^2 + 1$ et le réduire.

2) Soit M le point de D d'abscisse x, exprimer AM^2 En fonction de x seulement.

3) Montrer que AM^2 est minimum pour une valeur de x que l'on précisera.

Que vaut ce minimum ? Quelle est la position correspondante de M sur (D). Expliquer géométriquement ce résultat.

Exercice 22

Une feuille de papier rectangulaire a pour côtés 10cm et x cm, on la roule pour obtenir un cylindre :

- dont la hauteur est x et dont la section a pour circonférence 10
- dont la hauteur est 10 et dont la section a pour circonférence x.

a) exprimer en fonction de x le volume (en cm^3) de chacun des cylindres.

b) Représenter graphiquement les deux fonctions obtenues pour $0 \leq x \leq 20$.

c) Pour quelles valeurs de x le premier cylindre a-t-il un volume supérieur au second ?

On fera le calcul et on vérifiera sur le graphique.

Exercice 23

Soient ***f*** et ***g*** les fonctions définies sur [0 ; 8] par : ***f***(x) = -8x + 80 ; ***g***(x) = $-x^2 + 16x$;

1)a) soit x un réel ; développer (x -20)(x -4)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 24x + 80 = 0$.

c) Résoudre dans [0 ; 8] l'équation f(x) = g(x).

2) a) Représenter f et g dans un repère orthogonal (unité 5 mm sur (Ox)) et (0,5mmm sur (Oy)) ; On utilisera la calculatrice pour obtenir la représentation graphique de g.

b) interpréter géométriquement la question 1) c).

Fonction cube

Exercice 24

Le plan est muni d'un repère orthogonal

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; Connaissant la courbe $\mathscr{C}$ qui représente la fonction cube. Représenter graphiquement les fonctions ***f*** ; ***g*** et ***h*** définies sur $\mathbb{R}$ par :

f(x) = $-x^3$; ***g***(x) = $|x^3|$; ***h***(x) = $x^3 - 2$.

Justifier.

Exercice 25

L'unité de longueur est le centimètre. On considère un cône $\mathscr{C}$ de sommet S de hauteur 4 ; dont le cercle Γ de base a pour rayon 3.

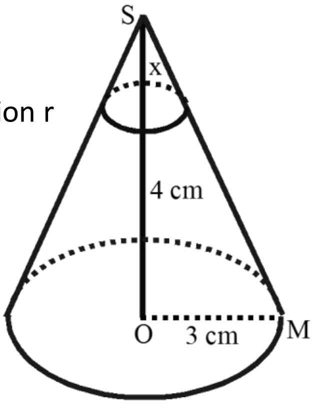
Un plan parallèle au plan de Γ est situé à la distance x de S coupe le cône selon un cercle γ .

1) Quel est l'ensemble des valeurs de x ?

2) a) Montrer que le rayon r(x) du cercle γ

vaut : $r(x) = \frac{3}{4}x$.

b) représenter graphiquement la fonction r définie sur D par : $x \mapsto r(x)$.



Pour quelle valeur de x le rayon de r est-il la moitié de celui de Γ ?

3) a) Exprimer en fonction de x l'aire A(x) de γ.

b) représenter graphiquement la fonction A définie sur D par $x \mapsto A(x)$.

Pour quelle valeur de x l'aire de γ est-elle la moitié de celle de Γ.

(On donnera la valeur exacte de la réponse et une valeur approchée à 10^{-2} près).

4) a) Exprimer en fonction de x le volume V(x) du cône $\mathscr{C}'$ de sommet S et de base γ.

b) représenter graphiquement la fonction V définie sur D par $x \mapsto V(x)$.

Pour quelle valeur de x le volume du cône $\mathscr{C}'$ et-il la moitié de celui de $\mathscr{C}$?(On donnera la valeur exacte de la réponse et une valeur approchée à 10^{-2} près)

Fonction racine carrée

Exercice 26

1) Résoudre

a) l'équation $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$; b) l'inéquation $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$.

2) Contrôler les résultats de ces questions graphiquement.

Exercice 27

f est une fonction paire et on sait que pour $x \geq 0$; $f(x) = \sqrt{x}$. Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ orthogonal.

1) Représenter graphiquement f

2) a) Calculer ***f***(-3) ; b) Que vaut ***f***(x) pour $x \leq 0$?

3) peut-on donner une formule unique pour ***f***(x) lorsque x désigne un réel quelconque.

Exercice 28

Le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan est orthogonal. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques des fonctions qui à x associent respectivement $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.

1) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

2) Montrer que $M(x ; y) \in \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ si $y^2 = x$.

$\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ est- elle la représentation graphique d'une fonction ?

Exercice 29

A et B sont deux points tels que AB = 4. Soient H un point de [AB] et M le point d'intersection entre la perpendiculaire en H à (AB)

et l'un des demi- cercles de diamètre [AB] ; On pose AH = x et AM = y.

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

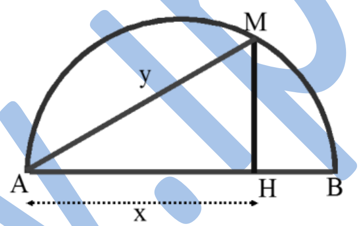
2) Calculer y pour x = 0, Pour $x \neq 0$ évaluer

cos BAM dans chacun des triangles HAM et BAM et en déduire que $y^2 = 4x$.

3) Tracer la courbe C qui représente y en fonction de x pour $x \in [0 ; 4]$.

Préciser les valeurs des de l'angle BAM pour

x = 1 et x = 2 et donner une explication géométrique de ces résultats.



Fonction inverse

Exercice 30

Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $\frac{1}{x} < 1$.

Exercice 31

Etudier la parité de la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par f(x) = $\frac{1}{|x|}$, puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Exercice 32

1) Représenter dans le même repère d'unité 1 cm la droite D d'équation x + y = 4 et la branche d'hyperbole définie pour x > 0 par y = $\frac{5}{x}$.

2) Déterminer graphiquement un encadrement d'amplitude 0,5 pour les abscisses a et b des points communs à D et H.

3) a) Développer et réduire $(x - 2)^2$.

b) Quelles sont les valeurs exactes de a et b ?

C) Améliorer les encadrements lus en 2) en donnant à l'aide de la calculatrice, des encadrements d'amplitudes 10^{-2}.

Exercice 33

1) Démontrer que :

a) si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} \geq -x + 2$; b) si $x < 0$ alors

$\frac{1}{x} < -x + 2$.

2) Vérifier graphiquement ces résultats en représentant sur le même graphique la droite

D : $y = -x + 2$; et l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1) Démontrer que :

a) si $x > 0$ alors $\boldsymbol{f}(x) > x$.

b) si $x > 1$ alors $\boldsymbol{f}(x) > \frac{1}{x}$.

c) si $x > 5$ alors $\boldsymbol{f}(x) < x + 0,2$

d) si $x \in]0 ; 1[$; alors $\boldsymbol{f}(x) < \frac{2}{x}$.

2) a) Représenter sur le même graphique les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$\boldsymbol{g}(x) = x$; $\boldsymbol{h}(x) = \frac{1}{x}$; $\boldsymbol{k}(x) = x + 0,2$; $\boldsymbol{l}(x) = \frac{2}{x}$.

b) en admettant que f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$ et en tenant compte des résultats de la question 1), représenter graphiquement la fonction ***f***.

Comparaison

Exercice 35

1) En utilisant la comparaison des fonctions usuelles entre elles, ranger par ordre croissant sans calcul :

a) 0,99 ; $0{,}99^3$; $0{,}99^2$; $\dfrac{1}{0{,}99}$; $\sqrt{0{,}99}$

b) $1{,}01^3$; $\sqrt{1{,}01}$; $\dfrac{1}{1{,}01}$; $1{,}01^2$; 1,01.

2) Contrôler les résultats en donnant pour chaque nombre un encadrement d'amplitude 10-3.

3) A l'aide des encadrements obtenus, comparer $\sqrt{1{,}01}$ et $\dfrac{1}{0{,}99}$ ainsi que $\sqrt{0{,}99}$ et $\dfrac{1}{1{,}01}$ et 0,99.

Ranger alors par ordre croissant les dix nombres précédents et 1.

XI- ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

Faire savoir

Le cours

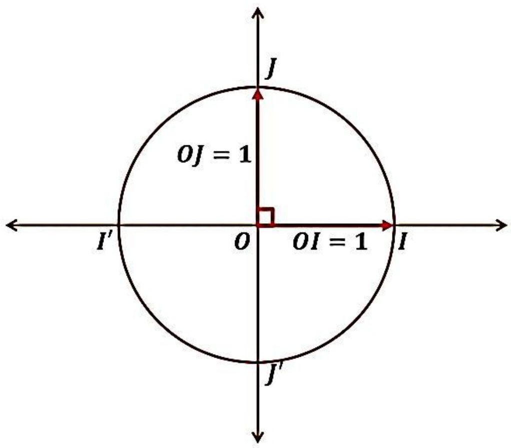
1. Angles orientés et cercle trigonométrique

a) Le cercle trigonométrique

Définition

Soit (O, I, J) un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont deux vecteurs unitaires.

Le cercle trigonométrique (Γ) est le cercle de centre O (*origine du repère*) et de rayon $OI = OJ = 1$.



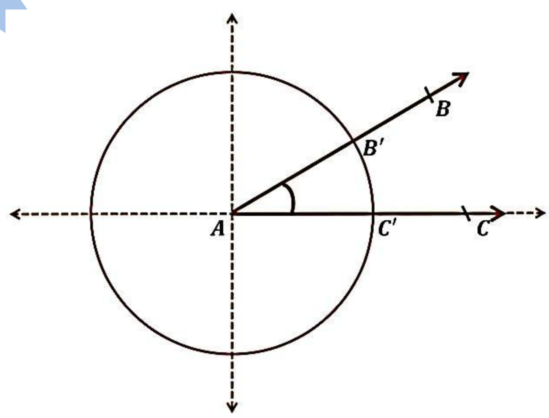
b) Mesure d'un angle en radian

Soit un angle géométrique $\widehat{BAC}$ (*mesuré en degré*).

Le cercle trigonométrique de centre A, est de périmètre 2π.

Il coupe les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ respectivement en C' et B'.

La mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{B'C'}$



Le tableau suivant donne la correspondance entre différentes unités de mesures angulaires.

Mesure en	180	90	60	45	30	0	x

degré (°)							
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y
Mesure en grade	200	100	$\frac{200}{3}$	50	$\frac{100}{3}$	0	z

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité :

$$y = \frac{\pi}{180}x, \qquad z = \frac{10}{9}x$$

Exemple 1

Compléter le tableau

$Mesure\ en\ degré$	75		
$Mesure\ en\ radian$		$\frac{\pi}{2}$	
$Mesure\ en\ grade$			40

Solution

Comme ce tableau présente un tableau de proportionnalité, on a :

y = $\frac{\pi}{180}x$ et $z = \frac{10}{9}x$.

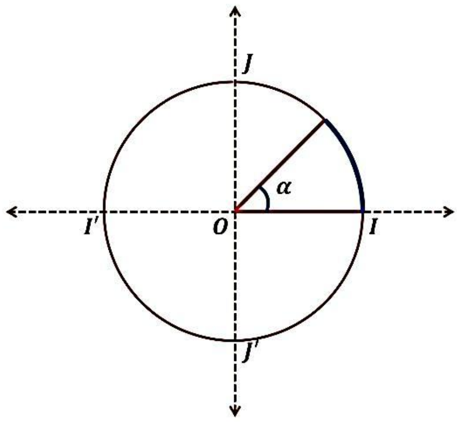
Avec x = 75, on a y = $\frac{\pi}{180}(75) = \frac{5\pi}{12}$; $z = \frac{10}{9}(75) = \frac{250}{3}$.

Avec y = $\frac{\pi}{12}$, on a x = $\frac{180}{\pi}\frac{\pi}{12} = 15$; $z = \frac{10}{9}(15) = \frac{50}{3}$.

Avec z = 40, on a x = $\frac{9}{10}40 = 36$; $y = \frac{\pi}{180}(36) = \frac{\pi}{5}$.

Mesure en degré	75	15	36
Mesure en radian	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$
Mesure en grade	$\frac{250}{3}$	$\frac{50}{3}$	40

Dans la suite de ce chapitre sauf précision contraire, les mesures des angles seront données en radian.



Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par un angle au centre de mesure α *(en radian)* est $R\alpha$.

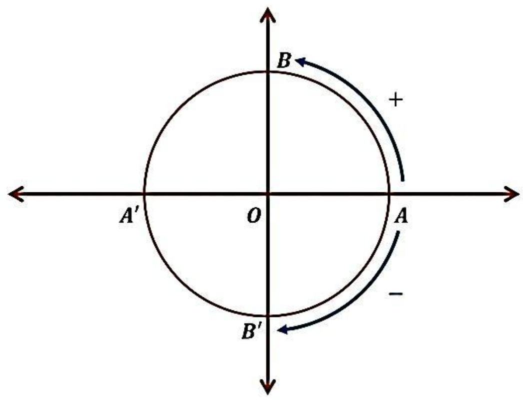
Le périmètre du cercle est $2\pi R$.

c) Le plan orienté

Un plan est orienté lorsqu'on distingue deux sens de parcours sur chacun de ses cercles.

- Un sens positif ou direct qui est le sens contraire à la rotation des aiguilles d'une montre *(sens antihoraire)*.

- Un sens négatif ou indirect qui est le sens de la rotation des aiguilles d'une montre *(sens horaire)*.



d) Mesure principale de l'angle orienté

a- Mesure principale d'un angle

Définition

Soit α un nombre réel positif et $\hat{A}$ un angle de mesure α, on considère x comme mesure principale de l'angle $\hat{A}$ si ;

$$\boldsymbol{\alpha = x\ [2\pi]}$$

$$ou$$

$$\boldsymbol{\alpha = x + 2k\pi} \quad (avec\ k \in \mathbb{R}_+)$$

Tel que ; $0 \leq x < 2\pi$ ou $0° \leq x < 360°$

(x *comprise entre* $0°$ *et* $360°$ *ou entre* 0 *et* 2π *radians).*

b- Méthode

Pour déterminer la mesure principale d'un angle en degré, on fait la division euclidienne de sa mesure donnée par 360 sans la virgule, et on prend le reste de la division.

Exemple 2

$$11\ 000 \div 360 = 30 \times 360 + 200$$

Donc, $mesure\ principale\ (11\ 000) = 200°$

Remarque

On peut continuer jusqu'à la virgule et multiplier la partie décimale du résultat par 360.

Exemple 3

$$11\ 000 \div 360 = 30.555\ ...$$

$$0{,}555\ ... \times 360 = 200°$$

c- Méthode

Pour calculer la mesure principale d'un angle en radian, on divise la fraction par 2 puis on soustrait du résultat, le plus grand nombre entier inférieur ou égal au résultat, et on multiplie le nouveau résultat par le dénominateur de la deuxième fraction pour obtenir le numérateur de la fraction résultat.

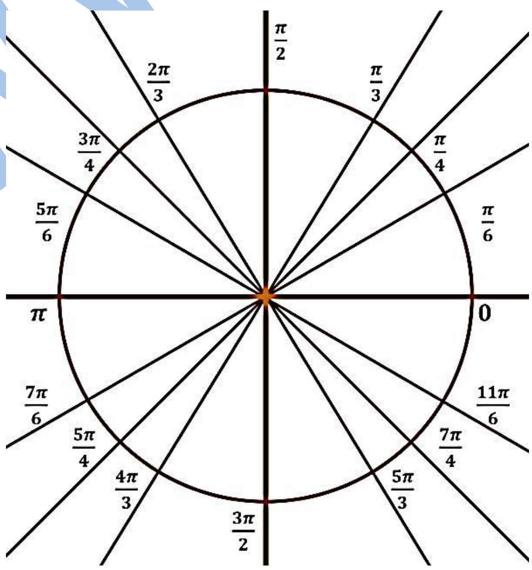
Exemple 4

$$\frac{25\pi}{4} \Longrightarrow \frac{\frac{25\pi}{4}}{2} \Longrightarrow 25 \div 8 = 3{,}125 \Longrightarrow 3{,}125 - 3 = 0{,}125$$

$$\Longrightarrow 0{,}125 \times 8 = 1 \Longrightarrow \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\frac{2\ 300\pi}{27} \Longrightarrow \frac{\frac{2300\pi}{27}}{2} \Longrightarrow 2\ 300 \div 54 = 42{,}592\ ... \Longrightarrow 42{,}592 - 42 = 0{,}592\ ...$$

$$\Longrightarrow 0{,}592\ ... \times 54 = 32 \Longrightarrow \frac{2\ 300\pi}{27} = \frac{32\pi}{27}\ [2\pi]$$



Exemple 5

Donner les mesures principales des angles suivants :

1°/ $\hat{A} = 800°$; **2°/** $\hat{B} = 1\,300°$; **3°/** $\hat{C} = 4\,000°$; **4°/** $\widehat{D} = 11\,000°$

5°/ $\hat{E} = 13\,900°$; **6°/** $\hat{F} = 56\,070°$; **7°/** $\hat{G} = 10\,800°$

Solution

1°/ $\hat{A} = 800° \longrightarrow mes(\hat{A}) = 80°$

2°/ $\hat{B} = 1\,300° \longrightarrow mes(\hat{B}) = 220°$

3°/ $\hat{C} = 4\,000° \longrightarrow mes(\hat{C}) = 40°$

4°/ $\widehat{D} = 11\,000° \longrightarrow mes(\widehat{D}) = 200°$

5°/ $\hat{E} = 13\,900° \longrightarrow mes(\hat{E}) = 220°$

6°/ $\hat{F} = 56\,070° \longrightarrow mes(\hat{F}) = 270°$

7°/ $\hat{G} = 10\,800° \longrightarrow mes(\hat{G}) = 0°$

Exemple 6

Donner les mesures principales des angles suivants :

1°/ $\hat{A} = \frac{17\pi}{8}$; **2°/** $\hat{B} = \frac{25\pi}{4}$; **3°/** $\hat{C} = \frac{350\pi}{18}$; **4°/** $\widehat{D} = \frac{1\,536\pi}{12}$; **5°/** $\hat{E} = \frac{2\,300\pi}{27}$

Solution

1°/ $\hat{A} = \frac{17\pi}{8} \longrightarrow \hat{A} = \frac{16\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

2°/ $\hat{B} = \frac{25\pi}{4} \longrightarrow \hat{B} = \frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3°/ $\hat{C} = \frac{350\pi}{18} \longrightarrow \hat{C} = \frac{324\pi}{18} + \frac{26\pi}{18} = \frac{13\pi}{9}\ [2\pi]$

4°/ $\widehat{D} = \frac{1\,536\pi}{12} \longrightarrow \widehat{D} = 128\pi = 0\ [2\pi]$

5°/ $\hat{E} = \frac{2\,300\pi}{27} \longrightarrow \hat{E} = \frac{2\,268\pi}{27} + \frac{32\pi}{27} = \frac{32\pi}{27}\ [2\pi]$

Exemple 7

Sachant que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{200\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale α de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

Solution

On a : $\alpha = \frac{200\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, et $-\pi < \alpha \leq \pi$. Donc, $-\pi < \frac{200\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$;

$-1 - \frac{200}{3} < 2k \leq 1 - \frac{200}{3} \Leftrightarrow \frac{-203}{6} < k \leq \frac{-197}{6}$. Donc, $-33{,}8 < k \leq -32{,}8$. ; Or $k \in \mathbf{Z}$, donc $k = -33$.

D'où $\alpha = \frac{200\pi}{3} + 2(-33)\pi = \frac{200\pi}{3} - 66\pi = \frac{200\pi - 198\pi}{3}$. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

d- Mesure principale d'un angle orienté

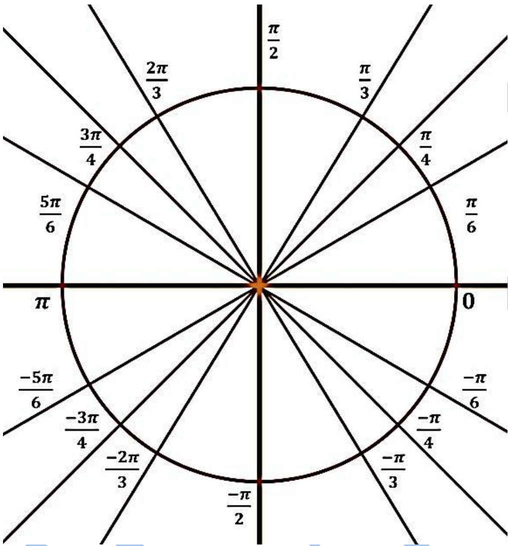
Définition

Soit α un nombre réel positif et $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α, on considère x comme mesure principale de l'angle orienté $\hat{A}$ si ;

$$\boldsymbol{\alpha = x\ [2\pi]}$$
$$ou$$
$$\boldsymbol{\alpha = x + 2k\pi} \quad (avec\ k \in \mathbb{R})$$

Tel que ; $-\pi < x \leq \pi$ ou $-180° < x \leq 180°$

(x comprise entre $-180°$ et $180°$ ou entre $-\pi$ et π radians).



Exemple 8

Donner les mesures principales des angles orientés suivants :

$$\frac{25\pi}{2};\ \frac{-31\pi}{5};\ \frac{7\pi}{4};\ -\frac{121\pi}{3}$$

Solution

- $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi + \pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2}$

$$= 12\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$$

- $\frac{-31\pi}{5} = \frac{-30\pi - \pi}{5} = \frac{-30\pi}{5} + \frac{-\pi}{5}$

$$= -6\pi + \frac{-\pi}{5} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{-31\pi}{5} = \frac{-\pi}{5}\ [2\pi]}$$

- $\frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$

- $-\frac{121\pi}{3} = \frac{-120\pi - \pi}{3} = -\frac{120\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$

$$= -40\pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow -\frac{\mathbf{121}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\ [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$$

e) Angles orientés et vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On désigne par l'écriture $(\vec{u};\vec{v})$, l'angle orienté déterminé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$, sera notée $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a :

⊠ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 0$ Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (*angle orienté nul*).

⊠ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \pi$ Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires (*angle orienté plat*).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires.

Soit A un point donné du plan orienté, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et il existe un seul point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$;

$$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}).$$

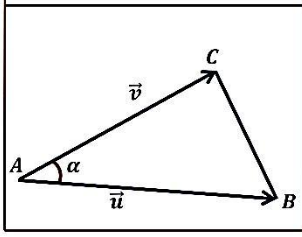
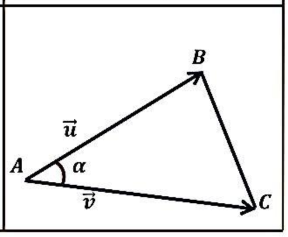
Soit α la mesure de l'angle géométrique $\hat{A}$ du triangle ABC (*On rappelle que* $\alpha \in]0;\ \pi[$).

⌂ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = +\alpha = \alpha$,

Le triangle ABC est dit direct : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) > 0$.
La base $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ est dite directe.
Le repère $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$ est dit direct.

⌂ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -\alpha$,

Le triangle ABC est dit indirect : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) < 0$.
La base $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ est dite indirecte.
Le repère $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$ est dit indirect.

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \alpha > 0$	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\alpha < 0$
	

Propriétés

⊠ La mesure principale de l'angle orienté associé à deux vecteurs non nuls, appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

⊠ Pour tous deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$.

$(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$ sont deux angles orientés opposés

☒ Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right) + \left(\widehat{\vec{w};\vec{v}}\right)$ (*Relation de Chasles*).

☒ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls et de même signe.

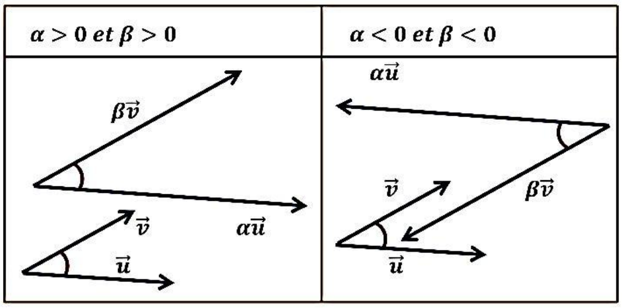
⌂ **Si $\boldsymbol{\alpha} > 0$ et $\boldsymbol{\beta} > 0$;**

L'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et l'angle $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$ sont de la même orientation (*Tous les deux directs, ou tous les deux indirects*).

⌂ **Si $\boldsymbol{\alpha} < 0$ et $\boldsymbol{\beta} < 0$;**

L'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et l'angle $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$ sont d'orientation contraire (*si* $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ *est direct,* $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$ *est indirect, et si* $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$ *est indirect,* $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$ *est direct*).

Dans les deux cas (α *et* β *tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs*) : $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}}\right)$.



Remarque

Si $\boldsymbol{\alpha} < 0$

☒ $\left(\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right) = \pi$

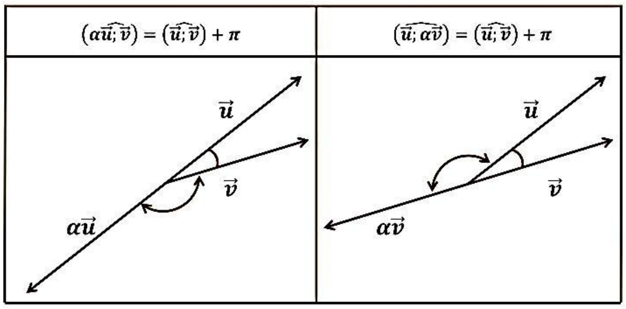
$$\Longrightarrow \left(\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}\right) = \pi - \left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) + \pi}$$

☒ $\left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}\right) = \pi$

$$\Longrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}\right) = \pi - \left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) + \pi}$$



***ABC* est un triangle direct :**

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) = \pi.$$

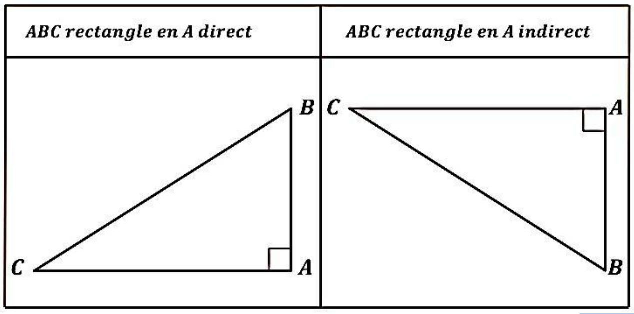
$$\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right) = -\pi$$

ABC est un triangle rectangle en A, direct, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).

ABC est un triangle rectangle en A, indirect, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -\frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).



Exemple 9

ABC est un équilatéral direct de centre O, A' milieu de $[BC]$; ABD est un triangle indirect rectangle et isocèle en A, I milieu de $[BD]$

Donner la mesure principale pour chacun des angles orientés suivant :

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{AA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}})$;

$(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}})$;

Solution

$\left(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AC} \,;\, \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{-\pi}{6}$;

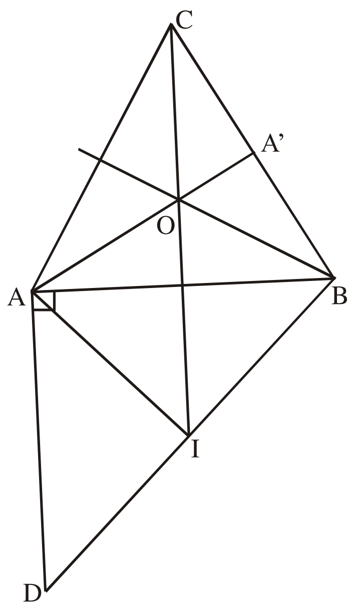
$\left(\overrightarrow{BA} \,;\, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AD} \,;\, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{OA} \,;\, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{BD} \,;\, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{-\pi}{4}$;

$\left(\overrightarrow{OB} \,;\, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{IB} \,;\, \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{OA} \,;\, \overrightarrow{OA'}\right) = \pi$;

$$\left(\overrightarrow{AI} \,;\, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AI} \,;\, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$



Exemple 10

ABC est un triangle tel que ;

$$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}, et\ (\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = \frac{-2\pi}{3}$$

I et J étant les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$, puis montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{4}$

Solution

On a : $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi$

Or, $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}\ \right)=-\left(\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{BC}\ \right)=\frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi$;

Donc $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi-\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$.

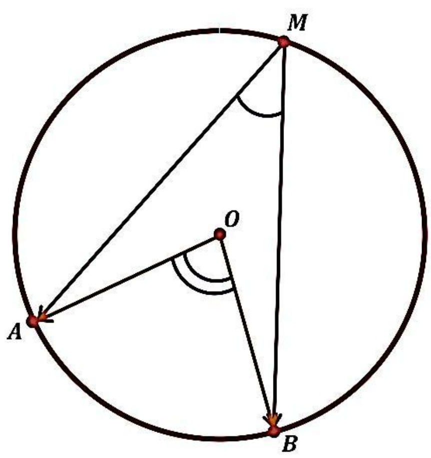
On a : $\left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AJ}\right)=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$.

f) Théorème de l'angle inscrit

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A, B deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Pour tout point $M \in (\mathcal{C})$ et distinct de A et B, on a :

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\ [\boldsymbol{2\pi}]$$

$[\boldsymbol{2\pi}]$ se lit « **modulo $\boldsymbol{2\pi}$** » ou « **congru $\boldsymbol{2\pi}$** »



Démonstration

OAM est un triangle isocèle en O :

$$\Longrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right)$$

Dans le triangle OAM, on a ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)=\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)=\boldsymbol{\pi}}\ \boxed{1}$$

OBM est un triangle isocèle en O, de même on a :

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right)=\boldsymbol{\pi}}\ \boxed{2}$$

$$\boxed{1}+\boxed{2}\Longrightarrow$$

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right)=\pi+\pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)=2\pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)+2\pi$$

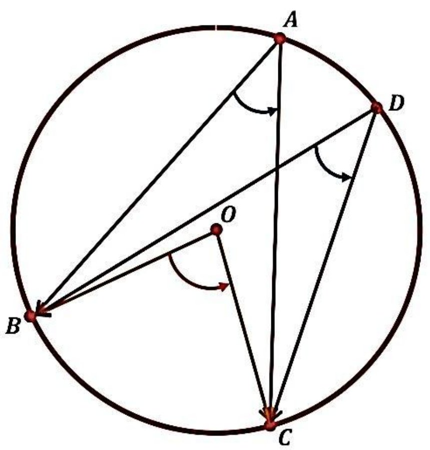
$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\ \ [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]}$$

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, et soit $A, B, C\ et\ D$ quatre points distincts de $(\mathcal{C})$, alors on a :

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$$

Les points B et C sont appelés les points de base.



Exercice

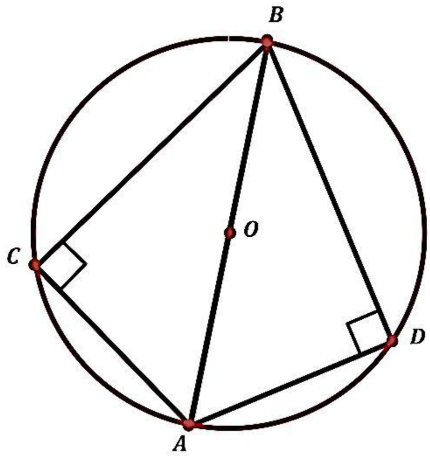
Démontrer la propriété précédente

Remarque 1

Inversement, si on a quatre points, A, B, C et D tels que ; $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$, alors , A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

Remarque 2

Si ABC et ABD sont deux triangles rectangles ayant le même hypoténuse, alors A, B, C et D sont sur un même cercle.



Exercice

Soit ABC un triangle et soir $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

Et soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, de B et de C.

Soit P, Q et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC), (AB) et (AC).

1° Faire une figure ;

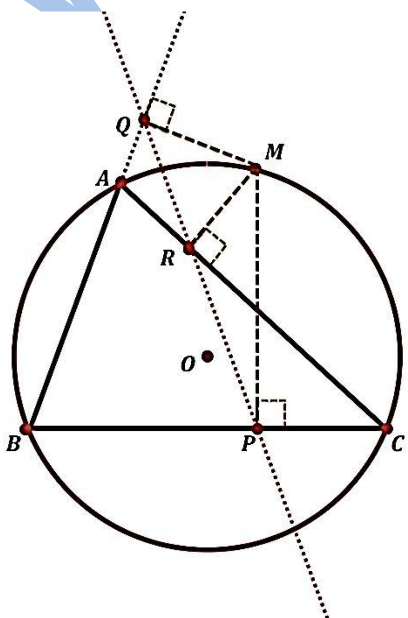
2° Montrer que P, Q et R sont alignés.

g) Théorème (*droite de Simson – Wallace*)

Dans un triangle ABC, soit M un point du plan et U, V et W les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- M est sur le cercle circonscrit au triangle ;
- U, V et W sont alignés.

Dans ce cas, la droite portant les points U, V et W s'appelle la droite de **Simson** (*ou droite de **Wallace***) associée au point M.



En particulier :

- la droite de Simson associée à un sommet est la hauteur issue de ce sommet ;
- la droite de Simson du point diamétralement opposé à un sommet sur le cercle circonscrit est le côté opposé à ce sommet.

h) Théorème de la tangente

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Si (D) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A, alors $\forall\, T \in (D)$, on a ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Exercice

Démontrer le théorème de la tangente

2- Trigonométrie

a) Trigonométrie dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A ;

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{coté adjacent à } \hat{B}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

$$\text{cotan}\,\hat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{\text{côté opposé à } \hat{B}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}$$

$\cos\hat{C} = \sin\hat{B}$

$\sin\hat{B} = \cos\hat{C}$

$\tan\hat{C} = \text{cotan}\,\hat{B}$

$\text{cotan}\,\hat{C} = \tan\hat{B}$

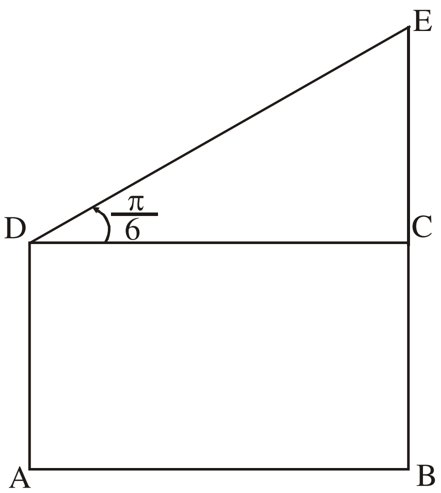
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (*Relation de Pythagore*)

$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ (*Angles complémentaires*).

Exemple 11

$ABCD$ est un rectangle direct tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. DCE est un triangle direct rectangle en C tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Calculer BE.

Solution



On a BE = BC + CE ; Or BC = AD = 3 ; et tan $\frac{\pi}{6} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow$

CE = CD tan $\frac{\pi}{6}$ = AB tan $\frac{\pi}{6}$ = 5$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Donc, BE = 3 + $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$= \frac{9+5\sqrt{3}}{3}.$$

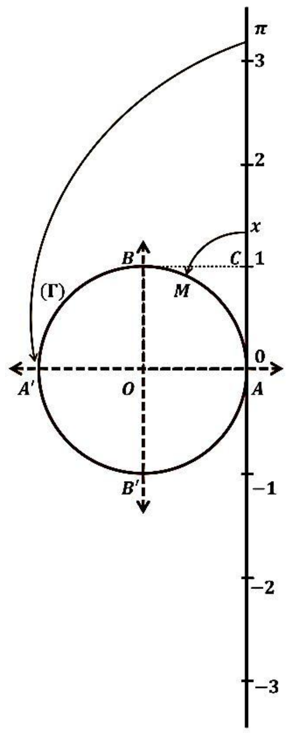
b) Représentation des réels sur le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle (Γ) de rayon 1.

Son périmètre est donc égal à 2π.

A tout réel x, on associe un point M de (Γ) de la façon suivante :

Au réel 0, on associe le point A (*voir figure*)



A un réel $x > 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens positif sur (Γ), ait pour longueur x.

A un réel $x < 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens négatif sur (Γ), ait pour longueur $|x|$.

Pour visualiser cette fonction de $\mathbb{R}$ dans (Γ), soit (Δ) la tangente à (Γ) en A.

Munissons (Δ) du repère $(A; C)$ tel que $OACB$ soit un carré.

On peut considérer que (Δ) est un fil gradué représentant $\mathbb{R}$ que l'on enroule sur (Γ).

A tout réel x correspond bien un seul point M du cercle trigonométrique (Γ) (*voir figure*).

Soit x un réel et M le point correspondant du cercle trigonométrique, on dit que x est une mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right)$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) = x \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) = x + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Cosinus et sinus d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right) = x$

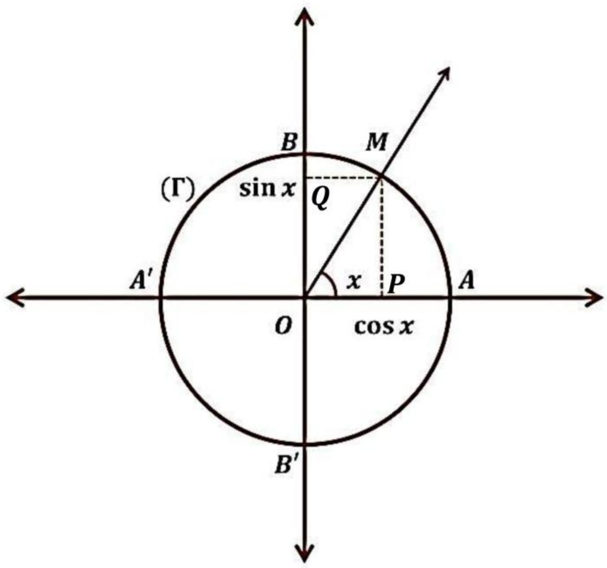
Dans le repère orthonormal direct $(O; A; B)$, on a

$\cos x$ est l'abscisse du point M.
$\sin x$ est l'ordonnée du point M.

Avec P et Q projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB).

On a :

$$\cos x = \overline{OP} \text{ et } \sin x = \overline{OQ}.$$



d) Propriétés :

☒ Des réels x et y vérifient $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $x = y + 2k\pi$.

☒ Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

☒ $\forall\, x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$

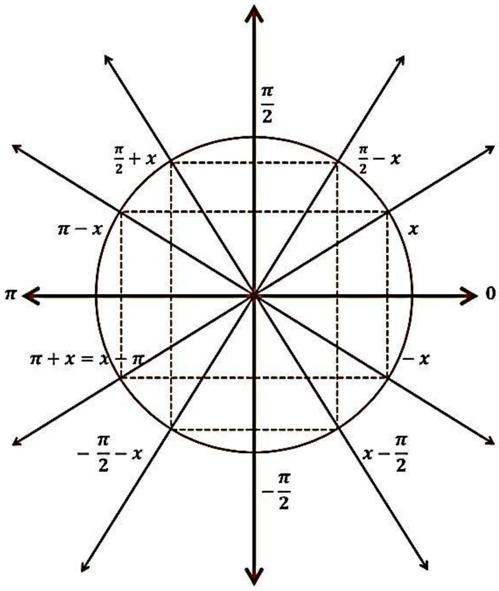
☒ $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$

☒ $\forall\, x \in [0\,;\, \pi]$; $\sin x \geq 0$.

e) Lignes trigonométriques ; Angles associés – Angles remarquables

Soit $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α ;

Les angles : $-\alpha,\ \pi - \alpha,\ \pi + \alpha,\ \frac{\pi}{2} + \alpha$; sont habituellement appelés angles associés à $\hat{A}$.



f) Propriétés

Pour tout réel x (*fig. ci-dessus*) on a :

☒ $\cos(-x) = \cos(x)$, et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

☒ $\cos(\pi + x) = -\cos x$, et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

☒ $\cos(\pi - x) = -\cos x$, et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour tout réel x (*fig. ci-dessus*) on a :

☒ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

☒ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Remarques

Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;

Ainsi :

$$tan(\pi - \alpha) = \frac{sin(\pi - \alpha)}{cos(\pi - \alpha)} = \frac{sin\,\alpha}{-\,cos\,\alpha} = -\,tan\,\alpha.$$

Exemple 12

Sachant que ; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, calculer ;

$\mathbf{1}°\ \cos\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$

$\mathbf{2}°\ \cos\frac{7\pi}{6}$; $\sin\frac{7\pi}{6}$

$\mathbf{3}°\ \cos\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{3}$

$\mathbf{4}°\ \cos\frac{2\pi}{3}$; $\sin\frac{2\pi}{3}$

Solution

$$\mathbf{1}^\circ \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{2}^\circ \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{3}^\circ \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{4}^\circ \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 13

A/ Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
$cos\, x$			
$sin\, x$			
$tan\, x$			
$cotan\, x$			

B/ Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{1}{2} \\ sin\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$.

Solution

A) Voici le tableau complété

- cos $\left(\frac{-\pi}{3}\right)$= cos$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = $\frac{1}{2}$;
- sin$\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ = $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$;
- tan$\left(\frac{-\pi}{3}\right)$= $\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$.
- cotan$\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ = $\frac{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$.

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
cosx	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
sinx	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
tanx	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
cotanx	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$\sqrt{3}$

On a : $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$.

- cos $\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ = -cos $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; sin $\frac{3\pi}{4}$ = sin$\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ = sin $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- tan $\frac{3\pi}{4}$ = $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$ = -1 ; cotan $\frac{3\pi}{4}$ = $\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ = -1

On a : $\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$. Donc,

- cos $\frac{7\pi}{6}$ = cos $\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ = -cos $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; sin $\frac{7\pi}{6}$ = sin $\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ = -sin $\frac{\pi}{6}$ = - $\frac{1}{2}$;
- tan $\frac{7\pi}{6}$ = $\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; cotan $\frac{7\pi}{6}$ = $\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-}{2}}$ = $\sqrt{3}$

B) a) on a : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$; b) $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\cos\frac{-\pi}{4}\\ \sin\theta=\sin\frac{-\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{-\pi}{4}$

c) $\begin{cases}\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\theta=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$;

d) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\left(-\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(-\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{5\pi}{6}$.

g) Tableau de valeurs trigonométriques de certains angles remarquables

1°/ Pour les mesures principales directes positives

α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\boxtimes$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
$\text{cotan}\, x$	$\boxtimes$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\boxtimes$

2°/ Pour les mesures principales indirectes négatives

α en radian	0	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\boxtimes$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0
$\text{cotan}\, x$	$\boxtimes$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\boxtimes$

Fonctions circulaires

❖ Fonction $x \mapsto \sin x$:

- elle est définie sur $\mathbf{R}$
- elle a pour période 2π c'est –à- dire que $\forall$ x $\in \mathbf{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- elle est impaire, car $\sin(-x) = -\sin x$

Tableau de variation sur [0 ; π]

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La courbe de représentative $\mathscr{C}$ de sinx , dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est donnée à la figure 1.

La courbe $\mathscr{C}$ est appelée une sinusoïde.

❖ Fonction x $\mapsto$ cosx :

- elle est définie sur $\mathbb{R}$
- elle a pour période 2π c'est –à- dire que $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- elle est paire, car cos(-x) = cosx

Tableau de variation sur [0 ; π]

x	0	π
cosx	1 ↘	-1

La courbe de représentative $\mathscr{C}$' de cosx , dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est donnée à la figure 2.

On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$ transforme $\mathscr{C}$' en $\mathscr{C}$. Donc $\mathscr{C}$' est une sinusoïde.

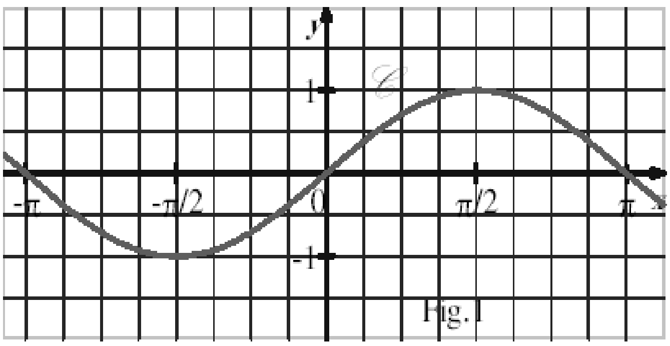


Fig.1

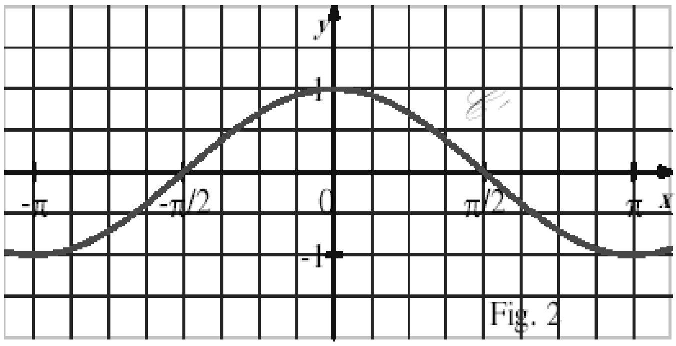


Fig. 2

h) Formules trigonométriques

Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b :

1) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
3) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;
4) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstrations au chapitre 12 (*Produit scalaire*)

Exemple 14

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'égalité : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Solution

$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Exemple 15

En utilisant les formules d'addition, calculer ;

$$\cos\frac{7\pi}{12} \;\; et \;\; \sin\frac{7\pi}{12} \;;\; \cos\frac{\pi}{12} \;\; et \;\; \sin\frac{\pi}{12}$$

Solution

$\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$$

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

Exercice généraux

Exercice 1

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles sécants en A et B.

M est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B. La droite (AM) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N. Les tangentes respectives aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ en M et N se coupent en T.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que M, T, N et B sont sur un même cercle.

Exercice 2

Soit deux cercle $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs, O et O' sécants en I et J, et soit $A \in (\mathcal{C})$ et $A' \in (\mathcal{C}')$ tels que ;

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{O'I}; \overrightarrow{O'A'})$$

1° Faire une figure ;

2° Montrer que A, J et A' sont alignés ;

Exercice 3

$(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$, (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites parallèles passant respectivement par A et B. M est un point de $(\mathcal{C})$ qui se projette orthogonalement sur $(AB), (\Delta_1)$ et (Δ_2) respectivement en I, J et K.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{JK}; \overrightarrow{JI}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}}\right)$;

3° Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{KI}; \overrightarrow{KJ}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}}\right)$;

4° En déduire que IJK est rectangle en I.

Exercice 4

$ABCD$ est un quadrilatère, I est le point d'intersection des diagonales. P, Q, R et S sont les projetés orthogonaux respectifs de I sur $(AB), (BC), (CD)$ et (DA).

1° Faire une figure ;

2° Montrer que ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{PS}; \overrightarrow{PQ}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC}}\right)$$

3° Montrer que ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{RS}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA}}\right)$$

4° En déduire que P, Q, R et S sont sur le même cercle si, et seulement si ; $2\left(\widehat{\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{CA}}\right) = 0$

Repères orthonormaux

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Exercice 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Soit x un nombre réel. On considère les deux points ; A(1 ; x) et B(x ; 1).

Déterminer x pour que mes $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 6

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère les points A(-1 ; 1) , B($\frac{5}{2}$; 4), C(-2 ; 3) , D($\frac{-11}{2}$, 0).

a) Démontrer que ABCD est un losange.

b) Evaluer mes $\widehat{ABC}$ et mes $\widehat{ABD}$

Exercice 7

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On se propose de calculer la distance du point A (5 ; -2) à la droite $\mathscr{D}$ d'équation

4x –y -5 = 0.

a) Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$' passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection H de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$'.
c) En déduire la distance AH.

Exercice 8

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par A(3 ; 5) et de vecteur normal $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre

Ω(-1 ; 2) et de rayon $2\sqrt{2}$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Faire une figure.

Exercice 9

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère les points A(-1 ; $\frac{1}{2}$) , B(1 ; $\frac{5}{2}$), et C(2 ; $\frac{3}{2}$).

Vérifier que $\widehat{ABC}$ = 90°.

Déterminer une équation du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec les axes du repère.

Exercice 10

Soit ABC un triangle. On donne AB = 5,4 cm, AC = 3,6 cm et $\hat{A}$= 62°.

Faire une figure.

Calculer BC à 1 mm près.

Calculer $\hat{B}$ et $\hat{C}$ à 1° près.

Exercice 11

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

On donne AB = 6,5, AI = 4,5 et AC = 3,5.

a) Calculer la valeur exacte de BC.

b) Calculer une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ à 0,1° près.

c) Calculer l'aire S du triangle ABC à 10^{-1} près.

XII- PRODUIT SCALAIRE

Faire savoir

Le cours

1. Les différentes expressions du produit scalaire

a- Expression avec un $cosinus$

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel défini par ;

- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} = \vec{0}}$ **ou** $\boldsymbol{\vec{v} = \vec{0}}$ **;**
- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}\right)}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} \neq \vec{0}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}$**.**

b- Fixation par des points

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que ;

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}\ et\ \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}}$$

Remarque

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ "

c- Cas particuliers

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ;

1° Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il y a deux cas de figure ;

$$\begin{cases} \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = 0 \Longrightarrow\ \vec{u}\ \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens} \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \\ \qquad\qquad\qquad ou \\ \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \pi \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont sens contraires} \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \end{cases}$$

2° Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ; $\vec{u}.\vec{v} = 0$

3° $Si\ \vec{u} \perp \vec{v}$, alors ; $\alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$

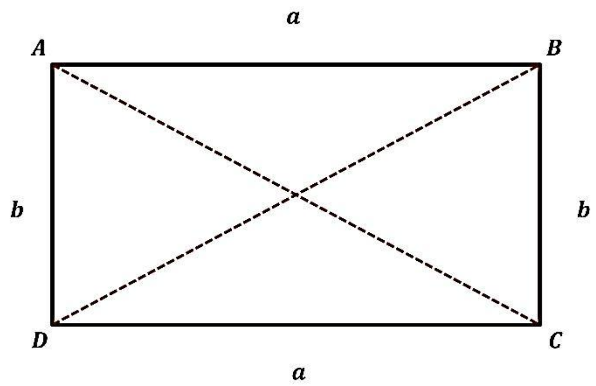
Exemple 1

Soit $ABCD$ un rectangle tel que ;

$$L = AB = CD = a \text{ et } l = AD = BC = b$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$,

Solution



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\| \times -1 = -a \times a = -a^2$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{DC}\| \times 1 = a \times a = a^2$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AD}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times 1 = b \times b = b^2$$
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BB}\| = 0$$

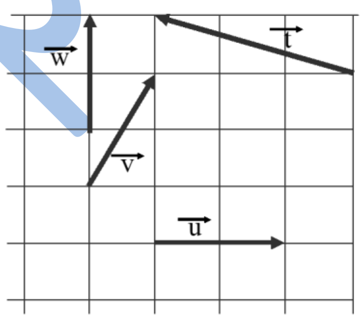
Exemple 2

Les carrés du quadrillage de la figure ci-contre

ont des côtés de longueur 1.

Lire sur la figure les valeurs des produits scalaires.

$\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{t}$; $\vec{v}.\vec{w}$; $\vec{t}.\vec{w}$.

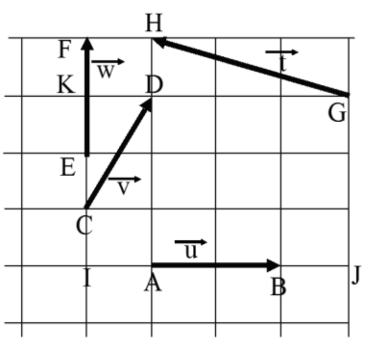


Solution

Sur la figure ci-contre, on place les points nécessaires

à la représentation des vecteurs donnés.

Puis, on utilise l'expression des projetés orthogonaux comme suit :



$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA} = AB \times IA = 2 \times 1 = 2;$$
$$\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{II} = 0 \ (\text{car}\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EF})$$
$$\vec{u}.\vec{t} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{JA} = -AB \times JA = -2 \times 3 = -6;$$
$$\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{CK} = EF.CK = 2 \times 2 = 4;$$
$$\vec{t}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{t} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{KF} = EF \times KF = 2 \times 1 = 2.$$

Exemple 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

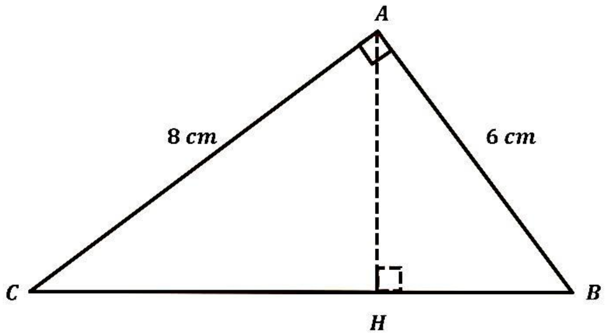
$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Solution



1° $AB \times AC = AH \times BC$

$$\Longrightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8\ cm$$

$$BH = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{36 - 23{,}04}$$

$$= \sqrt{12{,}96} = 3{,}6\ cm$$

$$CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$$

2° $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BH}.\overline{BC} = 3{,}6 \times 10 = 36$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overline{CH}.\overline{CB} = 6{,}4 \times 10 = 64$$

3° $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AA} = AB \times 0 = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ car $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conclusion

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

d- Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan

Le réel $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$

On a ; $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

En particulier, pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$

e- Propriétés du produit scalaire

1° Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$;

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

2° Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

3° $\vec{u} \perp \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

4° Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$ et tout nombre réel k ;

1. $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
4. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
5. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

f- Produit scalaire et norme

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Exercice

Montrer cette propriété.

Exemple 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que ;

$$\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 4 \; et \; \vec{u}.\vec{v} = -6$$

1° Calculer $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$;

2° Calculer $(3\vec{u} - \vec{v})^2$, puis en déduire $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$;

3° Calculer $\cos(\vec{u};\ \vec{v})$.

Solution

1° $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$

$$= \vec{u}.3\vec{u} + \vec{u}.(-\vec{v}) + 3\vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.(-\vec{v})$$
$$= 3\vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + 3\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2$$
$$= 3\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - \|\vec{v}\|^2$$
$$= 3 \times 5^2 + 2 \times -6 - 4^2$$
$$= 75 - 12 - 16 = 47$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 47}.$$

2° $(3\vec{u} - \vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 - 2(3\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$

$$= 9\vec{u}^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$= 9\|\vec{u}\|^2 - \vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$= 9 \times 5^2 - 6 \times (-6) + 4^2$$

$$= 225 + 36 + 16 = 277$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(3\vec{u} - \vec{v})^2 = 277 \Longrightarrow \|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{277}}$$

$\mathbf{3°}$ $\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{-6}{5 \times 4} = -\dfrac{6}{20} = -\dfrac{3}{10}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = -\dfrac{3}{10}}$

g- Conséquence sur le parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Si on pose ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on a ;

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)}$$

h- Interprétation géométrique

Pour tout point A et tous points B et C distincts de A on a ;

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC.\cos\widehat{BAC}.$$

En effet ;

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB\ ;\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC\ ;$$

$$\text{et}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \cos\widehat{BAC} = \cos\hat{A}$$

b) Expression avec des projetés orthogonaux

Définition 2

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel ;

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}}$$

Où ; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).

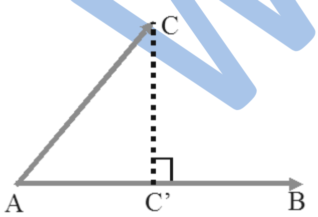


Fig.1

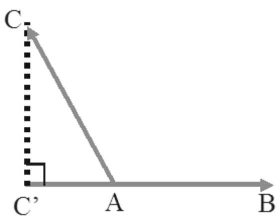


Fig.2

Fig.3

a- Conséquence pratique

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = AC$.

En notant C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.

Par conséquent ;

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $C' = A$ ($\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux*).

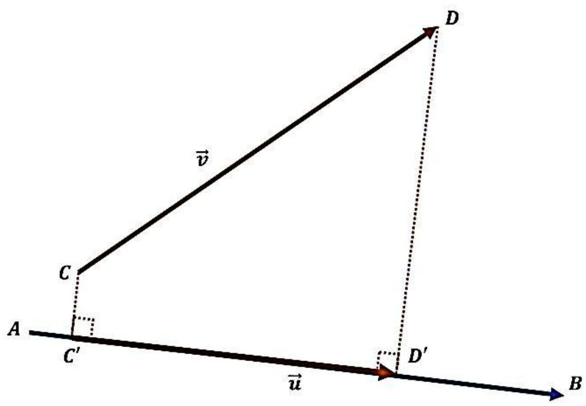
b- Produit scalaire et projection

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et de D sur la droite (AB).

On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB).



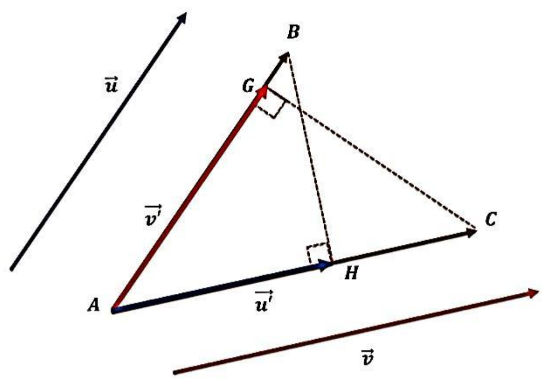
c- Généralisation

Exercice

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, montrer que l'on a ;

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{u'}.\vec{v}$$

Où $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont respectivement les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{v}$ et $\vec{u}$.



2. Le produit scalaire en géométrie analytique

a) L'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

1°/ Orthogonalité de deux vecteurs

A°) Rappel

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ est orthonormée si, et seulement si, $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$

B°) Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si ; Il existe deux bipoints représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés par des droites perpendiculaires.

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

C°) Orthogonalité et norme

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a ;

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$$

Cette relation permet de démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque ;

$$\|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}\|^2 = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$$

Exemple 5

$ABCD$ est un rectangle dont la longueur et la largeur mesurent respectivement ;

$$AB = 9 \quad et \quad AC = 5$$

Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

Solution

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right)$$

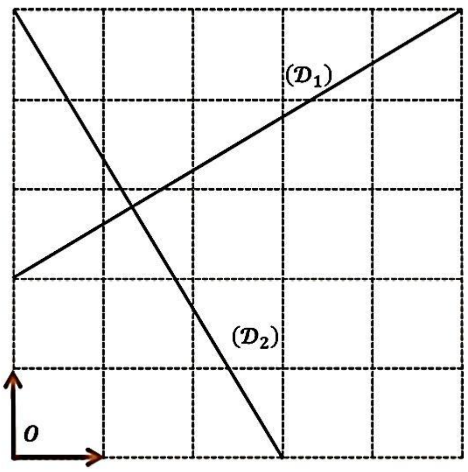
$$= AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} - BC^2$$

$$= 9^2 + 0 + 0 - 5^2 = 81 - 25 = 56$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 56}$$

Exemple 6

Sur la figure suivante, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont-elles perpendiculaires ?



Solution

D'après la figure, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont respectivement pour vecteurs directeurs ;

$$\vec{u}\binom{5}{3} \; et \; \vec{v}\binom{-3}{5}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant orthogonaux car,

$$5 \times (-3) + 3 \times 5 = -15 + 15 = 0$$

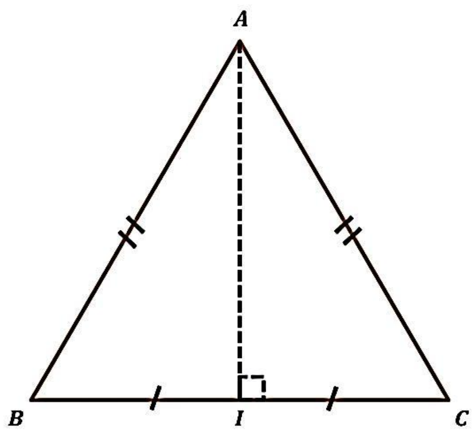
Il en résulte que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont perpendiculaires.

Exemple 7

ABC est un triangle isocèle en A.

Montrer que la médiane issue de A est aussi une médiatrice.

Solution



Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que (AI) est la médiatrice de $[BC]$, revient à montrer que ; $(AI) \perp (BC)$, qui revient à montrer que ;

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0$$

On a ;

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AI}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right) \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} - \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \boxed{\mathbf{2}}$$

De $\boxed{\mathbf{1}}$ et $\boxed{\mathbf{2}}$, on a ;

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2}_{0}\right) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow (AI) \perp (BC)$$

Exemple 8

Que peut-on dire des points $A, B\ et\ C$ lorsque ;

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$?

Solution

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0$$

Les points $A, B\ et\ C$ sont soit confondus, soit alignés et A est le milieu de $[BC]$.

D°) L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que ;

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par ;

$$\vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{xx' + yy'}$$

Exercice

Montrer l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}} \Longleftrightarrow \vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{xx' + yy' = 0}$$

2°/ L'expression analytique de la norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit le vecteur ;

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

On a ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple 9

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -4{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -6{,}4 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

3°) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3{,}6 \\ -4{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

4°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$

Solution

1°) $\vec{u}.\vec{v} = 3{,}6 \times (-6{,}4) + (-4{,}8) \times (-4{,}5)$

$$= -23{,}04 + 23{,}04 = 0$$

2°) $\vec{u}.\vec{v} = 6{,}4 \times 10 + 4{,}8 \times 0 = 64$

3°) $\vec{u}.\vec{v} = -3{,}6 \times 0 + (-4{,}8) \times (-10) = 48$

4°) $\vec{u}.\vec{v} = 3{,}6 \times 0 + 0 \times (-4{,}5) = 0 + 0 = 0$

Exemple 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :

$A(2,4);\ B(-3,-1); C(4,-2); D(9,3)$

1° Démontrer que $ABCD$ est un losange ;

2° Evaluer $mes(\widehat{ABC})$, et $mes(\widehat{BAD})$ en degré.

Solution

1° $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-2 \\ -1-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4-9 \\ -2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}\begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

Donc ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où ; $ABCD$ est un parallélogramme.

On a d'autre part les diagonales (AC) et (BD) dirigées par ;

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 9-(-3) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BD}}\begin{pmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$

Sont perpendiculaires car ;

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2 \times 12 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$$

$ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

2° on a ; $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\binom{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{5}}$, $\overrightarrow{BC}\binom{4+3}{-2+1} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\binom{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{-1}}$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5} = \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 5 \times 7 + 5 \times (-1) = 30$$

$$\Longrightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{30}{\left(5\sqrt{5}\right)^2} = \frac{30}{125} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \Longrightarrow \widehat{\boldsymbol{ABC}} \approx \boldsymbol{76}°$$

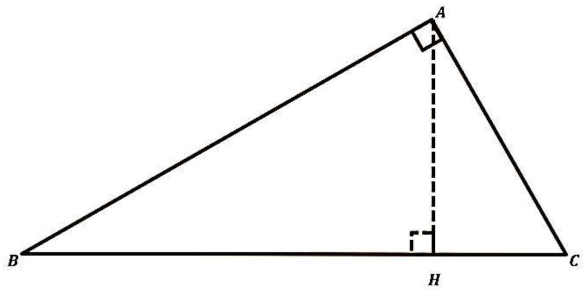
D'autre part, comme $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$ sont deux angles voisins dans un parallélogramme, leur somme est donc égale à $180°$

Une mesure approximative de $\widehat{BAD}$ est donc ;

$$\widehat{\boldsymbol{BAD}} \approx \boldsymbol{180° - 76° \approx 104°}$$

3. Relations métriques dans le triangle

a) Relations caractéristiques du triangle rectangle



Relation 1

ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, si et seulement si $\boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$.

Relation 2

ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, si et seulement si $\boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$.

Exercice

Montrer les deux relations précédentes.

b) Théorème de la médiane

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit A et B deux points, et soit I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a ;

$$\begin{cases} \boldsymbol{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}} \\ \boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}} \\ \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}} \end{cases}$$

Exercice

Démontrer les relations du théorème de la médiane.

Remarque

Les relations du théorème de la médiane s'appliquent aussi lorsqu'on a un triangle AMB, avec I milieu de $[AB]$.

c) Formule d'Al-Kashi (*Pythagore généralisé*)

Pour tous trois points non alignés A, B et C du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2}} \quad \boxed{1}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2}} \quad \boxed{2}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2}} \quad \boxed{3}$$

Exemple 11

ABC est un triangle dont les côtés mesurent ;

$$AB = 7; \quad BC = 9 \quad et \quad AC = 5$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution

D'après la propriété d'*Al-Kashi* ;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 9^2 = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 81 = 49 + 25 - 70\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 7 = -70\cos\hat{A} \Longrightarrow \cos\hat{A} = \frac{-7}{70} = -\frac{1}{10}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7 \times 5 \times -\frac{1}{10} = \frac{-35}{10}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3,5}$$

Exercice

1°/ Démontrer les formules d'Al-Kashi,

2°/ En utilisant la définition du produit scalaire et les formules d'Al-Kashi, montrer les égalités ;

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \quad \boxed{4}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2.\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}} \quad \boxed{5}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}} \quad \boxed{6}$$

Exemple 12

Soit A, B et C trois points tels que ;

$AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 10$.

Calculer ; $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$, $\cos \hat{C}$.

Solution

$$\cos \hat{A} = \frac{5^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{25 + 36 - 100}{60} = \frac{-39}{60} = -\frac{13}{20}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{10^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 6} = \frac{100 + 36 - 25}{120} = \frac{111}{120} = \frac{37}{40}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{5^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 10} = \frac{25 + 100 - 36}{100} = \frac{89}{100}$$

Exemple 13

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

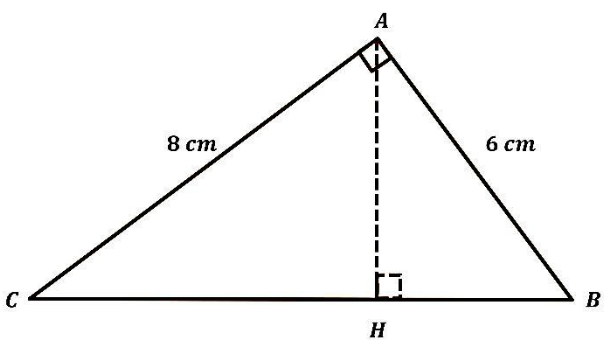
$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Solution



1° $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \hat{B}$

$$= 6 \times 10 \times \cos \hat{B}$$

Or, on sait que ;

$$\cos\hat{B} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BA}} = \frac{3{,}6}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6 \times 10 \times \frac{3}{5} = 60 \times 0{,}6 = 36$$

2° $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\hat{C}$

$$= 8 \times 10 \times \cos\hat{C}$$

Or, on sait que ;

$$\cos\hat{C} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \frac{6{,}4}{8} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8 \times 10 \times \frac{4}{5} = 80 \times 0{,}8 = 64$$

3° $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\hat{A}$

$$= 8 \times 10 \times \cos 90° = 80 \times 0 = 0$$

4. Produit scalaire et relations trigonométriques

a) $\boldsymbol{sinus}$ de l'angle de deux vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Alors ; $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}) = \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \times \mathbf{sin}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})$

$$\Rightarrow \mathbf{sin}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}) = \frac{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{v}}\|}$$

Exemple 14

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, calculer $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$.

Solution

$$\sin(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u};\ \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\-7 & 5\end{vmatrix}}{\sqrt{4^2 + (-7)^2} \times \sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{41}{\sqrt{2\,210}}$$

b) Formules trigonométriques

a- Formules d'addition

Exercice

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique et M et N deux de points de $(\mathcal{C})$, on pose ;

$$a = \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right) ; b = \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$$

1° Faire une figure ;

2° Montrer que, pour tous nombres réels a et b :

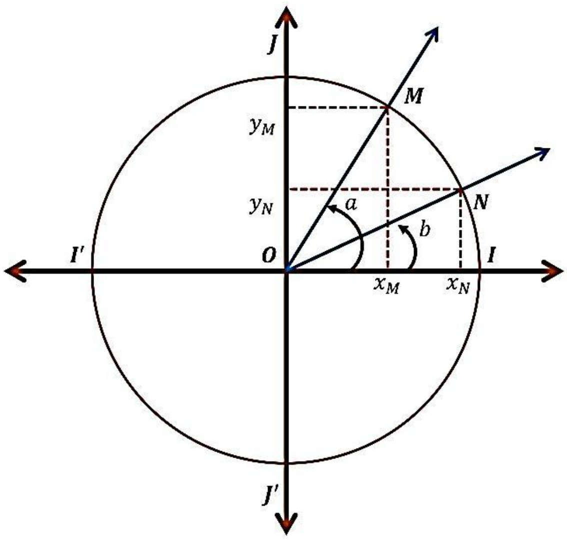
A/ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

B/ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

C/ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

D/ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstrations



Les points M et N, étant les images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique,

On a ; $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{ON} = x_N\vec{\imath} + y_N\vec{\jmath}$

$$\cos a = \frac{y_M}{OM} = y_M \ ; \ \cos b = \frac{y_N}{ON} = y_N$$

$\Longrightarrow M\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

a et b sont des mesures respectives de $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right)$.

Donc $b-a$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$.

Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$

$$= OM.ON\cos(b-a) = 1 \times 1 \times \cos(b-a)$$

$$= 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a-b)} \ \boxed{A}$$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_M x_n + y_M y_N$

$$= \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} = \cos a\cos b + \sin a \sin b.$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a\cos b + \sin a\sin b} \ \boxed{B}$$

$\boxed{A} = \boxed{B} \Longrightarrow$

$$\mathbf{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \ (1)}$$

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (1) on obtient la formule (2), en effet ;

$$\cos\big(a-(-b)\big) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b + \sin a(-\sin b)$$

$\Longrightarrow \mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ (2)}$

Etablissons maintenant la formule (3).

Méthode 1

$$\sin(a-b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a-b)) = \cos\ (\left(\frac{\pi}{2}+b\right) - a)$$

$$= \cos\ (\frac{\pi}{2}+b)\cos\ a + \sin\ (\frac{\pi}{2}+b)\sin\ a$$

$$Or, \cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = -\sin b \quad et\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = \cos b$$

$\Longrightarrow \mathbf{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \ (3)}$.

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

$$\sin\big(a-(-b)\big) = \sin a\,\cos(-b) - \cos a\,\sin(-b)$$

$$= \sin(a+b) = \sin a\cos b - \cos a\,(-\sin b)$$

$\Longrightarrow \mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \ (4)}$

Méthode 2

On a ; $\det(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}) = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\overrightarrow{ON}\|\sin(b-a)$

$$\Longrightarrow \det(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}) = 1\times 1\times\sin(a-b)$$

$$\Longrightarrow \mathbf{\det(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}) = \sin(a-b)}\ \boxed{A}$$

$$\det(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}) = \begin{vmatrix}\cos a & \cos b\\ \sin a & \sin b\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\det(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}) = \cos a \sin b - \sin a \cos b}\ \boxed{B}$$

$\boxed{A} = \boxed{B} \Longrightarrow$

$$\mathbf{\sin(a-b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b}\ \boxed{3}$$

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

b- Formules de duplication

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\Longrightarrow \cos(\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$\mathbf{\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha}$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\Longrightarrow \sin(\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Exemple 15

En utilisant les formules de duplication, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution

Méthode 1

☒ $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$

$$= cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2cos^2\frac{\pi}{12} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\Rightarrow sin\ \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{sin\ \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}$$

Méthode 2

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \boxed{\mathbf{1}} \\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}\ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{2}$ dans $\boxed{1}$, on a ;

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}\right)^2 - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16\sin^2\frac{\pi}{12}} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En multipliant l'équation par $16\sin^2\frac{\pi}{12}$ on a ;

$$\Rightarrow 1 - 16sin^4\frac{\pi}{12} = 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow 16sin^4\frac{\pi}{12} + 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12} - 1 = 0$$

Posons $X = \sin^2\frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow 16X^2 + 8\sqrt{3}X - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 64 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$X_1 = \frac{-8\sqrt{3} - 16}{32} < 0\ (rejetée)$$

$$X_2 = \frac{-8\sqrt{3} + 16}{32} > 0\ (retenue)$$

$\sin^2\frac{\pi}{12}$ étant supérieur à 0.

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}$$

Méthode 1

☒ $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}$$

$$\Longrightarrow sin\ \frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\Longrightarrow \boldsymbol{sin\ \frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$$

Méthode 2

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=cos^2\frac{\pi}{8}-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}cos^2\frac{\pi}{8}-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}cos^2\frac{\pi}{8}-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}cos^2\frac{\pi}{8}-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \boxed{\mathbf{1}}\\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\ \boxed{\mathbf{2}}\end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{\mathbf{2}}$ dans $\boxed{\mathbf{1}}$, on a ;

$$\Longrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\right)^2-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow\frac{2}{16\sin^2\frac{\pi}{8}}-sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En multipliant l'équation par $16\sin^2\frac{\pi}{8}$ on a ;

$$\Longrightarrow 2-16sin^4\frac{\pi}{8}=8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Longrightarrow 16sin^4\frac{\pi}{8}+8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8}-2=0$$

Posons $X=\sin^2\frac{\pi}{8}$

$$\Longrightarrow 16X^2+8\sqrt{2}X-2=0$$

$$\Delta=\left(8\sqrt{2}\right)^2+128=256\Longrightarrow\sqrt{\Delta}=16$$

$$X_1=\frac{-8\sqrt{2}-16}{32}<0\ (rejetée)$$

$$X_2 = \frac{-8\sqrt{2}+16}{32} > 0\ (retenue)$$

$\sin^2\frac{\pi}{8}$ étant supérieur à 0.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$$

5. Complément de cours sur les relations métriques

a) Application aux aires du triangle

Soit ABC un triangle tel que ;

$$AB = c, \qquad AC = b, \qquad BC = a$$

1- L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{Base \times Hauteur}{2}$$

Avec la relation d'*Al-Kashi* appliquée au triangle, on a aussi ;

2- La formule des aires

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}c.a.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}a.b.\sin\widehat{C}}$$

On en déduit que ;

3- La formule des sinus

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Exemple 16

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 8$, $AC = b = 4$, $\sin\hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7}$,

1°/ Calculer $\sin\hat{C}$, en déduire les valeurs des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$, puis $\hat{A}$, $\sin\hat{A}$ et $BC = a$

2°/ Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

Solution

$$1°/\ \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Longrightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} = \frac{8}{\sin\hat{C}} \Longrightarrow \sin\hat{C} = \frac{8\sqrt{5}}{7} \div 4 = \frac{8\sqrt{5}}{7} \times \frac{1}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\sin\widehat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \approx 0.64}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \hat{A} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \boldsymbol{\hat{B} \approx 18.63°}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \hat{C} = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \boldsymbol{\widehat{C} \approx 39.71°}$$

$\hat{A} \approx 180° - (18.63° + 39.71°) \approx 180° - 58.34° \Longrightarrow \boldsymbol{\hat{A} \approx 121.66°} \Longrightarrow \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\hat{A}} \approx \mathbf{0.85}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Longrightarrow \frac{a}{0.85} = \frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} \Longrightarrow a = \frac{4 \times 0.85 \times 7}{\sqrt{5}} = \frac{23{,}8}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \boldsymbol{a = 10.64}$$

2°/ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin \hat{A} = \frac{1}{2} c.a.\sin \hat{B} = \frac{1}{2} a.b.\sin \hat{C}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin \hat{A} \approx \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 0.85 \approx \mathbf{13.6}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} c.a.\sin \hat{B} \approx \frac{1}{2} \times 8 \times 10.64 \times 0.32 \approx \mathbf{13.61}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} a.b.\sin \hat{C} \approx \frac{1}{2} \times 10.64 \times 4 \times 0.64 \approx \mathbf{13.62}$$

4- Expression du sinus en fonction du périmètre et des côtés d'un triangle et formule de Héron

Soit ABC un triangle non aplati, tel que ; $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, on a ;

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\hat{A}} = \boldsymbol{\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

(Où p est le demi-périmètre)

Exemple 17

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 13$, $AC = b = 9$ et $BC = a = 5$

1°/ Calculer $\sin \hat{A}$, $\sin \hat{B}$, $\sin \hat{C}$ puis en déduire $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$;

2°/ Calculer l'aire du triangle ABC.

Solution

1°/ $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{5+9+13}{2} = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$

$$\sin \hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{13 \times 9}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}$$

$$= \frac{2}{117}\sqrt{13{,}5 \times 8{,}5 \times 4{,}5 \times 0{,}5} = \frac{2}{117}\sqrt{258.1875} \approx \frac{2 \times 16.06}{117} \approx \frac{32.12}{117} \approx \mathbf{0.27}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{13 \times 5}\sqrt{258.1875}$$

$$= \frac{2\sqrt{258.1875}}{65} \approx \frac{32.12}{65} \approx \mathbf{0.49}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{9 \times 5}\sqrt{258.1875}$$

$$= \frac{2\sqrt{258.1875}}{45} \approx \frac{32.12}{45} \approx \mathbf{0.71}$$

$$\sin \hat{A} \approx 0.27 \Longrightarrow \hat{A} \approx \arcsin 0.27 \approx \mathbf{15.66}°$$

$$\sin \hat{B} \approx 0.49 \Longrightarrow \hat{B} \approx \arcsin 0.49 \approx \mathbf{29.34}°$$

$\sin \hat{C} \approx \mathbf{0.71} \Longrightarrow \hat{C} \approx \arcsin \mathbf{0.71} \approx 180° - 45.23° \approx \mathbf{134.77}°$ (*L'angle $\hat{C}$ étant obtus*)

Vérification : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 15.66° + 29.34° + 134.77° = \mathbf{179.77}° \approx \mathbf{180}°$

2°/ $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}$

$$\sqrt{13{,}5 \times 8{,}5 \times 4{,}5 \times 0{,}5} = \sqrt{258.1875} \approx \mathbf{16.06}$$

b) Equation de cercle dans un repère orthonormé

1- Equation d'un cercle par l'utilisation du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$

On a déjà vu dans le chapitre du calcul vectoriel et de la géométrie analytique, que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points équidistants de A.

Pour tout point $M(x, y) \in \mathcal{C}$ on a :

$$\mathcal{C} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})^2 = \boldsymbol{R}^2$$

L'équation cartésienne peut aussi être calculée par le produit scalaire.

$[AB]$ étant un diamètre du cercle $\mathcal{C}$, pour tout point $M \in \mathcal{C}$, on a ;

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_B}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_B}) = \mathbf{0}$$

Exemple 18

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(4; 7)$ et $B(-5; 3)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution

Pour tout point $M(x; y)$ de $\mathcal{C}$, on a : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ perpendiculaire donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow (x-4)(x+5) + (y-7)(y-3) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + x - 20 + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}} :\ \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2 - \mathbf{10}\boldsymbol{y} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

2- Equation d'un cercle à partir des extrémités d'un diamètre

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soient deux points ; $A(a, b)$; $B(a', b')$ et soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

Soit I le milieu de $[AB]$, I est le centre du cercle $(\mathcal{C})$, et pour tout point $M(x, y) \in (\mathcal{C})$, on a ;

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_I})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_I})^2 = \boldsymbol{R}^2$$

Exemple 19

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(-9;10)$ et $B(7;4)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution

Soit le I centre du cercle $\mathcal{C}$, on a ; $I = A * B$.

$$\Rightarrow \mathcal{C} :\ \left(x - \frac{-9+7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{10+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} :\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = \left(\frac{\sqrt{292}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} :\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = \frac{292}{4} \Rightarrow \mathcal{C} :\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = 73$$

$$\mathcal{C} :\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = 73$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C} :\ x^2 + 2x + y^2 - 14y - 23 = 0}$$

c) Equation d'une droite dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x,y) \in (\mathcal{D})$, on a ;

$$\boldsymbol{(\mathcal{D}) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0}$$

Exemple 20

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(4,-7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.

Solution

Pour tout point $M(x,y) \in (\mathcal{D})$, on a ;

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-4) + 5(y+7) = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 12 + 5y + 35 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{(\mathcal{D}) : 3x - 5y - 47 = 0}$$

d) Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).

La distance de A à (Δ) est notée ;

$$d(A;\ \Delta) = AA' \Longrightarrow \boldsymbol{AA'} = \frac{|\boldsymbol{ax_0} + \boldsymbol{by_0} + \boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}}$$

Exemple 21

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$5x - 3y + 4 = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(1, 2)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Calculer $d(A;\ \Delta)$ la distance de A à (Δ).

Solution

$$d(A;\ \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \times 1 - 3 \times 2 + 4|}{\sqrt{7^2 + (-6)^2}}$$

$$= \frac{|3|}{\sqrt{85}} \Longrightarrow \boldsymbol{d(A;\ \Delta)} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{85}}}$$

e) Produit scalaire et lieu géométrique

Notion de lignes de niveau

Soit f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel.

On appelle ligne de niveau k de l'application f l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$.

On note en général L_k la ligne de niveau k ; ainsi :

$$L_k = \{M \in \mathcal{P} / f(M) = k\}$$

Exemple

1° Soit O un point fixé et ;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} \quad &: \boldsymbol{\mathcal{P}} \longmapsto \mathbb{R} \\ &\boldsymbol{M} \longmapsto \boldsymbol{OM} \end{aligned}$$

La ligne de niveau 4 est l'ensemble des points M tels que $OM = 4$: il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon 4.

2° Préciser la ligne de niveau k selon que l'on a ;

$$k > 0\ ; \qquad k = 0\ ; \qquad k < 0$$

Si $k > 0 \Longrightarrow$ l'ensemble M est le cercle de centre O et de rayon k, si $k = 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = O$, si $k < 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = \phi$.

Exercices généraux

Formule d'Al-Kashi appliquée au triangle

Exercice 1

Soit ABC un triangle. On pose ;

$$BC = a, CA = b, AB = c.$$

Les longueurs $a, b\ et\ c$ sont ceux des côtés opposés respectivement aux angles ; $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$.

Montrer que l'on a ;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle non aplati tel que ;

$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$

1° Donner l'expression de $\cos\hat{A}$ en fonction des longueurs des côtés.

2° En déduire des expressions analogues pour $\cos\hat{B}$ et $\cos\hat{C}$.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points tels que ;

$AB = 7$, $AC = 12$, $BC = 8$.

Calculer ; $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$, $\cos\hat{C}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

$AB = 13\ cm$, $AC = 9\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Exercice 5

ABC est un triangle tel que ; $AB = 8\ cm$, $AC = 12\ cm$ et $\hat{A} = 30°$

1° Calculer la mesure du côté BC ;

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, quelle est la nature du triangle OBC ?

3° En déduire la mesure du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 6

ABC est un triangle tel que ;

$$AB = 6cm, \qquad AC = 10cm, \qquad BC = 12cm$$

Calculer les mesures des angles de ce triangle

Exercice 7

Déterminer les angles $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{u}\binom{3}{0}$, $\vec{v}\binom{2}{2\sqrt{3}}$

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

3°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4°) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que $AB = 9cm$, $AC = 13cm$, $BC = 15cm$.

1° Calculer $\sin\hat{A}$; $\sin\hat{B}$; $\sin\hat{C}$.

2° Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

Expression du sinus en fonction du périmètre et des côtés d'un triangle et formule de Héron

Exercice 9

Soit ABC un triangle tels que ;

$AB = 7, AC = 9, BC = 14$

Calculer $\sin\hat{A}$ puis aire ABC.

Exercice 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la droite $(\mathcal{D})$ d'équation ;

$(\mathcal{D}) : 5x - 4y + 7 = 0$ et le point $A(-3, 2)$

Calculer $d(\mathcal{D};\ A)$.

Positions relatives de droites et de cercles

Exercice 11

Etudier les positions relatives du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants, puis déterminer les points d'intersection éventuels.

1°) $(\mathcal{D}) : 3x + 4y - 25 = 0$, et $\mathcal{C}(O; 5)$

2°) $(\mathcal{D}) : 2x + 3y - 5 = 0$, et $\mathcal{C}(I(-1, 1); 3)$

3°) $(\mathcal{D}) : x + 3y - 10 = 0$, et $\mathcal{C}(I(1, 3); 2)$

Perpendicularité de deux droites

Exercice 12

Soit un carré $ABCD$ et soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

1° Faire une figure ;

2° Montrer par trois méthodes que $(DI) \perp (AJ)$.

Exercice 13

Le triangle OAB est rectangle en O. H est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Une droite $(\mathcal{D})$ passant par A coupe (OH) en M et le cercle de diamètre $[AB]$ en N.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que $AO^2 = AM.AN$.

Exercice 14

OAB est un triangle isocèle en O.

C et D appartiennent respectivement à $[AO]$, $[OB]$ tels que $OC = OD$.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OBC est une hauteur issue de O dans OAD.

Exercice 15

ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires ;

1° Faire une figure ;

2° Montrer que ; $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Produit scalaire et barycentre

Exercice 16

Soit ABC un triangle tel que ;

$AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$.

1° Construire le point $R = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$

2° Calculer CR ;

3° a) D est le point tel que R soit le centre de gravité de ACD, construire D ;

b) La parallèle à (AC) passant par B coupe la parallèle à (AD) passant par R en S, construire S ;

Déterminer les réels $a, b\ et\ c$ tels que ;

$$S = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$$

Exercice 17

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(2, -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

1° Donner une équation de $(\mathcal{D})$;

2° Représenter $(\mathcal{D})$.

Equation d'un cercle à partir des extrémités d'un diamètre

Exercice 18

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3,-2)$ et $B(-5,8)$.

Calculer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Equation de médiatrice

La médiatrice du segment $[AB]$ de milieu I est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur normal de la médiatrice.

Exercice 19

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3,-4)$ et $B(-7,2)$.

Calculer l'équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.

Equation de hauteur

Dans le triangle ABC, le support de la hauteur issue de A, est l'ensemble des points M tels que ;

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$$

Exercice 20

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(5,2)$, $B(-8,7)$ et $C(-3,1)$

Calculer l'équation cartésienne du support (d) de la hauteur issue de A.

Droite d'Euler

Exercice 21

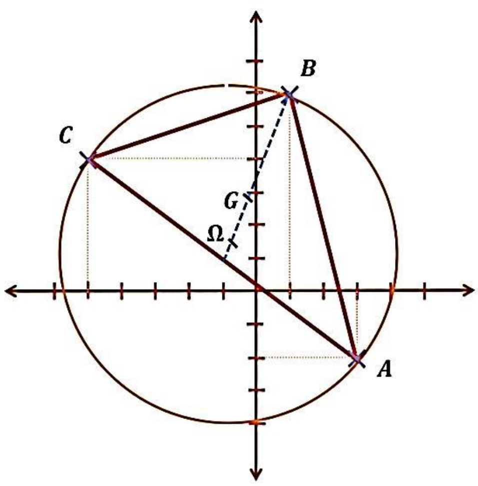
Dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(-5,6)$, $B(4,3)$, $C(3,-4)$.

1° Déterminer les coordonnées des points G, H et Ω respectivement, centre de gravité, orthocentre et centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Vérifier que G, H et Ω sont alignés (*cette droite s'appelle la droite d'Euler*).

3° Ecrire une équation de la droite d'*Euler* relative à ce triangle.

Exercice 22



1° A partir de la figure ci-dessus, donner des mesures approchées à un degré près des angles du triangle ABC.

2° Ecrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

Equations trigonométriques

1° Type : $\sin x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sqrt{3}\sin x = \dfrac{3}{2}$

2) $3\sin 2x = 0$

3) $5\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{75}{4}}$

2° Type : $\cos x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $4\cos x = \sqrt{12}$

2) $10\cos(5x) = 5$

3) $4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{8}$

3° Type : $a\cos x + b\sin x = c$

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sqrt{12}\cos x + 2\sin x = 2$

2) $4\cos x - 4\sin x = 4$

3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4° Type : $\tan x = a$

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ;

1) $\tan x = \sqrt{3}$

2) $-2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

3) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -1$

5° Types : $\cos^2 x = a$; $\sin^2 x = a$; $\tan^2 x = a$

Exercice 28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos^2 x = 1$

2) $4\sin^2(x + \pi) = 3$

3) $9\tan^2\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) = 3$

6° Types : $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$;

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$

Exercice 29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$

2) $\sin^2(x - 3\pi) + 2\sin(x - 3\pi) - 4 = 0$

3) $\tan^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) + (1 - \sqrt{3})\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$

Exercice 30

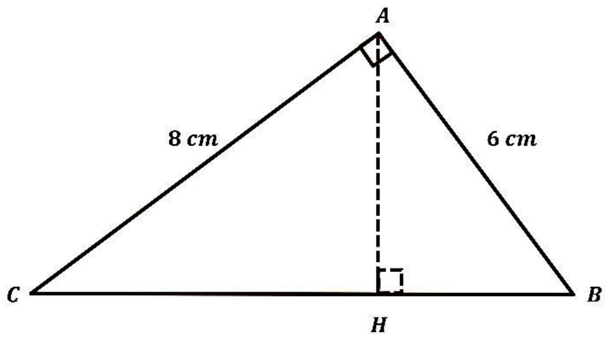
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?



Exercice 31

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points ;

$A(2,3)$; $B(-1,2)$ et $C(0,-1)$

1° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2° Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

3° Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$.

4° Représenter $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 32

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Calculer $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$.

Exercice 33

En utilisant les formules d'addition, calculer ;

$$\cos\frac{7\pi}{12}\ \ et\ \ \sin\frac{7\pi}{12}\ ;\ \cos\frac{\pi}{12}\ \ et\ \ \sin\frac{\pi}{12}$$

Exercice 34

En utilisant les formules de duplication, calculer ;

$$\text{Calculer }\cos\frac{\pi}{12}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}\ ;\ \cos\frac{\pi}{8}\ ;\ \sin\frac{\pi}{8}$$

Exercice 35

$ABCD$ est un carré de centre O. M est un point de la diagonale $[BD]$ qui se projette orthogonalement sur $[AB]$ en P, et sur $[AD]$ en Q.

1° Faire une figure

2° Montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercice 36

ABC est un triangle rectangle en A non isocèle.

H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

P et Q sont les projetés orthogonaux de H sur $[AB]$ et $[AC]$, A' est le milieu de $[BC]$.

1° Faire une figure

2° Montrer que $(AA') \perp (PQ)$.

Exercice 37

ABC est un triangle.

A l'extérieur de ce triangle, on construit deux carrés, $ABDE$ et $ACFG$.

Soit I le milieu de $[BC]$.

1° Faire une figure

2° Montrer que $(AI) \perp (GE)$.

Exercice 38

$ABCD$ est un carré de côté $12\ cm$. M est un point de $[AB]$ tel que ; $AM = 5\ cm$, N est un point de $[AD]$ tel que ; $DN = 9\ cm$.

1° Faire une figure

2° Calculer $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MN}$, le triangle CMN est-il rectangle en M ?

Exercice 39

Dans le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les points $A(-2\ ;\ -1)$, $B(-1;\ -4)$ et $C(4;\ 1)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A :

1° En calculant AB^2, BC^2 et CA^2 et en utilisant le théorème de Pythagore.

2° En appliquant le produit scalaire de deux vecteurs.

Exercice 40

Soit les points ;

$$P(-3,-4);\ Q(3,2);\ R\left(-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}-1\right).$$

1° Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Soit S le projeté orthogonal de P sur $[QR]$;

2° Calculer $\overrightarrow{QS}$, puis $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{QR}.\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}$.

Exercice 41

1° Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\cos 5x = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$$

Et

$$1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$$

2° a/ En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation ; $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b/ Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{30}$

Exercice 42

1° Montrer que ;

$$16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24} = 1$$

2° Soit ;

$$a = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\ ;$$

$b = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$;

A/ Calculer $a + b$; $a - b$;

B/ En déduire les valeurs de a et b.

Exercice 43

1° Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles définis par les équations suivantes :

$$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - x - 6y + \frac{1}{4} = 0$$

2° Quelle est la position relative de ces deux cercles ?

Expressions du produit scalaire

Exercice 44

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$

Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.

Déterminer un réel x tel que : $(2\vec{u} + x\vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$.

Exercice 45

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

On pose $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

a) Calculer $\vec{w}.\vec{t}$, $\|\vec{w}\|$ et $\|\vec{t}\|$.

b) Vérifier que $\cos(\vec{w} ; \vec{t}) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

Exercice 46

Dans une base orthonormé $(\vec{i} ; \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

A-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Déterminer le réel a tel que le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + a\vec{j}$ soit orthogonal à $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 47

1) Soient A, B et C des points. Démontrer que, pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2) Soit ABC un triangle. On note H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B.

A l'aide de la relation du 1), démontrer que la hauteur issue de C passe aussi par H.

Exercice 48

On considère les triangles rectangles isocèles de la figure ci-dessous.

Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

En déduire que : $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$.

Soit I le milieu de [BE]. Démontrer à l'aide du 2) que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Exercice 49

Soit ABC un triangle. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2 - \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$.

En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $AC^2 = CH \times CB$ et les vecteurs sont de même sens.

Exercice 50

Soit ABC un triangle d'orthocentre H.

On note A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Démontrer que : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$.

Exercice 51

Soit A et B deux points du plan tels que

AB = 2.

a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 3$.

b) Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -3$

2) *Généralisation*

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. On note D_k l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = k$. Démontrer que, pour tout réel k, l'ensemble D_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

Exercice 52

Soit A, B, C, D des points. On note I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].

Démontrer que :

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

Indication : on pourra utiliser plusieurs fois le théorème de la médiane.

2) En déduire qu'un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, la somme des carrés de ses côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonale.

Lignes de niveau

Exercice 53

A et B sont deux points distincts du plan ;

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$:

(c'est -à- dire la ligne de niveau k)

de l'application du plan dans $\mathbf{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$).

a) $k = 2a^2$:

b) $k = 4a^2$;

c) $k = -a^2$.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (c'est -à- dire la ligne de niveau k de l'application du plan dans $\mathbf{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$:

a) $k = a^2$:

b) $k = -2a^2$;

c) $k = -a^2$.

Exercice 54

ABC sont trois points non alignés du plan ;

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité proposée.

Etude de configurations classiques

Exercice 55

ABCD est un carré, I est le milieu du côté [AB] et J celui du côté [BC].

Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

Exercice 56

ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C soient perpendiculaires.

Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Exercice 57

C est un cercle, de centre O et de rayon R.

M est un point du plan. Une droite passant par M coupe C en deux points P et Q.

1) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2$

(On pourra faire intervenir le point P' de C diamétralement opposé à P).

Le produit scalaire $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la sécante choisie, il ne dépend que des points M, O, et du réel R ; on l'appelle puissance du point M par rapport au cercle C et on note ici ce réel :

P(M, C).

2) Etudier le signe de P(M, C) suivant la position de M par rapport au cercle C .

3) C' et un cercle, de rayon R' et de centre un point O' distinct de O.

a) Déterminer l'ensemble Δ des points du plan ayant la même puissance par rapport à C et C' .

b) Tracer Δ lorsque C et C' sont s sécants.

XIII- FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES USUELLES

Faire savoir

Le cours

1. Les fonctions circulaires

1°/ La fonction $f(x) = \sin x$

a) Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que ; $\forall\ x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.

b- Parité

La fonction f est impaire car,

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \binom{2k\pi}{0}\ tel\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin a \leq \sin b$

$\Longrightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Si $\dfrac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Longrightarrow \sin a \geq \sin b$

$\Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$

b- Tableau de variation sur $[0;\ \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c- Extrémums

Du fait que $-1 \leq \sin x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

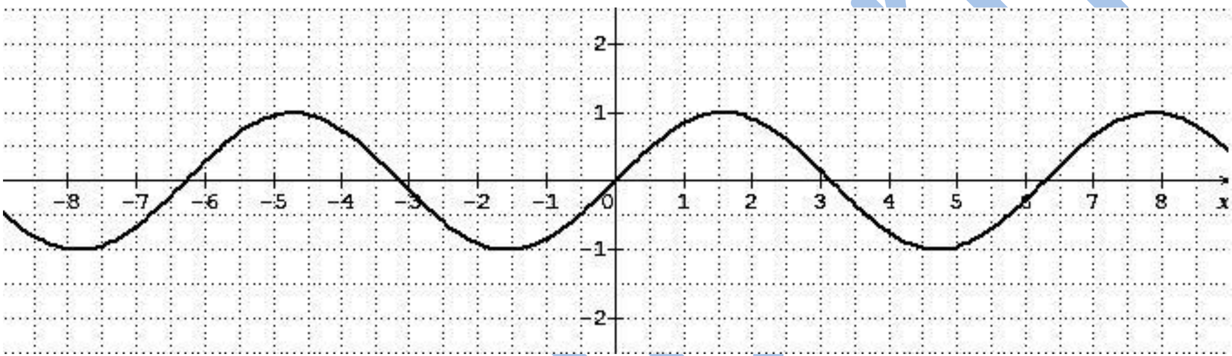
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b- Courbe de f

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de $\sin x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.



2°/ La fonction $f(x) = \cos x$

a) Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

b- Parité

La fonction f est paire car,

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \ tel\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos a \geq \cos b$

$\Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Longrightarrow \cos a \geq \cos b$

$\Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b- Tableau de variation sur $[0; \pi]$

x	0	π
$f(x)$	0 $\searrow$	-1

c- Extrémums

Du fait que $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

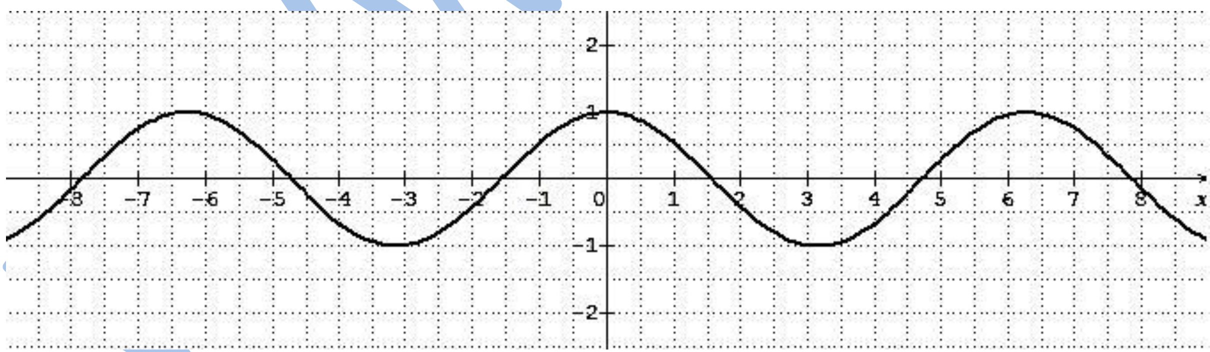
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

b- Courbe de f

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de $\cos x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.

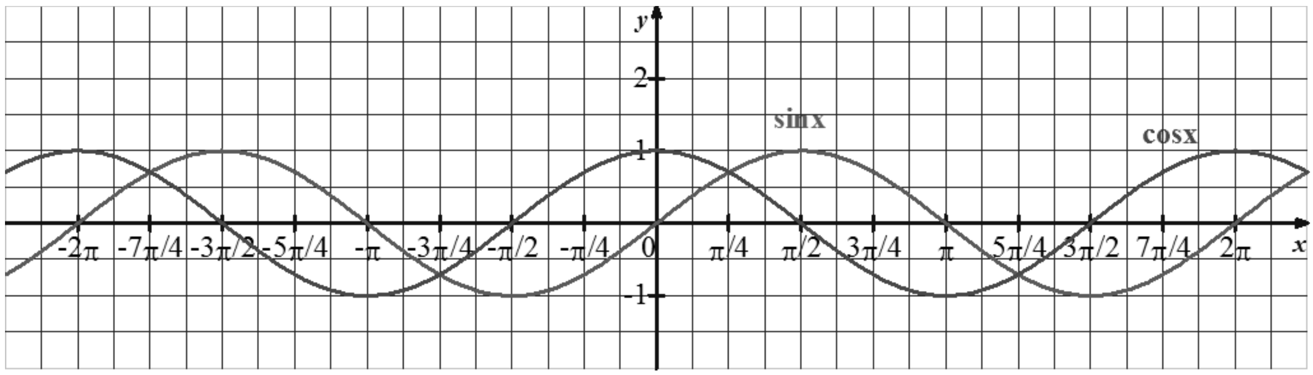
On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

Donc $(\mathcal{C}')$ est une sinusoïde.



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions périodiques de période 2π comme nous l'avons vu.

Pour vérifier que les deux courbes correspondent à une sinusoïde, on peut représenter graphiquement leurs courbes sur un même graphique et les comparer.



3°/ La fonction $f(x) = \tan x$

a) Domaine de définition

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction f est définie pour $\cos x \neq 0$; c'est-à-dire si

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{tel que k} \in \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{tel que } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période π c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$
$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

b- Parité

La fonction f est impaire car,

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\tan x = -f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis, on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \ tel\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow 0 \leq \sin a \leq \sin b$, et $\cos a \geq \cos b$

$0 \leq \dfrac{1}{\cos a} \leq \dfrac{1}{\cos b} \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{\sin a}{\cos a} \leq \dfrac{\cos b}{\cos b}$

$\Longrightarrow 0 \leq \tan a \leq \tan b \Longrightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b- Tableau de variation sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow$	$+\infty$ ||

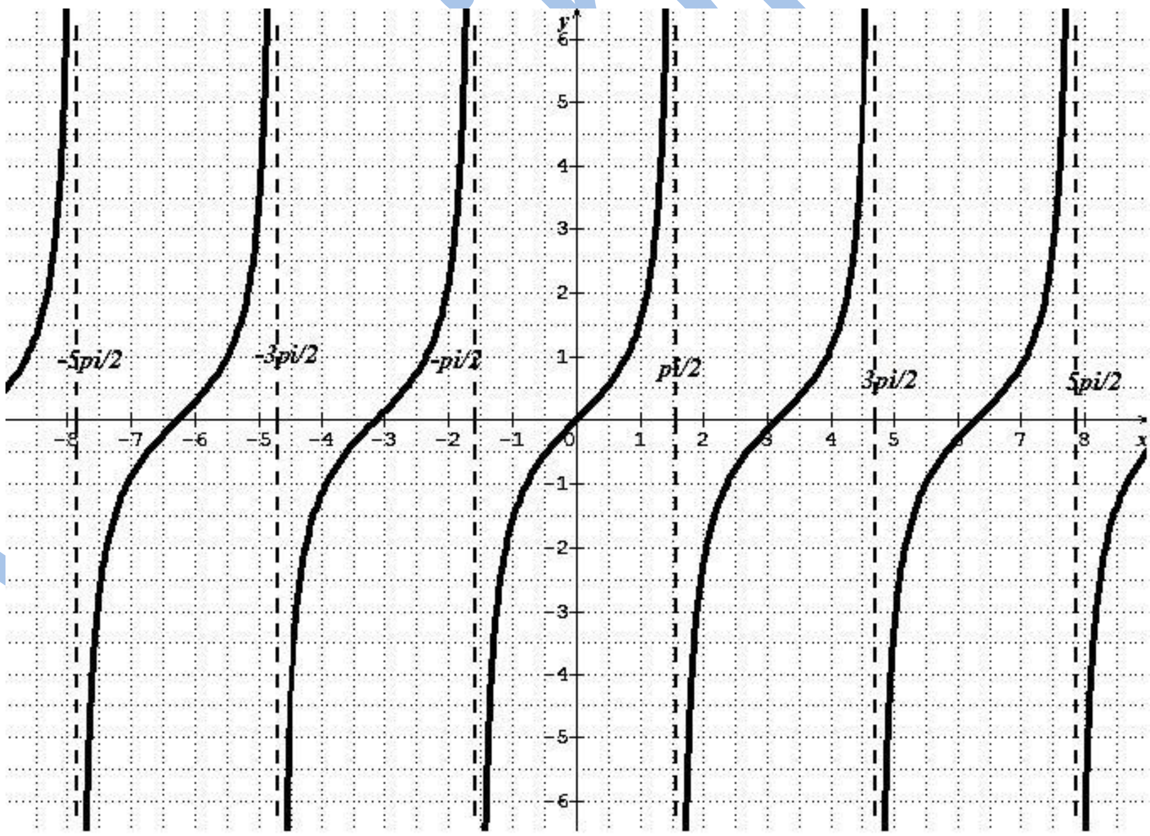
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	||

b- Courbe de f

La courbe représentative $(\mathcal{C}'')$ de $\tan x$, dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est donnée par la figure suivante.



Propriété

Les périodes des fonctions des formes ;

$$f(x) = \sin ax, g(x) = cos\ ax \text{ est} : T = \frac{2\pi}{a}$$

Les fonctions des formes ; $h(x) = \tan ax$ sont

périodiques et leurs périodes est : $T = \dfrac{\pi}{a}$

Exercice

Démontrer cette propriété.

2. Les fonctions associées par translation aux fonctions trigonométriques usuelles

Les fonctions ayant les formes suivantes ;

$$f_1(x) = \sin(a_1 x + \alpha_1) + \beta_1$$
$$g_1(x) = \cos(a_2 x + \alpha_2) + \beta_2$$
$$h_1(x) = \tan(a_3 x + \alpha_3) + \beta_3$$

sont appelées fonctions associées par translations aux fonctions trigonométriques de base, ou fonction déduites par translations des fonctions trigonométriques de base :

Remarque

Les fonctions associées par translations ont même sens de variations

Exemple 1

Etudier et représenter graphiquement sur le même repère les fonctions ***f***(x) = sin x et ***g***(x) = cos x.

Par quelle transformation simple obtient-on C_g de C_f.

Solution

- ***f***(x) = sin x
- D***f*** = **R**
- ***f*** est périodique ; impaire.
- Il suffit d'étudier f sur [o ; π]
- Sens de variation

u < v ≤ $\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ sin u < sin v

f est croissante sur [0 ; $\dfrac{\pi}{2}$]

$\dfrac{\pi}{2}$ ≤ u < v $\Rightarrow$ sin u > sin v

f et décroissante sur [$\dfrac{\pi}{2}$; π].

- ***g***(x) = cos x
- D***g*** = **R**
- ***g*** est périodique ; paire.
- Il suffit d'étudier f sur [o ; π]
- Sens de variation

u < v ≤ $\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ cos u > cos v

g est décroissante sur [0 ; $\dfrac{\pi}{2}$]

$\dfrac{\pi}{2}$ ≤ u < v $\Rightarrow$ cos u > cos v

g et décroissante sur [$\dfrac{\pi}{2}$; π].

- **Tableau de variation**

- **Tableau de variation**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f(x)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

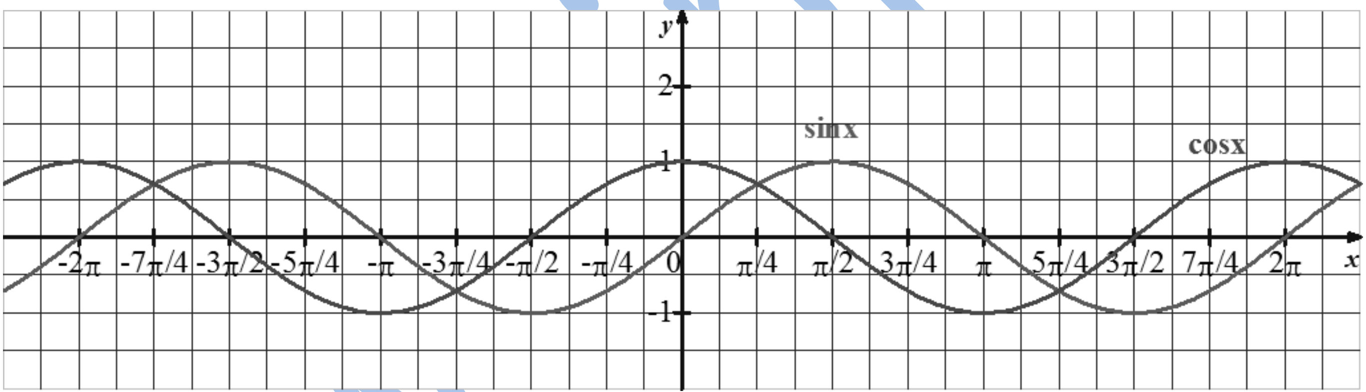
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g(x)	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

- **Tableau de valeurs**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- **Tableau de valeurs**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



La translation t de vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ transforme C_f en C_g.

Exercices généraux

Exercice 1

Soit la fonction ; $f(x) = \sin 2x$.

1° Montrer que f est périodique.

2° Montrer que f est impaire.

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

4° Construire $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit la fonction ; $h(x) = \cos 5x$.

1° Montrer que h est périodique et donner sa période.

2° Montrer que h est paire.

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec les axes de coordonnées.

4° Construire $\mathcal{C}_h$ sur $\mathbb{R}$.

5° En déduire la courbe de $|h|$ dans le même graphique.

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1° f est-elle paire ?

2° f est-elle périodique ?

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

4° Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation à caractériser.

5° Construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4

Soit la fonction ;

$$g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1° g est-elle impaire ?

2° g est-elle périodique ?

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec les axes de coordonnées.

4° Montrer que $\mathcal{C}_g$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation que l'on caractérisera.

5° Construire $\mathcal{C}_g$.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition et la parité des fonctions ci-dessous :

$f(x) = \frac{\sin x}{9-x^2}$; $g(x) = x^3 - 6x$; $h(x) = \frac{3x^2-6}{\sin x}$;

$k(x) = \frac{3x^2-6x+1}{\cos x}$.

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = sin2x + 1$.

1) Montrer que f est π périodique.
2) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
3) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de $p(x) = sin2x$, par une translation à caractériser.
4) Construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7

Soit la fonction ; $h(x) = cos3x$.

1) Montrer que f est périodique.
2) Montrer que f est paire.
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées
4) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 8

Soit la fonction ; $f(x) = sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Montrer que f est périodique.
2) Montrer que f est impaire.
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
4) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[0;\ \pi]$.

Exercice 9

Soit la fonction $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1) f est-elle paire ?
2) f est-elle périodique ?
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
4) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation à caractériser.
5) Construire $\mathcal{C}_f$.

XIV- TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Faire savoir

Le cours

Définition

Les transformations géométriques planes sont des applications du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même.
Les transformations qui seront objet d'étude sont ; la translation, l'homothétie, la symétrie centrale, la symétrie axiale et la rotation.

1. La Translation

Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$ la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{t_{\vec{u}}}: \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ \quad \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M'} \end{cases} \text{tel que } \boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}.$$

Exemple 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $A(7;\ 5)$, $B(-4; 1)$ et $C(-3; -6)$.

Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Solution

$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - 7 \\ y_{A'} - 5 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - 7 = 2 \\ y_{A'} - 5 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 + 7 = 9 \\ y_{A'} = -9 + 5 = -4 \end{cases}$

Donc ; $\boldsymbol{A'(9; -4)}$

$t_{\vec{u}}(B) = B' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_B \\ y_{B'} - y_B \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} + 4 \\ y_{B'} - 1 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{B'} + 4 = 2 \\ y_{B'} - 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2 - 4 = -2 \\ y_{B'} = -9 + 1 = -8 \end{cases}$

Donc ; $\boldsymbol{B'(-2; -8)}$

$t_{\vec{u}}(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} + 3 \\ y_{C'} + 6 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{C'} + 3 = 2 \\ y_{C'} + 6 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = 2 - 3 = -1 \\ y_{C'} = -9 - 6 = -15 \end{cases}$$

Donc ; $\boldsymbol{C'(-1;-15)}$

a) Expression analytique d'une translation

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Soit les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tels que ;

$t_{\vec{u}}(M) = M'$.

Il en résulte que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = x + a} \\ \boldsymbol{y' = y + b} \end{cases}$ est appelée expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1°/ Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.

2°/ Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des points A' et B' image des points $A(4\ ;\ 0)$ et $B(-7,-8)$.

Solution

1°/ $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 6 \end{cases}$

2°/ $\begin{cases} x_{A'} = 4 + 5 = 9 \\ y_{A'} = 0 + 6 = 6 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{B'} = -7 + 5 = -2 \\ y_{B'} = -8 + 6 = -2 \end{cases}$

Donc, $\boldsymbol{A'(9\ ;\ 6)}$ et $\boldsymbol{B'(-2\ ;\ -2)}$.

Définition

On appelle isométrie, toute transformation qui conserve la distance.

b) Propriétés

1°/ $\begin{cases} t_{\vec{u}}:(A) = A' \\ t_{\vec{u}}:(\ B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}$. La translation conserve la distance ; c'est une isométrie.

2°/ L'image d'une droite $(\boldsymbol{d})$ par une translation est une droite $(\boldsymbol{d'})$ qui lui est parallèle.

3°/ La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon, le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Exemple 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation ;

$7x + 5y - 2 = 0$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{4}{-3}$.

Solution

Déterminons un point de la droite (D) en donnant une valeur pour x comme -4, et en calculant la valeur correspondante de y ;

On a ; $7 \times -4 + 5y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 6$.

Le point $A(-4\,;\,6) \in (D)$ a pour image par la translation $t_{\vec{u}}$, le point $A' \in (D')$ dont les coordonnées sont calculées par l'expression analytique ; $\begin{cases} x_{A'} = -4 + 4 = 0 \\ y_{A'} = 6 - 3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow A'(0; 3)$.

$(D)//(D')$, elles ont le même vecteur directeur $\vec{v}\binom{-5}{7}$.

(D'): $7x + 5y + c = 0$. pour déterminer c, on remplace par les coordonnées de A' ;

$7 \times 0 + 5 \times 3 + c = 0 \Longrightarrow c = -15$

D'où ; $\boldsymbol{(D'): 7x + 5y - 15 = 0}$.

On peut aussi utiliser la représentation paramétrique de (D') qui est ;

$\begin{cases} x = -5t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{x}{5} \\ t = \dfrac{y-3}{7} \end{cases} \Longrightarrow$

$-\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-3}{7} \Longrightarrow -7x = 5(y-3) \Longrightarrow$

$7x + 5y - 15 = 0$

$\Longrightarrow \boldsymbol{(D'): 7x + 5y - 15 = 0.}$

Exemple 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne ;

$2x - 5y + 3 = 0$.

1° Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\binom{-4}{7}$;

2° Déterminer une équation du cercle (C') image du cercle $\mathcal{C}(A, 5)$ tel que $(8, -13)$.

Solution

Méthode 1

$(D)//(D') \Longrightarrow D'$: $2x - 5y + c = 0$. Cherchons à déterminer c.

$\boldsymbol{E(1,1) \in (D) \Longrightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D')}$;

$\Longrightarrow \overrightarrow{EE'} = \vec{u}\binom{-4}{7} \Longrightarrow \binom{x_{E'} - 1}{y_{E'} - 1} = \binom{-4}{7}$;

$\begin{cases} x_{E'} = -3 \\ y_{E'} = 8 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{E'(-3, 8)}$.

E' vérifie l'équation de D'

$\Longrightarrow 2(-3) - 5 \times 8 + c = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{c = 46}$.

$\boldsymbol{(D'): 2x - 5y + 46 = 0}$.

Méthode 2

Le point $M'(x',y') \in (D') \Longrightarrow \begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+7 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x = x'+4 \\ y = y'-7 \end{cases} \Longrightarrow 2(x'+4) - 5(y'-7) + 3 = 0$

$\Longrightarrow 2x' + 8 - 5y' + 35 + 3 = 0$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(D') : 2x' - 5y' + 46 = 0}.$$

Méthode 3

$E(1,1) \in (D) \Longrightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D'),$

Soit $M(x,y) \in (D') \Longrightarrow \overrightarrow{E'M}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires ;

$det\left(\overrightarrow{E'M}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ y-8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$2x + 6 - 5y + 40 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{(D'): 2x - 5y + 46 = 0}.$

2° $\begin{cases} x_{A'} = 8-4 = 4 \\ y_{A'} = -3+7 = 4 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{A'(4,4)}.$

$(\mathcal{C}'): (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

$\Longrightarrow \boldsymbol{(\mathcal{C}'): x^2 - 8x + y^2 - 8y - 25 = 0}.$

Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors (d) est globalement invariante par $t_{\vec{u}}$.

c) La translation conserve ;

a- Le parallélisme :

$(d_1)//(d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d'_1 \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d'_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 // d'_2.$

b- L'orthogonalité :

$(d_1) \perp (d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d'_1 \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d'_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 \perp d'_2$

c- L'alignement :

Les points $A, B\ et\ C$ sont alignés et $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \\ t_{\vec{u}}(C) = C' \end{cases} \Longrightarrow$ A', B' et C' sont alignés.

d- Le contact :

$$E = F_1 \cap F_2\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(F_1) = F'_1 \\ t_{\vec{u}}(F_2) = F'_2 \\ t_{\vec{u}}(E) = E' \end{cases} \Longrightarrow F'_1 \cap F'_2 = E'$$

e- Le barycentre :

$\boldsymbol{G = bar}$ $\boxed{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}}$ $\Longrightarrow$

α	β	γ

$\boldsymbol{t_{\vec{u}}(G) = bar}$

$t_{\vec{u}}(A)$	$t_{\vec{u}}(B)$	$t_{\vec{u}}(C)$
α	β	γ

4°/ La translation $t_{\vec{u}}$ est une bijection sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$ et on écrit ; $\boldsymbol{(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}}$;

Car, $t_{\vec{u}}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u} \Longrightarrow t_{-\vec{u}}(M') = M.$

e) La composée de deux translations

$t_{\vec{v}} : M \longrightarrow M' \; et \; t_{\vec{u}} : M' \longrightarrow M''$

$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} : \; M \longrightarrow M''$

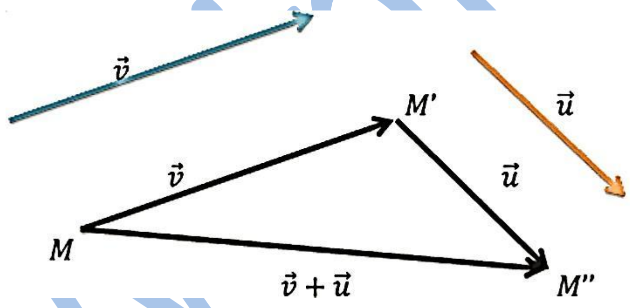
$t_{\vec{v}}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v},$

$t_u(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{u},$

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} + \vec{u}.$

La composée de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\boldsymbol{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}}$$



Remarques

- La translation de vecteur nul est appelée l'identité du plan, et on la note $Id_{\mathcal{P}}$;

$t_{\vec{0}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Longleftrightarrow M = M'.$

- Une translation de vecteur non nul n'a pas de points invariants.

Exemple 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (D) une droite d'équation ; $4x + 3y - 2 = 0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.

Solution

On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$;

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}.$

$\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' + 2 \end{cases};$

$\Longrightarrow 4(x' + 4) + 3(y' + 2) - 2 = 0$;

$\Longrightarrow (\boldsymbol{D'})\colon \boldsymbol{4x' + 3y' + 20 = 0}$.

Exemple 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Construire l'image de $ABCD$ par la translation

$t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

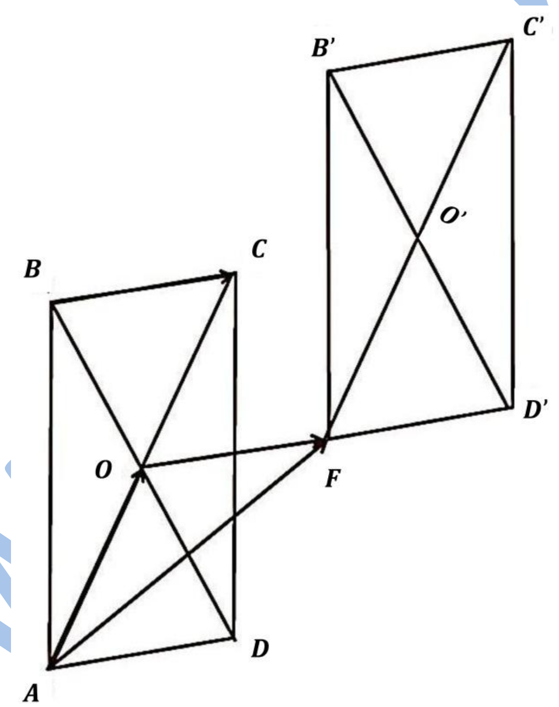
Solution

On a ; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} \Longrightarrow t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AF}}$.

Donc ; $t_{\overrightarrow{AF}}(A) = F$; $t_{\overrightarrow{AF}}(B) = B'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(C) = C'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(D) = D'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(O) = O'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(ABCD) = FB'C'D'$ (*figure*).



2. L'Homothétie

Définition

Soit k un nombre réel non nul et distinct de 1 $(k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$, et Ω un point fixé du plan $\mathcal{P}$.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k que l'on note $h_{(\Omega,k)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point Ω invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$.

On note ; $\boldsymbol{h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}}$.

Exemple 7

Soit ABC est un triangle non aplati et h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$. Construire l'image de ABC par $h_{(\mathrm{A},2)}$.

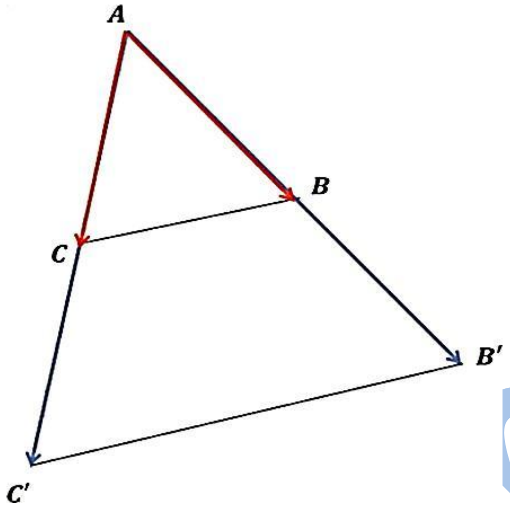
Solution

$h_{(A,2)}(A) = A$ (A est le centre de h)

$h_{(A,2)}(B) = B' \Longrightarrow \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$;

$h_{(A,2)}(C) = C' \Longrightarrow \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$.

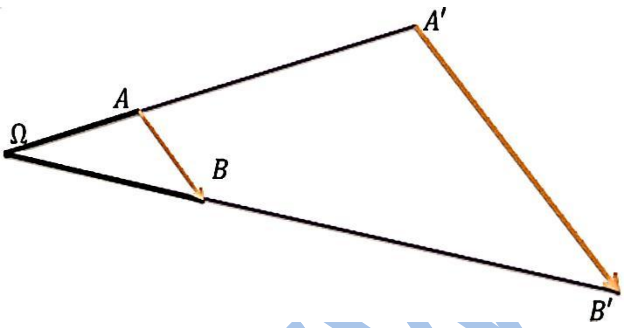
$h_{(A,2)}(ABC) = AB'C'$ (*figure*).



a) Propriétés

1°/ Le centre Ω d'une homothétie, un point M et son image M', sont alignés.

2°/ Si $\begin{cases} h_{(\Omega,k)}(A) = A' \\ h_{(\Omega,k)}(B) = B' \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$



Exercice

Démontrer la propriété **2°/**.

3°/ $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$,

$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'} \Longrightarrow h_{\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)}(M') = M.$

L'homothétie $h(\Omega, k)$est une bijection, et sa bijection réciproque est l'homothétie $h(\Omega, \frac{1}{k})$ et on écrit ; $\left(h_{(\Omega,k)}\right)^{-1} = h_{\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)}$.

4°/ Si $k = 0 \Longrightarrow M' = \Omega$.

5°/ Si $k = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \Omega = \mathrm{M} * \mathrm{M}' \Longrightarrow \mathrm{M}' = S_\Omega(M)$.

Donc, l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est une symétrie de centre Ω. $\boldsymbol{h_{(\Omega,-1)} = S_\Omega}$.

6°/ Si $k = 1 \Longrightarrow \Omega M' = \Omega M$

$\Longrightarrow M' = M \Longrightarrow \boldsymbol{h_{(\Omega,1)}} = \boldsymbol{Id_{\mathcal{P}}}$.

7°/ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

8°/ L'homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2.

Exemple 8

Soit ABCD un parallélogramme,

et I un point de la diagonale [BD] autre que B et D, (AI) coupe (BC) en E et (CD) en F.

Soit h l'homothétie de centre I qui transforme D en B.

1) Montrer que h transforme A en E.

2) Montrer que h transforme F en A

3) Déduire des questions précédentes l'égalité $IA^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

Solution

1) Les triangles IAD et IEB sont une configuration de Thalès,

A D

I

B E C

F

donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B transforme A en E.

2) Les triangles IDF et IBA sont aussi une configration de Thalès, donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B transforme F en A.

3) Soit k le rapport de h, d'après les questions 1) et 2) on a :

$\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IF}$.

Il en résulte que : $\overline{IE} = k\overline{IA}$ et $\overline{IA} = k\overline{IF}$,

d'où k = $\dfrac{\overline{IE}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IA}}{\overline{IF}}$ et par suite $\overline{IA}^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

C'est a- dire $IA^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

b) L'homothétie conserve ;

a- Le parallélisme :

$$(d_1)//(d_2)\ et \begin{cases} h_{(\Omega,k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1'//d_2'$$

b- L'orthogonalité :

$$(d_1) \perp (d_2)\ et \begin{cases} h_{(\Omega,k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1' \perp d_2'$$

c- L'alignement :

A, B et C sont trois points alignés, alors ;

$h_{(\Omega,k)}(A), h_{(\Omega,k)}(B)$ et $h_{(\Omega,k)}(C)$ sont alignés ;

d- Le contact :

$E = F_1 \cap F_2 \Longrightarrow$

$h_{(\Omega,k)}(E) = h_{(\Omega,k)}(F_1) \cap h_{(\Omega,k)}(F_2)$.

e- Le barycentre :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Longrightarrow$$

$$h_{(\Omega,k)}(G) = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_{(\Omega,k)}(A) & h_{(\Omega,k)}(B) & h_{(\Omega,k)}(C) \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

f- Les angles orientés :

Soit α un nombre réel, et $\widehat{ABC} = \alpha \Longrightarrow h_{(\Omega,k)}\left(\widehat{ABC}\right) = \alpha$.

10°/ Soit trois points O, A et B alignés et distincts deux-à-deux. Il existe une homothétie de centre O qui transforme A en B, le rapport de cette homothétie est $\frac{OB}{OA}$.

11°/ Soit A, B ; A' et B' quatre points du plan vérifiant $(A'B')//(AB)$ et $A'B' \neq AB$, alors, il existe une homothétie qui transforme A en A' et B en B'. Le centre de cette homothétie est ;

$O = (AA') \cap (BB')$, et son rapport est $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Remarques 1

Si une droite (D) passe par le centre Ω d'une homothétie h, alors elle est globalement invariante par h.

Remarques 2

Une homothétie est caractérisée par :

- Un centre et un rapport ;
- Un centre, un point et son image ;
- Un rapport, un point et son image ;
- Une des configurations de *Thalès*.

Exemple 9

P et Q sont deux points.

$G = bar$

P	Q
-3	1

Soit la fonction $f(M) = M'$ tel que ;

$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

Démontrer que f est une homothétie dont on caractérisera *(centre et rapport)*.

Solution

$G = bar$

P	Q
-3	1

et $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$

-

On a $G = bar$

P	Q
-3	1

$\Longrightarrow -3\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PM'} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}) + 3(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GM})$;

$= -\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} + 3\overrightarrow{GM}$;

Comme $\overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{GM}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM} \Longrightarrow f = h_{(G,3)}}$.

c) Expression analytique d'une homothétie

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit l'homothétie h de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k et notée $h_{(\Omega,\mathrm{k})}$. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, et $M'(x',y')$ son image par l'homothétie h.

On a ; $h_{(\Omega,\mathrm{k})}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$,

$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k.\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} kx - kx_0 \\ ky - ky_0 \end{pmatrix}$,

$\Longrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + kx - kx_0 \\ y' = y_0 + ky - ky_0 \end{cases}$,

$\Longrightarrow \boldsymbol{\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}}$.

Cette écriture est l'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les points $A(-7,5)$ et $B(3,-6)$.

1°/ Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(-2,4)$ et de rapport $k = \frac{5}{4}$;

2°/ Donner une équation de (AB) ;

3°/ Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

Solution

1°/ $\begin{cases} x_{A'} = \frac{5}{4}\times(-7)+\left(1-\frac{5}{4}\right)\times(-2) = \frac{-35}{4}+\frac{2}{4} = -\frac{33}{4} \\ y_{A'} = \frac{5}{4}\times 5+\left(1-\frac{5}{4}\right)\times 4 = \frac{25}{4}-1 = \frac{21}{4} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A'}\left(-\frac{33}{4},\frac{21}{4}\right)$$

$\begin{cases} x_{B'} = \frac{5}{4}\times 3+\left(1-\frac{5}{4}\right)\times(-2) = \frac{15}{4}+\frac{2}{4} = \frac{17}{4} \\ y_{B'} = \frac{5}{4}\times(-6)+\left(1-\frac{5}{4}\right)\times 4 = \frac{-30}{4}-1 = -\frac{34}{4} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B'}\left(\frac{17}{4},-\frac{34}{4}\right)$$

2°/ Soit $M(x,y)\in(AB) \Longrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires.

$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x+7 & 10 \\ y-5 & -11 \end{vmatrix} = 0\,;$

$\Longrightarrow -11(x+7)-10(y-5) = 0\,;$

$\Longrightarrow -11x-10y-27 = 0\,;$

$\Longrightarrow (\boldsymbol{AB}): \mathbf{11}\boldsymbol{x}+\mathbf{10}\boldsymbol{y}+\mathbf{27} = \mathbf{0}.$

3°/ a) Méthode 1 :

$(\Delta)//(AB)$, soit $M(x,y)$ un point de Δ, on a ;

$h: M \longmapsto M'\,;$

$\Longrightarrow \begin{cases} x' = \frac{5}{4}x+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}x+\frac{2}{4} \\ y' = \frac{5}{4}y-1 = \frac{5}{4}y-\frac{4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x' = 5x+2 \\ 4y' = 5y-4 \end{cases};$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x'-2}{5} \\ y = \dfrac{4y'+4}{5} \end{cases}$

$\Longrightarrow : 11\left(\frac{4x'-2}{5}\right)+10\left(\frac{4y'+4}{5}\right)+27 = 0$

$\Longrightarrow \frac{44x'-22}{5}+\frac{40y'+40}{5}+\frac{135}{5} = 0$

$\Longrightarrow 44x'-22+40y'+40+135 = 0$

$\Longrightarrow (\Delta): \mathbf{44}\boldsymbol{x'}+\mathbf{40}\boldsymbol{y'}+\mathbf{153} = \mathbf{0}$

b) Méthode 2 :

La droite $(\Delta)\ = (A'B')$, cherchons l'équation de $(A'B')$.

$M(x,y)\in(A'B') \Longrightarrow \overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{33}{4} & \frac{50}{4} \\ y-\frac{21}{4} & -\frac{55}{4} \end{vmatrix} = -\frac{55}{4}\left(x+\frac{33}{4}\right)-\frac{50}{4}\left(y-\frac{21}{4}\right) = 0$

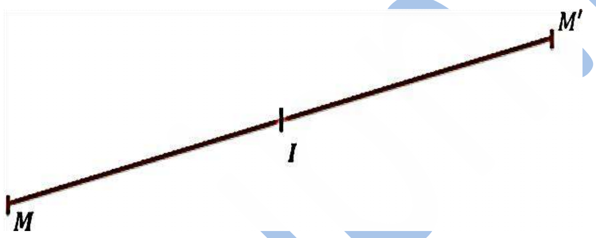
$$\Rightarrow -\frac{55}{4}x - \frac{1\,815}{16} - \frac{50}{4}y + \frac{1\,050}{16} = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{220}{16}x - \frac{1\,815}{16} - \frac{200}{16}y + \frac{1\,050}{16} = 0$$
$$\Rightarrow -220x - 200y - 765 = 0$$
$$\Rightarrow 44x + 40y + 153 = 0$$
$$\Rightarrow (\Delta) = (A'B') : \mathbf{44x + 40y + 153 = 0}$$

3. La Symétrie centrale

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit I un point fixé, on appelle symétrie centrale de centre I et on note S_I, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point I invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.

$$\boldsymbol{S_I(M) = M' \Leftrightarrow I = M * M' \Leftrightarrow \begin{cases} S_I(M) = M' \\ \quad et \\ S_I(I) = I \end{cases}}$$



Exemple 11

Soit ABC un triangle quelconque.

1°/ Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.

2°/ Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

Solution

1°/ $S_A(A) = A$; $S_A(B) = B'$; $S_A(C) = C'$.

$S_A(ABC) = AB'C'$.

2°/ A étant le milieu $[BB']$ et de $[CC']$, les deux diagonales de $BCB'C'$ on le même milieu A, donc $BCB'C'$ est un parallélogramme.

Remarque

La symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de centre Ω et de rapport -1

$\boldsymbol{S_\Omega = h_{(\Omega,-1)}}$.

a) Propriétés

1° $S_I(M) = M' \Leftrightarrow S_I(M') = M$.

S_I est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_I)^{-1} = S_I$.

2° Si une droite (Δ) passe par I, alors (Δ) est globalement invariante par S_I.

3° La symétrie centrale conserve la mesure d'un angle orienté ;

(Un angle direct aura pour image un angle direct, et un angle indirect aura pour image un angle indirect) ; $S_I(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

4° Une symétrie centrale transforme un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ en un cercle $\mathcal{C}'(\Omega', R)$ tel que Ω' est l'image de Ω.

b) La symétrie centrale conserve ;

a- La distance : (*la symétrie centrale est une isométrie*)

$S_I(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overline{M'N'} = \overline{MN}$.

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2) \; et \; S_I : (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \; et \; S_I : (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2)$

$$\Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$$

d- L'alignement

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_I(A)$, $S_I(B)$ et $S_I(C)$ sont alignés.

e- Le contact

$F = E \cap G \Longrightarrow S_I(F) = S_I(E) \cap S_I(G)$.

f) Le barycentre de deux points ou plus

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow$

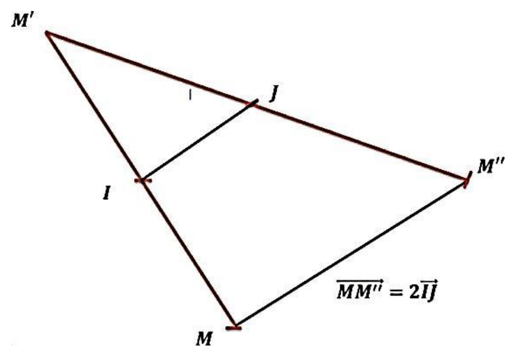
$S_I(G) = bar$

$S_I(A)$	$S_I(B)$	$S_I(C)$
α	β	γ

c) La composée de deux symétries centrales

$M : S_I \longrightarrow M' : S_J \longrightarrow M''$

$\Longrightarrow M \longrightarrow S_J \circ S_I \longrightarrow M''$



$S_I(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$,

$S_J(M') = M'' \Longrightarrow M'M'' = 2M'J$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'J}$

$= 2\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$.

Donc ; $\boldsymbol{S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$.

Exemple 12

$ABCD$ est un parallélogramme.

Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Solution

$S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = t_{2\overrightarrow{BA}} \circ t_{2\overrightarrow{DC}} = t_{2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})} = t_{\vec{0}}$.

$\Longrightarrow \boldsymbol{S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = Id_{\mathcal{P}}}$.

d) Expression analytique d'une symétrie centrale

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit le point $I(x_I, y_I)$.

Un point $M(x,y)$ du plan a pour image un point $M'(x',y')$ par la symétrie S_{I}, signifie que ;

$S_{\mathrm{I}}(M) = M' \Longrightarrow \mathrm{I} = M * M'$;

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x' + x}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y' + y}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_{\mathrm{I}} - x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_{\mathrm{I}} - y} \end{cases}$$

Cette écriture est l'expression analytique de la symétrie centrale de centre $\mathbf{I}$.

Exemple 13

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite d'équation (D): $5x - 6y + 3 = 0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C})$: $x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$.

1°/ Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(4;-7)$;

2°/ Donner une équation de $(\mathcal{C}') = S_B(\mathcal{C})$.

Solution

1°/ (D): $5x - 6y + 3 = 0$.

I- Première méthode

$\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = -14 - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 8 - x' \\ y = -14 - y' \end{cases}$;

$\Longrightarrow 5(8 - x') - 6(-14 - y') + 3 = 0$;

$\Longrightarrow 40 - 5x' + 84 + 6y' + 3 = 0$;

$\boldsymbol{(D'): 5x' - 6y' - 127 = 0}$.

II- Deuxième méthode

On a d'une part ; $(D)//(D') \Longrightarrow 5x - 6y + c = 0$.

D'autre part ; $E\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (D) \Longrightarrow S_B(E) = E' \in (D')$.

$\begin{cases} x_{E'} = 8 - 0 = 8 \\ y_{E'} = -14 - \frac{1}{2} = -\frac{29}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{E'\left(8, -\frac{29}{2}\right)}$.

E' vérifie l'équation de (D');

$5(8) - 6\left(-\frac{29}{2}\right) + c = 0 \Longrightarrow 40 + 87 + c = 0$;

$\Longrightarrow c = -127 \Longrightarrow \boldsymbol{(D')}: \boldsymbol{5x - 6y - 127 = 0}$.

2°/ $(\mathcal{C}): x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$;

I- Première méthode

$(8 - x')^2 + 8(8 - x') + (-14 - y')^2 - 2(-14 - y') - 152 = 0$;

$\Longrightarrow 64 - 16x' + x'^2 + 64 - 8x' + 196 + 28y' + y'^2 + 28 + 2y' - 152 = 0$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : x'^2 - 24x' + y'^2 + 30y' + 56 = 0}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 - 144 + (y + 15)^2 - 225 + 200 = 0}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 + (y' + 15)^2 - 169 = 0}$;

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 + (y' + 15)^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow \mathcal{C}'_{(H'(12,-15);\,13)}}.$$

II- Deuxième méthode

$$(\mathcal{C}): x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$$

Déterminons les coordonnées de H centre de $(\mathcal{C})$.

$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 - 152 = 0 \Longrightarrow$;

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 - 169 = 0 \Longrightarrow$;

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow H(-4, 1)$.

Soit H' le centre de $\mathcal{C}'$ tq $H' = S_B(H) \Longrightarrow$;

$\begin{cases} x_{H'} = 8 - (-4) = 12 \\ y_{H'} = -14 - 1 = -15 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{H'(12, -15)} \Longrightarrow$;

$$(\boldsymbol{\mathcal{C}'}): (\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{12})^2 + (\boldsymbol{y'} + \boldsymbol{15})^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'_{(H'(12,-15);\,13)}}$$

4. La Symétrie axiale ou réflexion

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ soit la droite fixée (Δ).

On appelle symétrie axiale (*ou réflexion*) d'axe (Δ) (*ou par rapport à la droite* (Δ)) et on la note S_Δ, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse les points de (Δ) invariants, et qui à tout point M de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (Δ), associe l'unique point M' de $\mathcal{P}$ tel que (Δ) soit la médiatrice de $[MM']$.

$$\boldsymbol{S_\Delta(M)} = \begin{cases} \boldsymbol{M \; si \; M} \in (\Delta) \\ \boldsymbol{M'} / (\Delta) = \boldsymbol{med}[\boldsymbol{MM'}] \; \boldsymbol{si \; M} \notin (\Delta) \end{cases}.$$

Exemple 14

Soit $ABCD$ un carré. Construire les images de $ABCD$ par les réflexions ; $S_{(AB)}$, $S_{(AC)}$.

Solution

$S_{(AB)}(A) = A$ (*car* $A \in (AB)$),

$S_{(AB)}(B) = B$ (*car* $B \in (AB)$),

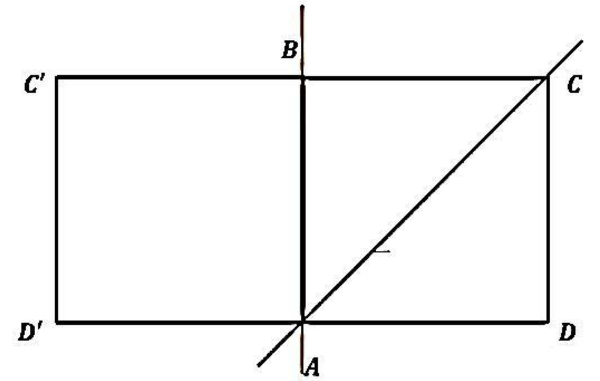
$S_{(AB)}(C) = C'/\ (AB) = med[CC']$,

$S_{(AB)}(D) = D'/\ (AB) = med[DD']$

Donc, l'image du carré $ABCD$ par la réflexion $S_{(AB)}$ est le carré $ABC'D'$.

$S_{(AC)}(A) = A$, $S_{(AC)}(B) = D$, $S_{(AC)}(C) = C$, $S_{(AC)}(D) = B$,

Donc, l'image du carré $ABCD$ $S_{(AC)}$ est lui-même.



Exemple 15

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire l'image de $ABCD$ par $S_{(BD)}$.

Solution

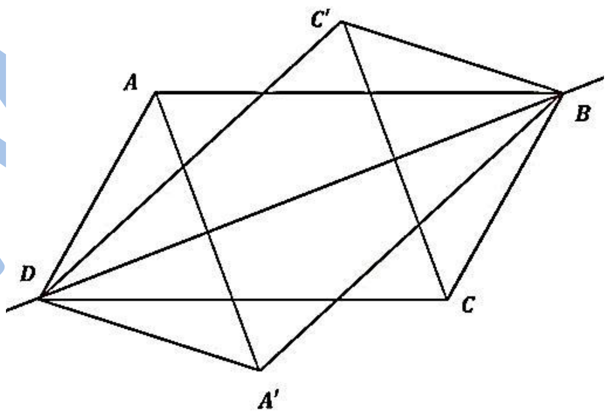
$S_{(BD)}(B) = B$ ($car\ B \in (BD)$),

$S_{(BD)}(D) = D$ ($car\ D \in (BD)$),

$S_{(BD)}(A) = A'/\ (BD) = med[AA']$,

$S_{(BD)}(C) = C'/\ (BD) = med[CC']$.

$S_{(BD)}: ABCD \longmapsto A'BC'D$ (*figure*).



a) Propriétés

1° $\boldsymbol{S_d(M) = M' \Leftrightarrow S_d(M') = M}$**.**

S_d est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_d)^{-1} = S_d$.

2° $S_d \circ S_d = Id_{\mathcal{P}}$ (*$Id_{\mathcal{P}}$ est l'application identique dans le plan $\mathcal{P}$*).

3° Si une droite (Δ) est perpendiculaire à (d), alors (Δ) est globalement invariante par S_d.

4° La réflexion change la mesure d'un angle orienté en son opposée :

(*Un angle direct aura pour image un angle indirect, et un angle indirect aura pour image un angle direct*).
$S_d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

b) La réflexion conserve ;

a- La distance : *(la réflexion est une isométrie)*

$S_d(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overline{M'N'} = \overline{MN}$

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2) \; et \; S_d: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \; et \; S_d: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2)$

$$\Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$$

d- L'alignement :

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_d(A)$, $S_d(B)$ et $S_d(C)$ sont alignés.

e- Le contact :

$F = E \cap G \Longrightarrow S_d(F) = S_d(E) \cap S_d(G)$.

f- Le barycentre :

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

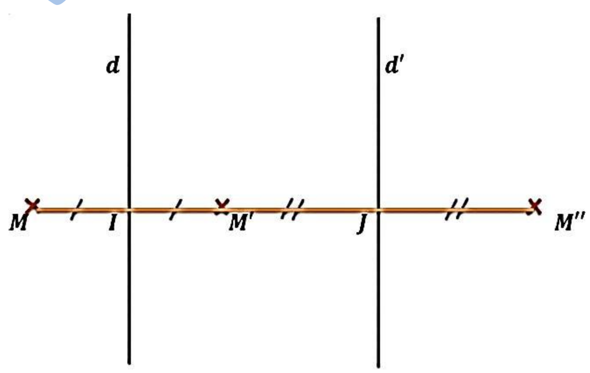
$\Longrightarrow$

$S_d(G) = bar$

$S_d(A)$	$S_d(B)$	$S_d(C)$
α	β	γ

c) Composée de deux réflexions ;

a- D'axes parallèles :



Soit S_d la réflexion d'axe (d) et $S_{d'}$ la réflexion d'axe (d').

$$M: S_d \longrightarrow M': S_{d'} \longrightarrow M''$$
$$M \longrightarrow S_{d'} \circ S_d \longrightarrow M''$$

$S_d(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$

$S_{d'}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}$

Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{IJ} \Longrightarrow t_{2\overrightarrow{IJ}}(M) = M''$.

D'où, $\boldsymbol{S_{d'} \circ S_d = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$, avec I un point de (d) et J son projeté orthogonal sur (d').

La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

Exemple 16

$ABCD$ est un carré.

Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

Solution

$S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{DA}}$; et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

b- D'axes perpendiculaires :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires en I, et soit S_Δ la réflexion d'axe (Δ) et $S_{\Delta'}$ la réflexion d'axe (Δ').

Cherchons à déterminer $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$;

$$M: S_\Delta \longrightarrow M': S_{\Delta'} \longrightarrow M''$$
$$M \longrightarrow S_{\Delta'} \circ S_\Delta \longrightarrow M''$$

$S_\Delta(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KM'}$

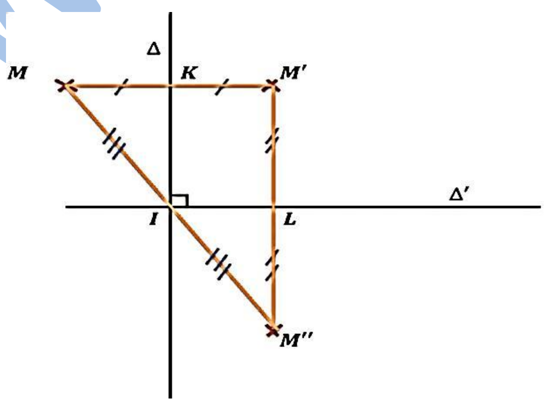
$S_{\Delta'}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'L}$

Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{KL}$.

Comme $(MM') \perp (M'M'') \Longrightarrow ABC$ est rectangle en M' et $I = M * M''$ (*propriété des milieux*).

Donc ; $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M'' \;/\; I = M * M''$.

Donc, la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale de centre I, point d'intersection des deux droites.



Exemple 17

ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A.

Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

Solution

On a $(AA') \perp (BC) \Longrightarrow S_{(AA')} \circ S_{(BC)} = S_{A'}$.

Exemple 18

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$;

Puis ; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

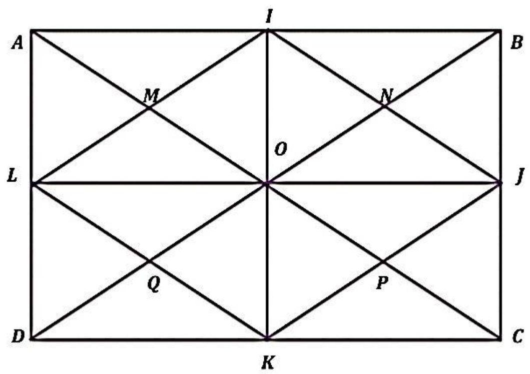
Solution

$S_{(AB)} \circ S_{(CD)} = t_{2\overrightarrow{CB}}$;

$S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)} = S_B \circ S_D = t_{2\overrightarrow{DB}}$.

Exemple 19

Sur la figure ci-dessous, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes ;



a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}}$, $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}}$;

b) $S_M \circ S_N$, $S_N \circ S_P$, $S_J \circ S_K$;

c) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)}$, $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$

Solution

a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}} = t_{\overrightarrow{AN}}$;
$t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}} = t_{\overrightarrow{AL}}$;
$t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}} = Id_{\mathcal{P}}$;

b) $S_M \circ S_N = t_{\overrightarrow{BA}}$;
$S_N \circ S_P = t_{\overrightarrow{CB}}$;
$S_J \circ S_K = t_{\overrightarrow{DB}}$;

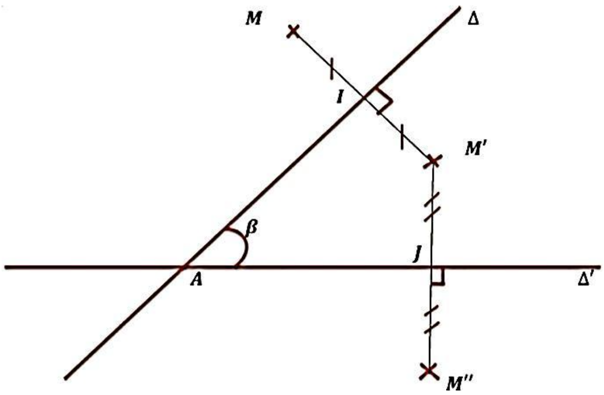
c) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)} = t_{\overrightarrow{KI}}$;
$S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_A$;
$S_{(BC)} \circ S_{(IK)} = t_{\overrightarrow{AB}}$.

c- D'axes sécants :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en A avec $\left(\widehat{\Delta, \Delta'}\right) = \beta$.

Posons $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$.

Etudions $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$



$\begin{cases} S_{\Delta}(M) = M' \\ M \notin (\Delta) \end{cases} \Longrightarrow (\Delta) = med[MM']$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}\right) \boxed{1} \end{cases}$

((Δ) *étant la bissectrice de* $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)$).

$S_{\Delta'}(M') = M'' \Longrightarrow (\Delta') = med[M'M'']$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM' = AM'' \\ \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right) = 2\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}\right) \boxed{2} \end{cases}$

((Δ') *étant la bissectrice de* $\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right)$).

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ;

$\begin{cases} AM = AM' = AM'' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right) = \end{cases}$

$$= 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}\right) + 2\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}\right)$$

$$= 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right) = 2\beta$$

Donc, $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M) = M''$ tel que ;

$AM = AM''$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''}\right) = 2\beta$

Avec $\beta = (\widehat{\Delta, \Delta'})$.

La transformation $R = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est appelé une rotation de centre A et d'angle 2β.

Exemple 20

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f

1°/ $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$;

2°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$;

3°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$;

4°/ $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

Solution

1°/ $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \Longrightarrow f(ABCD) = ADC'D'$ *(fig. 1).*

2°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)} = r_{\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)} \Longrightarrow f(ABCD) = A'D'CD$ *(fig. 2)*.

3°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}} \Longrightarrow f(ABCD) = A'D'C'D'$ *(fig. 3)*.

4°/ $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)} = S_O \Longrightarrow f(ABCD) = ABCD$.

$ABCD$ est globalement invariant par S_O *(fig. 4)*.

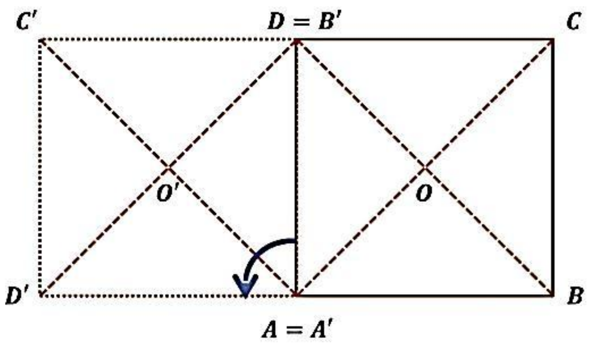


Figure 1

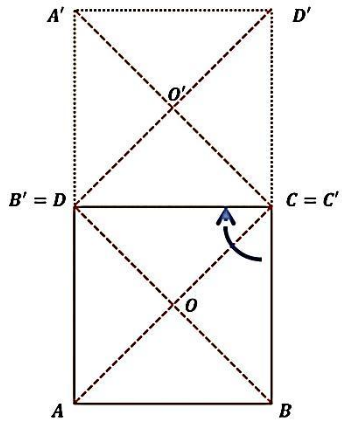


Figure 2

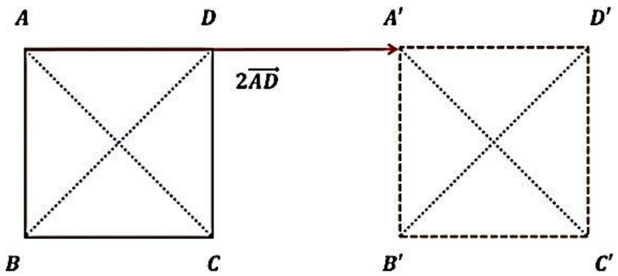


Figure 3

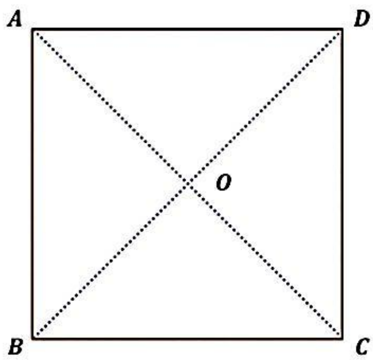


Figure 4

5. La rotation

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit un point A fixé et soit α un réel donné.

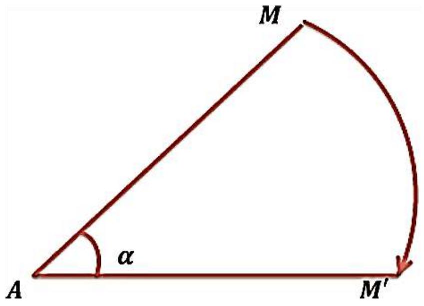
On appelle une rotation de centre A et d'angle α et on la note $R_{(A,\alpha)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point A invariant, et qui à tout point M distinct de A associe le point M' tel que ;

$AM' = AM$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha$.

On écrit ;

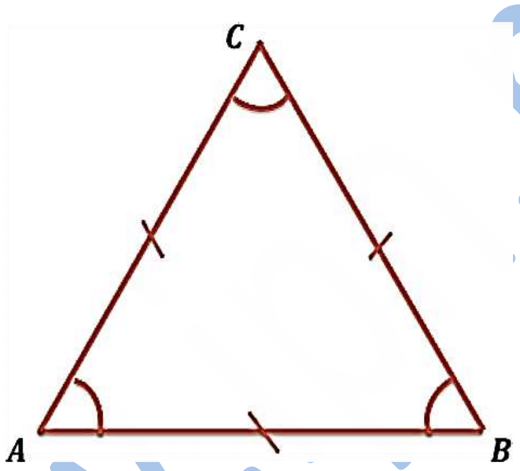
$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(A) = A \ \ et}$$

$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases}}.$$



Exemple 21

Soit ABC un triangle équilatéral direct



$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$$

$$\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow R_{\left(C;-\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$$

Exemple 22

Soit ABC un triangle non aplati. Construire l'image de ABC par $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

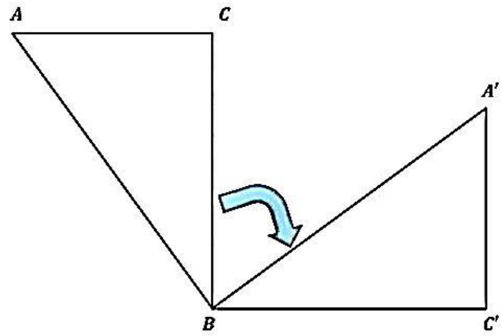
Solution

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(B) = B$;

$$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(A) = A' \Longrightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(C) = C' \Longrightarrow \begin{cases} CA = CA' \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(ABC) = A'BC'$ $(figure)$.



Exemple 23

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

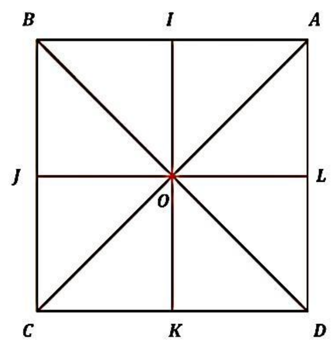
I, J, K et L sont les milieux respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 tel que ;

$R_1(A) = B$, $R_1(B) = C$, $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$

$R_2(I) = L$, $R_2(L) = K$, $R_2(K) = J$ et$R_2(J) = I$

Solution



Soit $R_1 = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$, il en résulte que ;

$R_1(A) = B$ car $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(B) = C$ car $\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(C) = D$ car $\begin{cases} OC = OD \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(D) = A$ car $\begin{cases} OD = OA \\ \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Soit $R_2 = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$, il en résulte que ;

$R_2(I) = L$ car $\begin{cases} OI = OL \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(L) = K$ car $\begin{cases} OL = OK \\ \left(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(K) = J$ car $\begin{cases} OK = OJ \\ (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(J) = I$ car $\begin{cases} OJ = OI \\ (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

a) Propriétés

1° $R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}\right) = -\alpha \end{cases} \Longrightarrow R_{(A,-\alpha)}(M') = M.$

La rotation $R_{(A,\alpha)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est une rotation de même centre et d'angle $-\alpha$ (opposé de α) ; $\left(R_{(A,\alpha)}\right)^{-1} = R_{(A,-\alpha)}$.

2° Si un cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre le point A, alors $(\mathcal{C})$ est globalement invariante par $R_{(A,\alpha)}$.

b) La rotation conserve ;

a- La distance : *(la rotation est une isométrie)*

$R_{(A,\alpha)}(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2) \text{ et } R_{(A,\alpha)}: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ et $R_{(A,\alpha)}: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$

d- Le contact :

$F = E \cap G \Longrightarrow$

$R_{(A,\alpha)}(F) = R_{(A,\alpha)}(E) \cap R_{(A,\alpha)}(G)$.

e- L'alignement :

A, B et C trois points alignés $\Longrightarrow$ $R_{(A,\alpha)}(A)$, $R_{(A,\alpha)}(B)$ et $R_{(A,\alpha)}(C)$ sont alignés.

f- Le barycentre :

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow$

$R_{(A,\alpha)}(G) = bar$

$R_{(A,\alpha)}(A)$	$R_{(A,\alpha)}(B)$	$R_{(A,\alpha)}(C)$
α	β	γ

g) L'orientation d'un angle :

La réflexion conserve la mesure d'un angle orienté;

(*Un angle direct a pour image un angle direct, et un angle indirect a pour image un angle indirect*).

$R_{(A,\alpha)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Propriété angulaire

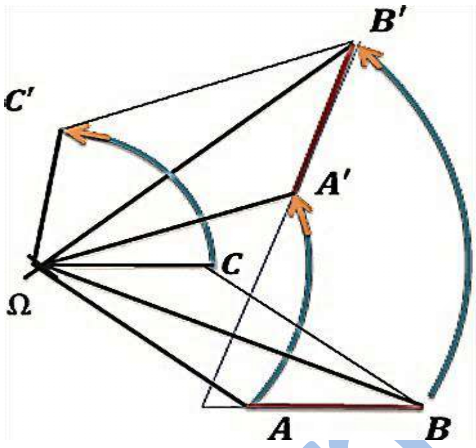
Si $R_{(\Omega,\alpha)}: (A, B) \longrightarrow (A', B')$,

Alors ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$

Démonstration

Soit C le point tel que ΩABC est un parallélogramme. Donc $C' = R_{(\Omega,\alpha)}(C)$ est le point tel que $\Omega A'B'C'$ est un parallélogramme, d'où ;

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega C'}\right) = \alpha.$



Remarques

A- Si Ω est le centre d'une rotation R, telle que ;

$R(M) = M'$,

Alors Ω est situé sur la médiatrice de $[MM']$.

B- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'appelle un quart de tour direct.

C- Une rotation d'angle π est une symétrie centrale dont le centre est le celui de la rotation.

$$\boldsymbol{R_{(\Omega,\pi)} = S_{\Omega}}.$$

D- Une rotation d'angle 0 est l'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple 24

A. Soient A et B deux points distincts d'un cercle Γ de centre O non diamétralement opposés.
Pour tout point M de Γ autre que A et B on désigne par H l'orthocentre de AMB. Soit enfin C le symétrique de A par rapport à O.
1) a) Montrer que (MH) / / ((BC).
 b) Montrer que (BH) / / (CM).
 c) En déduire la nature du quadrilatère MHBC.
2) a) Quelle est l'image d M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$?
 b) Quel est l'ensemble des points H lorsque M décrit Γ sauf A et B ? Dessiner cet ensemble.

B. Soit ABCD un parallélogramme de centre O ; soit I un point du segment [AB] et J un point du segment [BC].
On note s la symétrie de centre O, soient K et L les images respectives de I et J par s.
Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
Quelle est l'image de la droite (AB) par s ?
1) Montrer que K appartient à (CD).
2) Montrer que L appartient à (AD).

C. ABCD étant un parallélogramme, on note A' et C' les symétriques respectifs de A et C par rapport à (BD).

1) Faire une figure.

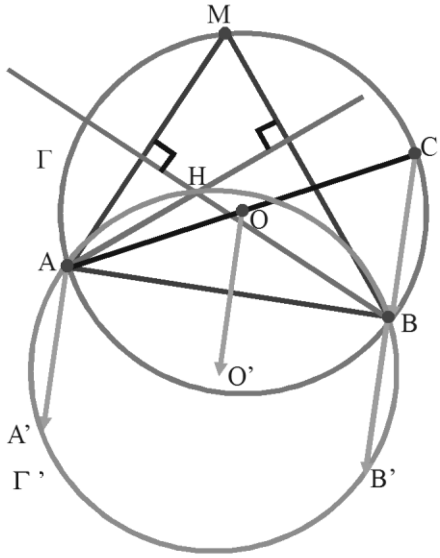
2) Montrer que le milieu de [AC] est encore celui de [A'C'], que peut-on déduire pour AA'CC' ?

3) Montrer que AC = A'C', que peut-on déduire pour AA'CC' ?

Solution

A. 1) (CB) et (MH) sont perpendiculaires à la même droite (AB).
Donc (MH) // (CB).

b) De façon analogue (BH) et (CM)



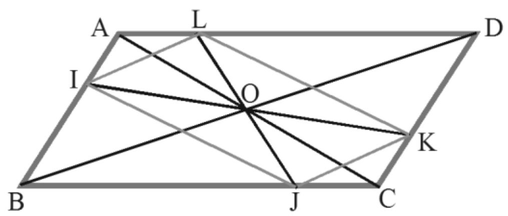
sont perpendiculaires à la même droite (AM), donc (BH) // (CM).

c) MHBC a ses côtés deux à deux parallèles, donc c'est un parallélogramme.

2°) a) MHBC est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(M) = H$.

b) Lorsque M décrit Γ, H décrit t(Γ) qui est un cercle Γ' de centre O' = t(O) et qui a le même rayon.

B. 1) La symétrie S de centre O transforme I en K et J en L.
Donc O est le milieu commun de [IK] et [JL], d'où IJKL est un parallélogramme de centre O.



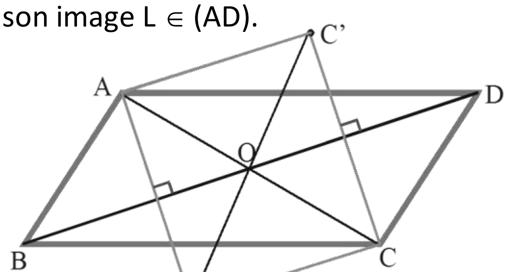
2) a) le centre O de ABCD est le milieu commun de [AC] et [BD].
S transforme donc A en C ; B en D et par suite (AB) en (CD).

b) I est un point de (AB), donc son image K par s est un point de l'image de (AB).
C'est- à dire de (CD) ; K $\in$ (CD).

3) utilisons un procédé analogue à celui de la question 2° ; on a vu que S transforme A en C ; donc C en A ; B en D.
Elle transforme donc (BC) en (AD), d'autre part J $\in$ (BC) et son image L $\in$ (AD).

C. 1) Construction :

2) une réflexion conserve les milieux.

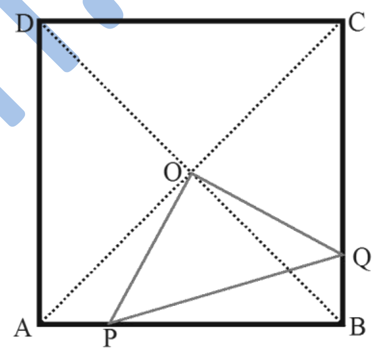


Le milieu de [AC] a pour image le milieu de [A’C’].
Or le milieu de [AC] est le centre O
du parallélogramme ABCD,
il appartient à la diagonale (BD),
il est donc sa propre image dans
la réflexion d’axe (BD).
Donc O est encore le milieu de [A’C’], le quadrilatère AA’CC4 est donc un parallélogramme.
3) une réflexion conserve les distances ; A a pour image A’ ; C a pour image C’ donc AC = A’C’.
Le parallélogramme AA’CC’ a ses diagonales de même longueur c’est un rectangle.

Exemple 25

Soit ABCD un carré direct $\left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}}\right)=\frac{+\pi}{2}\right)$; Soit P un point de [AB] et B le point du segment [BC] tel que BQ = AP ; On note O le centre de ABCD ; On désigne par r le quart de tour direct de centre O.
1) a) Quelle est l’image de A par r ?
b) Quelle est l’image de B par r ?
c) Déduire de a) et b) l’image par r du segment [AB].
2) a) Quelle est l’image de P par r ?
b) Montrer que le triangle OPQ est rectangle isocèle en O.

Solution



1) a) O est le centre du carré direct ABCD ; on a donc :
$$\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OB}\right)=\frac{+\pi}{2}\end{cases}$$
L’image de A par r est donc B.
b) On a de même $\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB}\ ;\overrightarrow{OC}\right)=\frac{+\pi}{2}\end{cases}$; l’image de B est donc C.
c) Il résulte des questions a) et b) que r([AB]) = [BC].
2) a) P $\in$ [AB] $\Rightarrow$ r(P) $\in$ [BC] et comme AP = BQ ; on trouve que r(P) = Q.
b) Puisque r transforme P en Q ; on a : $\begin{cases} OP = OQ \\ \left(\overrightarrow{OP}\ ;\overrightarrow{OQ}\right)=\frac{+\pi}{2}\end{cases}$
Il en résulte que OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercices généraux

Exercice 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d’un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(7;\ -2)$, $B(4;5)$ et $C(-1;3)$.

Déterminer les coordonnées des points $A’$, $B’$ et $C’$ images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{4}{-3}$.

Exercice 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d’un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-3}{2}$.

1°/ Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.

2°/ Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des points A' et B' image des points $A(1\,;\,-5)$ et $B(3,-1)$.

Exercice 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation ;

$5x-3y+3=0$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

3°/ La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon, le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Exercice 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne ;

$3x+2y-1=0$.

1° Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$;

2° Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $\mathcal{C}(A,3)$ tel que $(-4,1)$.

Exercice 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (d) une droite d'équation ; $4x+5y-2=0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de (d') image de (d) par la translation $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}$.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Construire l'image de $ABCD$ par la translation

$t_{\overrightarrow{AO}}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, A' le milieu de $[BC]$, C' le milieu de $[AB]$ et B'le milieu de $[AC]$.

Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme les sommets du triangle en milieux de ses côtés.

Exercice 8

ABC est un triangle non aplati, on note Δ_A, Δ_B et Δ_C les hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Caractériser une homothétie qui transforme les hauteurs de ABC en médiatrices de ABC.

Exercice 9

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, soit I le milieu $[AB]$, J le milieu $[CD]$ et O le l'intersection de ses diagonales.

Montrer que O, I et J sont alignés.

Exercice 10

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux parallélogrammes tels que ;

$E \in [AB]$, $G \in [AD]$ et $(EG)//(BD)$.

Montrer que A, F et C sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati.

Et soit $I = B * C$, $J = A * C$ et $K = A * B$.

Soit P le point d'intersection de la parallèle à (BJ) passant par K et la parallèle à (CK) passant par J

1) Faire une figure ;
2) Démontrer que A, P et I sont alignés.

Exercice 12

P et Q sont deux points.

$G = bar$

P	Q
-3	1

Soit la fonction $f(M) = M'$ tel que ;

$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

Démontrer que f est une homothétie dont on caractérisera *(centre et rapport)*.

Exercice 13

ABC est un triangle non aplati.

$A' = B * C$, $B' = A * C$ et $C' = A * B$.

P est un point du plan $\mathcal{P}$.

Les droites (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) passent respectivement par A, B et C et sont parallèles respectivement à (PA'), (PB') et (PC').

Soit G le centre de gravité de ABC.

1°/ Montrer que les droites (Δ_A), (Δ_B) *et* (Δ_C) sont sécantes en un point Q ;

2°/ Faire une figure ;

3°/ Justifier que P, Q et G sont alignés.

Exercice 14

Soit ABC un triangle non aplati.

$I = B * C$; $P \in [IC]$; $Q \in [BI]$ et $M \in [AI]$, tel que ; $(MP)//(AC)$ et $(MQ)//(AB)$.

1°/ Faire une figure ;

2°/ Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en M, déterminer $h(B)$ et $h(C)$.

3°/ Montrer que $I = P * Q$.

Exercice 15

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les points $A(5, -3)$ et $B(7, 2)$.

1°/ Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(4, -3)$ et de rapport $k = \frac{1}{3}$;

2°/ Donner une équation de (AB) ;

3°/ Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

Exercice 16

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$ sont donnés $A(2,3)$; $B(1,-2)$; $\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

1°/ Vérifier que $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan ;

2°/ Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$;

3°/ Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{u},\vec{v})$;

4°/ Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1,-3)$ dans $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de rapport 2, donner les coordonnées de Ω dans $(O;\ \vec{u},\vec{v})$;

5°/ Déterminer de deux façons une équation de la droite (Δ) image de (AB) par $h=h_{(\Omega,2)}$.

Exercice 17

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les droites ;

$$(\Delta_1) : 2x+3y-5=0\ ;$$

$$(\Delta_2) : 4x+6y+24=0\ .$$

1°/ Quelle est la position relative de (Δ_1) et (Δ_2) ?

2°/ Déterminer le rapport k_1 de l'homothétie h_1 de centre $I(3,4)$ transformant (Δ_1) en (Δ_2).

3°/ Déterminer le centre J d'abscisse nul de l'homothétie h_2 de rapport $k_2=2$ transformant (Δ_1) en (Δ_2).

Exercice 18

Soit $ABCD$ un carré.

On définit l'application f par $f(M)=M'$ tel que ;

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

1°/ Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$;

2°/ Construire A', B', C' et D' ;

3°/ Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$;

4°/ Soit $G=bar$

A	B	C	D
1	-1	1	1

Exprimer $f(M)$ en fonction $\overrightarrow{MG}$;

Quelle est la nature de f ?

Exercice 19

$ABCD$ est un losange tel que ;

$$AB=3\ et\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

C' est l'image de C par le quart de tour direct de centre B. O est le point commun entre (CC') et (BD). A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O qui transforme C en C'.

1°/ Montrer que (BD) est la médiatrice de $[A'C']$;

2°/ Déterminer la nature du quadrilatère $AC'A'C$;

3°/ Déterminer le rapport k de l'homothétie h.

Exercice 20

Soit ABC un triangle non aplati. Les points P, Q et R sont tels que ;

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ; \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ; \quad \overrightarrow{BR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Soit T le milieu de $[PB]$ et S le milieu de $[BR]$.

1°/ Faire une figure ;

2°/ 1°) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme ;

A°/ Q en C,

B°/ T en P,

C°/ P en B.

2°) Déterminer le centre de l'homothétie h de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme ;

A°/ Q en C,

B°/ P en A,

C°/ R en C.

3°) déterminer les images par $h_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$ de ;

A°/ La droite (BC),

B°/ Le segment $[AC]$,

C°/ Le triangle ABC.

Exercice 21

ABC est un triangle non aplati. E et F sont les points définis par ;

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} \qquad ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AC}.$$

1°/ Faire une figure ;

2°/ Exprimer E comme barycentre de $(A; B)$;

3°/ Que peut-on dire des droites (CE) et (BF) ?

4°/ Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre A qui transforme B en E ;

5°/ Quelle est l'image de F par h ?

6°/ Existe-t-il une homothétie h' qui transforme B en C et F en E, si oui quels sont ses éléments caractéristiques ?

Exercice 22

ABC est un triangle non aplati.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe le point M' tel que ; $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Soit D le point du plan $\mathcal{P}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1°/ Déterminer les points A', B', C'et D'.

2°/ Que représente A' pour A, B' pour B, C' pou C ?

3°/ Quelle est donc la nature de la transformation f qui à M associe M' ? Pourquoi ?

Exercice 23

Soit ABC un triangle quelconque.

1°/ Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.

2°/ Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

Exercice 24

$ABCD$ est un parallélogramme.

Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Exercice 25

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite d'équation (D): $3x + 2y - 4 = 0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C})$: $x^2 - 6x + y^2 - y = 0$.

1°/ Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(-1; 2)$;

2°/ Donner une équation de $(\mathcal{C}') = S_B(\mathcal{C})$.

Exercice 26

$ABCD$ est un carré.

Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

Exercice 27

ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A.

Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

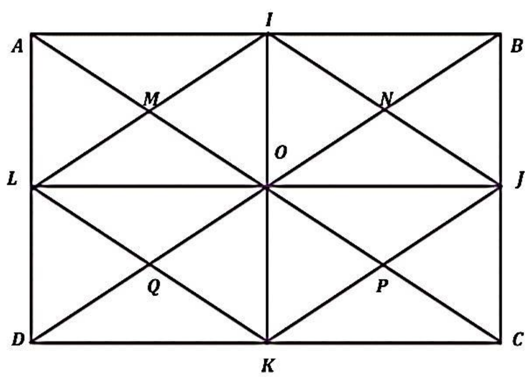
Exercice 28

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$;

Puis ; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

Exercice 29

Sur la figure ci-dessous, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes ;



d) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}}$, $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}}$;

e) $S_M \circ S_N, S_N \circ S_P, S_J \circ S_K$;
f) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)}, S_{(AB)} \circ S_{(AD)}, S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$

Exercice 30

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f

1- $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$;
2- $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$;
3- $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$;
4- $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

Exercice 31

Soit ABC un triangle équilatéral direct. Montrer que ;

$$R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C \text{ et } R_{\left(C;-\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$$

Exercice 32

Soit ABC un triangle non aplati.

Construire l'image de ABC par $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Exercice 33

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 tel que ;

$R_1(A) = B$, $R_1(B) = C$, $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$

$R_2(I) = L$, $R_2(L) = K$, $R_2(K) = J$ et$R_2(J) = I$

Exercice 34

$ABCD$ est un carré direct. Les triangles ABE et BFC sont équilatéraux directs.

Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 35

ABC est un triangle rectangle direct. M est un point intérieur au triangle tel que $MA = 5cm$; $MB = 4cm$; $MC = 3cm$. Soit N le point du plan tel que AMN soit équilatéral direct.

1) Calculer les distances MN et NC ;
2) Quelle est la nature du triangle MNC ?
3) Déterminer une mesure de l'angle ANC ;
4) En déduire une valeur approchée de AC.

Exercice 36

ABC est un triangle quelconque ; on construit extérieurement les carrés $ABDE$ et $ACFG$.

Montrer que $BG = CE$ et $(BG) \perp (CE)$.

Symétries et translations

Exercice 38

ABCD est un rectangle de centre θ. Déterminer les transformations suivantes :

a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$; $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$;
b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{\theta}$;
c) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(DO)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$;
d) $S_A \circ S_{\theta}$; $S_B \circ S_{\theta}$; $S_C \circ S_{\theta}$;
e) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

Homothéties

Exercice 39

Traduire par des égalités vectorielles les

phrases suivantes :

a) M' est l'image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 5.

b) Le point C a pour image D par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$.

c) L'homothétie de centre I et de rapport -3 transforme A en B.

Exercice 40

Interpréter en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP}$; $\frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{RG}$.

Exercice 41

Soit l'homothétie de centre I et de rapport -2 ; A' ; B' ; C' sont les images des points A, B, C par cette homothétie.

Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{IB'} = ...\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{C'B'} = ...\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{A'B'} = ...\overrightarrow{AB}$.

Exercice 42

Soient A ; B et C trois points deux à deux distincts.

Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.

1) $\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}=0$; 2) $\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BA}=0$; 3) $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}$.

Exercice 43

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{BC}$.

Déterminer le rapport de :

a) L'homothétie de centre A qui transforme C en B.
b) L'homothétie de centre B qui transforme A en C.
c) L'homothétie de centre C qui transforme A en B.

Exercice 43

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] ; et M un point du plan. Construire l'image de M par l'homothétie qui transforme A en C et B en D.

Exercice 44

On considère la figure suivante :

a) Trouver le centre de l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C.
b) Trouver le centre de l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B.

Exercice 45

Soit ABC un triangle ; H son orthocentre, θ le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. Une homothétie h transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'.Définir les images des points H ; θ ; I par cette homothétie.

Exercice 46

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Calculer les coordonnées du point M' image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 3.

Exercice 47

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère l'application h du plan dans lui-même qui à tout point M(x ; y) associe le point

M'(2x -1 ; 2y +3).

a) Démontrer qu'il existe un unique point I tel que h(I) = I.
b) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 48

Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ; y) associe M'(-2x + 3 ; -2y -6). Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

Déterminer en fonction de x et y les coordonnées du point M''image de M par la transformation réciproque de f.

Exercice 49

ABC est un triangle ; M est un point du plan. On considère les transformations f, g et k tels que :

$f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ h_{(C\,;\,2)}$; $g = h_{(C\,;\,2)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $k = h_{(C\,;\,2)} \circ h_{(B\,;\,\frac{1}{3})}$.

Construire les images M_1 ; M_2 et M_3 du point M par les trios transformations f; g et k.

Rotations

Exercice 50

Soit OAB un triangle isocèle en O ; tel que $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer les points : $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(A)$ et $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(B)$.

Construire à la règle et au compas les points :

- $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(A)$; $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(B)$; $r_{(A\,;\,\frac{3\pi}{4})}(B)$;
- $r_{(B\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(A)$; $r_{(B\,;\,\frac{3\pi}{8})}(\theta)$; $r_{(A\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(\theta)$

Exercice 51

Soit Soit ABCD un rectangle tel que : Mes$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Construire à la règle et au compas l'image de ce rectangle par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 52

Soit Δ une droite et θ un point extérieur à Δ.

1) a) Construire l'image Δ' de Δ par le quart de tour direct de centre θ; on écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.

Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{u'})$?

2) Même question pour le quart de tour indirect de centre θ.

Exercice 53

Soit Δ une droite, θ un point extérieur à cette droite.

1) a) Construire l'image Δ' de Δ par la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On écrira et justifiera le programme de construction.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.

Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{u'})$?

2) Même question avec la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 54

Soit ABC un triangle équilatéral tel que

Mes$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$; G son centre de gravité et A'B'C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].

Quelle est la nature des transformations f ; g et k ?

Quels sont les points $r_{(B ; \frac{\pi}{3})}(C)$; $r_{(A ; \frac{\pi}{3})}(B)$; $r_{(C ; \frac{\pi}{3})}(A)$?

Déterminer le centre et l'angle d'une rotation qui transforme A en B ; B en C ; C en A.

Construire les points P ; Q et R tels que :

$P = r_{(A; \frac{\pi}{3})}(C)$; $Q = r_{(C ; \frac{\pi}{3})}(B)$; $R = r_{(B ; \frac{\pi}{3})}(A)$.

Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 55

Soient A et A' deux points distincts et r une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A'.

Construire à la règle et au compas le centre de cette rotation.

Exercice 56

Soit ABCD un carré tel que ($AB \,;\, AD) = \frac{\pi}{2}$

On note E ; F ; G et H les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].

1) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A. Déterminer son centre et son angle.

2) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A, Déterminer son centre et son angle.

3) Montrer qu'il existe une rotation transformant A en D et G en F, Déterminer son centre et son angle.

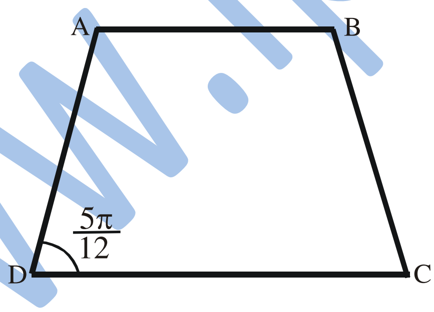
4) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E, Déterminer son centre.

b) soit α la mesure principale de son angle ; démontrer que tan($\frac{-\alpha}{2}$) = 2 ; en déduire à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α.

Exercice 57

Soit ABCD un trapèze de bases [AD] et [BC], tel que Mes($\overrightarrow{BC} \,;\, \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{12}$.

1) Trouver une rotation transformant A en D et B en C. Préciser son centre et son angle.



2) Trouver une Rotation transformant A en C et B en D. Préciser son centre.

Exercice 58

ABC un triangle équilatéral direct, $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, M un point de AC et I le point du segment [MB] tel que MI = MA.

1) Démontrer que le triangle AMI est équilatéral.

2) Déterminer l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.

3) En déduire que: MA + MC = MB.

Exercice 59

ABC un triangle équilatéral tel que Mes($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) $= \frac{\pi}{3}$, G son centre de garvité ; A'; B'; C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].

Déterminer trois couples de droites (Δ ; Δ') telles que la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ soit l'application $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$.

Exercice 60

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$).

Soit r la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, M un point de coordonnées (x ; y) ; I' ; J' ; M' les images respectives de I ; J ; et M par r.

Démontrer que le repère (O ; $\vec{I'}$; $\vec{J'}$) est orthonormé direct.

Démontrer que le point M' a pour coordonnées

(x ; y) dans le repère (O ; $\vec{I'}$; $\vec{J'}$).

Exprimer en fonction de x et y les coordonnées de M' dans le repère (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$).

XV- GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Faire savoir

Le cours

1. Détermination d'une droite dans l'espace

Une droite dans l'espace est déterminée par ;

A- Un vecteur directeur et un point :

$$(\boldsymbol{d}) : \left(\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix};\ A(2,0,-9)\right)$$

B- Deux points :

$$(\boldsymbol{d}) : \left(A(0,10,-3);\ B(1,-4,11)\right)$$

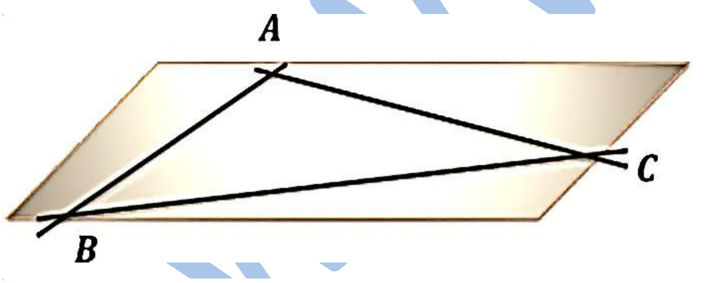
C- Un système d'équations de plans.

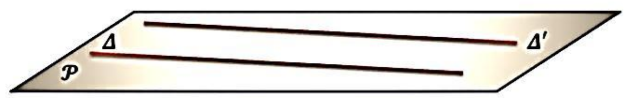
$$(\boldsymbol{d}) : \begin{cases}2x + 3y - 5z - 7 = 0\\ x - 4y + 6z + 1 = 0\end{cases}$$

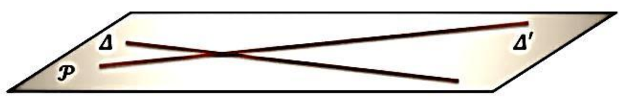
2. Détermination d'un plan dans l'espace

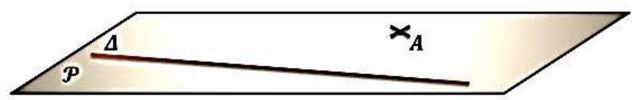
Un plan dans l'espace est déterminé par ;

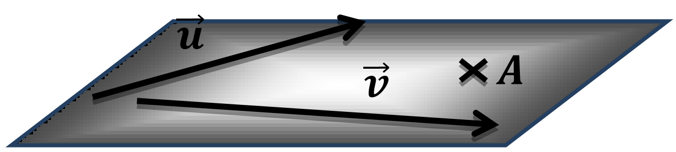
- **A-** Trois points non alignés
- **B-** Deux droites parallèles
- **C-** Deux droites sécantes
- **D-** Une droite et un point non situé sur la droite
- **E-** Un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires.







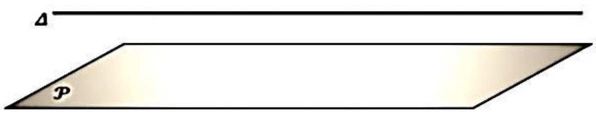




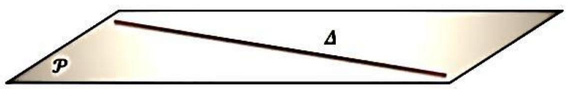
3. Positions relatives de droites et de plans

A- Plans et droites

Une droite et un plan sont ou sécants, ou parallèles.

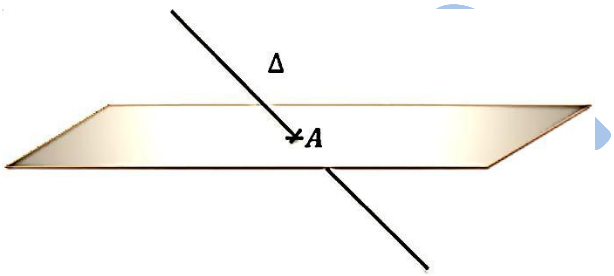


$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \emptyset \Longrightarrow (\Delta) // \mathcal{P}$



$(\Delta) \in \mathcal{P} \Longrightarrow (\Delta) // \mathcal{P}$

(*La droite est contenue dans le plan*)

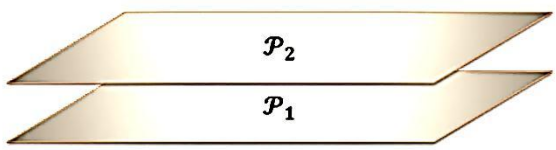


Δ coupe $\mathcal{P}$: $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$; on dit que (Δ) perce le plan

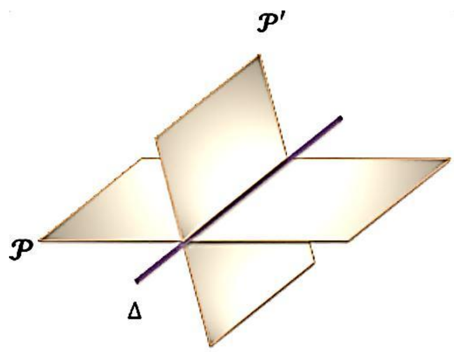
4. Plans et plans

Deux plans sont sécants ou parallèles.

L'intersection de deux plan est une droite ;



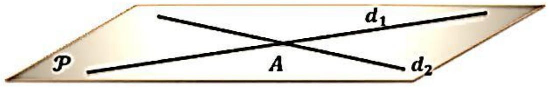
$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$

5. Droites et droites

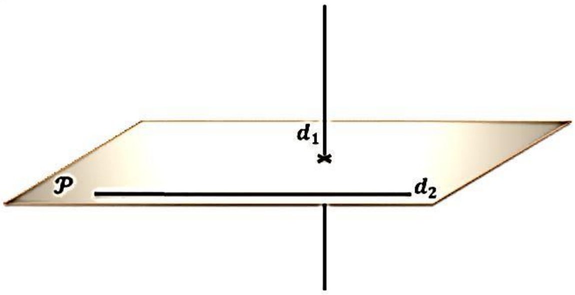
Deux droites dans l'espace sont coplanaires ou non coplanaires.



1- $(d_1) \,//\, (d_2)$

2- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\}$

Dans les deux figures ci-dessus, les droites (d_1) et (d_2) sont dites coplanaires



3- $\begin{cases} (d_1) \cap (d_2) = \emptyset \\ (d_1) \nparallel (d_2) \end{cases}$

Dans la figure ci-dessus les droites (d_1) et (d_2) sont dites non coplanaires

Remarque

Si une droite (d) a deux points distincts contenus dans un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite sont contenus dans ce plan (*la droite est incluse dans le plan*)

6. Le parallélisme dans l'espace

a) Droite et plan

Une droite (d) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si elle est parallèle à une droite de ce plan.

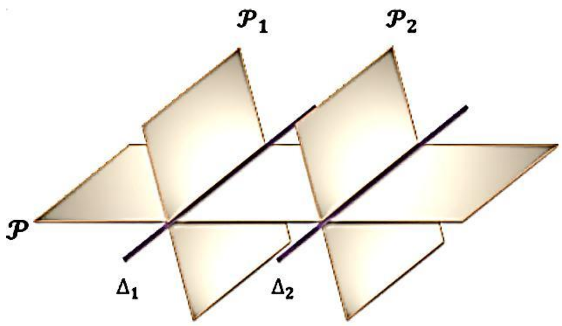
a- Conséquences

- Il existe une infinitude de droites passant par un point donné et parallèles à un plan donné.

- Il existe une droite et une seule passant par deux points donnés et parallèle à un plan donné.

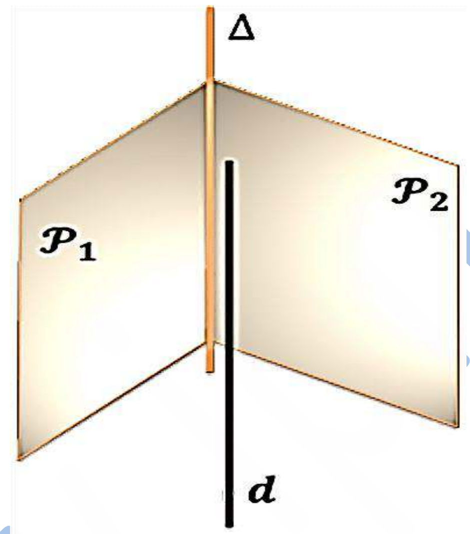
b- Propriétés

1° Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.



$$\left\{\begin{array}{c}\mathcal{P}_1//\mathcal{P}_2\\ \mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}=(\Delta_1)\\ \mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}=(\Delta_2)\end{array}\right\}\Longrightarrow(\Delta_1)//(\Delta_2)$$

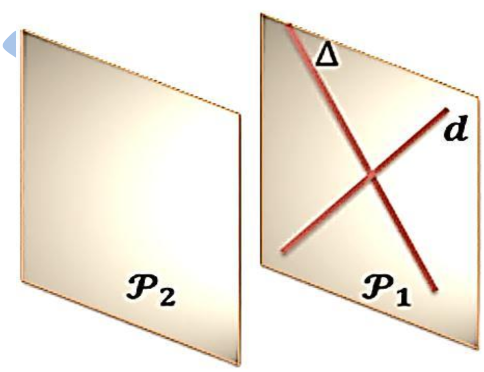
2° Si une droite (d) est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite (Δ), alors (d) est parallèle à $(\Delta)\ =\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

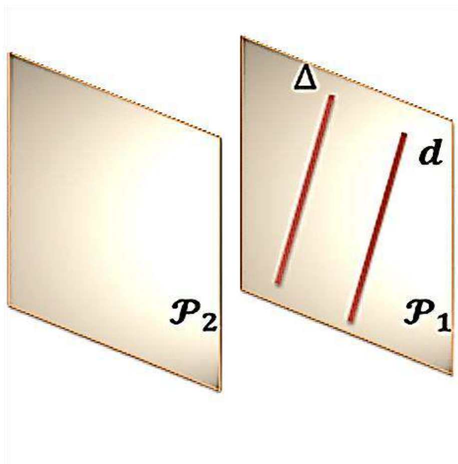


$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\mathcal{P}_1}//(\boldsymbol{d})\\ \boldsymbol{\mathcal{P}_2}//(\boldsymbol{d})\\ \boldsymbol{\mathcal{P}_1}\cap\boldsymbol{\mathcal{P}_2}=(\Delta)\end{array}\right\}\Longrightarrow(\boldsymbol{d})//(\Delta)\,.$$

b) Plans

Deux plans sont parallèles si l'un d'eux est parallèle à deux droites sécantes ou deux droites parallèles appartenant à l'autre.





c) Théorème du toit

Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.

a- Conséquences

A- Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un plan donné.

B- Il existe un plan et un seul parallèle à un plan donné et contenant une droite parallèle à ce plan donné.

C- Un plan coupe deux plans sécants suivant deux droites parallèles à la droite d'intersection des deux plans.

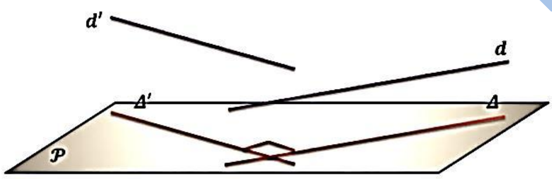
D- Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

E- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

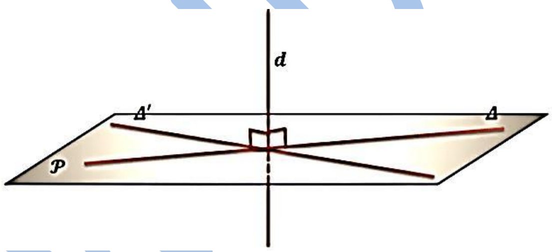
F- Un plan parallèle à deux droites sécantes est parallèle au plan de ces deux droites.

7. Orthogonalité dans l'espace

a) Deux droites sont orthogonales dans l'espace si leurs parallèles coplanaires (*qui passent par le même point*) sont perpendiculaires.



b) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.



c) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

8. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

a) Si (Δ) est parallèle à (Δ') et (d) est perpendiculaire à (Δ), alors (d) est aussi perpendiculaire à (Δ'), et tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (Δ) est perpendiculaire à (Δ').

b) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles toute droite (d) perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre, et tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

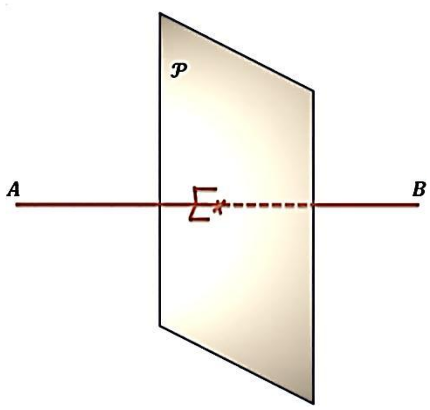
c) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires à la même droite d ou au même plan Q, alors ils sont parallèles.

9. Plan médiateur

$\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, s'il passe par le milieu de $[AB]$, et est perpendiculaire à son support (AB).

a) Propriété

Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points de l'espace équidistants des deux extrémités de ce segment.

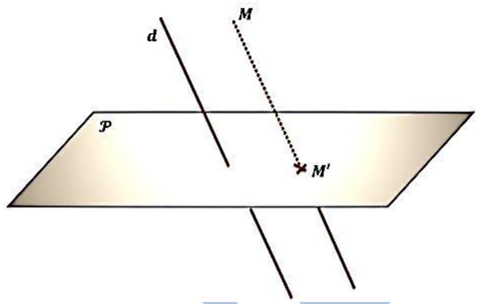


10. Projection

Définition

Soit un $\mathcal{P}$ plan et une droite (d) sécants en un point A. Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ la parallèle à (d) passant par M coupe $\mathcal{P}$ en M'.

Le point M' est appelé projeté de M sur $\mathcal{P}$ selon (d) ou parallèlement à (d).

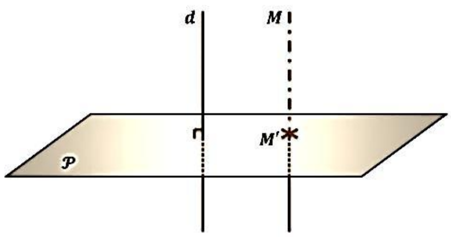


L'application $\wp$ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ est appelée projection de $\mathcal{E}$ sur (*ou dans*) $\mathcal{P}$ selon (d), et on note ;

$$\begin{aligned} \wp : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longrightarrow M' \end{aligned}$$

a) Cas particulier

Si $d \perp \mathcal{P}$ alors $\wp$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.



Exemple 1

Soit le cube $ABCDEFGH$;

$(EF)//(HG)$; $(HG)//(AB)$;

(EG) et (HF) sont sécantes ;

(AG) et (EC) sont sécantes ;

(EG) et (DB) ne sont pas coplanaires ;

(FC) et (HA) ne sont pas coplanaires ;

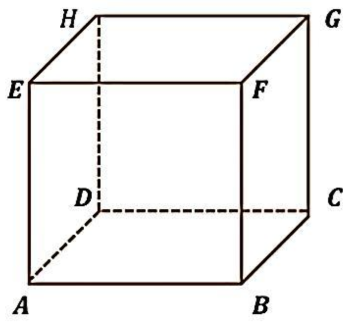
$(EGH)//(ABC)$; $(BFG)//(HED)$;

$(ADB) \perp (HGC)$; $(AHG) \perp (EFC)$;

(ABC) et (EFC) sont sécants;

$(HG)//(ABC)$; $(EB) \subset (ABF)$; $(HD) \perp (ABC)$.

(AG) *et* (HDC) sont sécantes.



Exemple 2

On considère un cube ABCDEFGH (voir figure).

1) citer toutes les arêtes du cube qui :

a) sont parallèles à (AB).

b) coupent (AB)

c) ne sont pas coplanaires avec (AB).

2) Citer toutes les faces du cube qui :

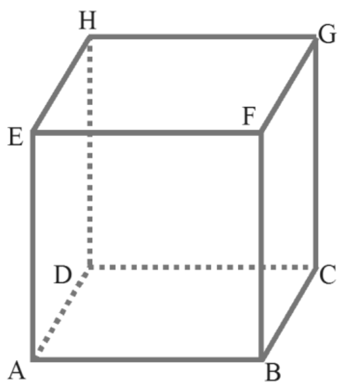
a) sont parallèles à (AB) ;

b) coupent (AB) ;

3) citer toutes les faces du cube qui

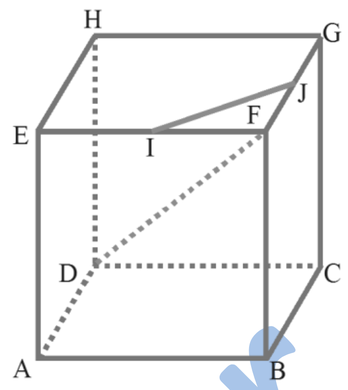
a) sont parallèles à (ABCD)

b) coupent (ABCD).



4) Soit I le milieu de [EF], J celui de [FG] ; les droites (DF) et (IJ) sont-elles coplanaires ?

Solution



1) Un cube à 12 arêtes dont

4 arêtes sont parallèles à (AB) : (AB) ; (CD) ;(EF) et (GH) ;

b) 4 arêtes coupent (AB) : (BC) ; (BF) ; (AD) et (AE).

c) les 4 arêtes restantes ne sont pas parallèles à (AB)

et ne coupent pas (AB), donc elles ne sont pas

coplanaires avec (AB) : (CG) ; (DH) ; (FG) et (EH).

2) Un cube à six faces

a) quatre sont parallèles à (AB) : (ABCD) ; (ABEF) ; (CDHG)

et (EFGH).

b) les deux autres coupent (AB) ; ce sont (BCGF) et (ADHE).

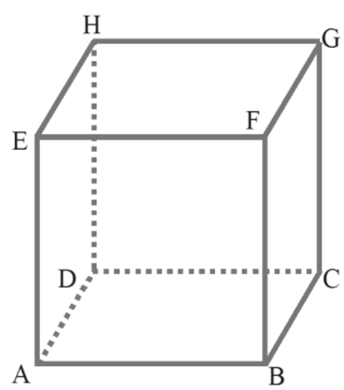
3) a) Deux faces sont parallèles à (ABCD) : (ABCD) et (EFGH).

b) les quatre autres coupent (ABCD) : (BCFG) ; (ADHE) ; (CDHG) et (ABFE).

4) si un plan contient les droites (IJ) et (DF) ; alors il contient en particulier les trois points I ; J et F ; ce plan est alors le plan (EFGH).

Mais D n'appartient pas à (EFGH) donc (IJ) et (DF) ne sont pas coplanaires.

Exemple 3



La figure est celle de l'application 1.

Le côté du cube mesurant 4 cm.

On considère les points I de [AB], et J de [BC] tel que :

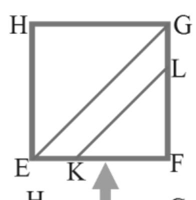
BI = BJ = 1 cm, ainsi que les points K de [EF] et L de [FG]

tel que : EK = LG = 1 cm.

1) Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

2) Montrer que les droites (KL) et (EG) sont parallèles ;

3) Déduire des questions précédentes que les droites (IJ) et



(KL) sont parallèles.

Solution

1) I $\in$ (AB) ; J $\in$ (BC), donc les cinq points A ; B ; C ; I et J sont coplanaires.

Dans le triangle ABC on a : $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{1}{4}$; de plus I et J appartiennent aux

segments [BA] et [BC]. Donc, d'après la réciproque de Thalès,

(IJ) et (AC) sont parallèles.

2) Comme dans la question 1), mais dans le triangle EFG on a :

$\frac{FK}{FE} = \frac{FL}{FG} = \frac{3}{4}$; K $\in$ [EF] ; L$\in$ [FG] ; il en résulte que (KL) et (EG) sont parallèles.

3) On sait que ACGE est un parallélogramme (propriété du cube) ;

donc (EG) et (AC) sont parallèles ; et on a : (KL)$\mathbin{/\!/}$(EG) ; (EG)$\mathbin{/\!/}$(AC) et

(AC)$\mathbin{/\!/}$(IJ). Il en résulte que (KL) et (IJ) sont parallèles.

Exemple 4

Soit ABCD un tétraèdre régulier (toutes les arêtes sont de même longueurs) ; Soient J et K les milieux respectifs de [CD] et [BC] et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1) Montrer que le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).

2) Montrer que (AH) est orthogonale à (CD° et en déduire que H appartient au plan (ABJ) puis que H appartient à al droite (BJ).

3) Montrer que H appartient à (DK).

4) Que représente H pour le triangle (BCD) ?

5) Calculer en fonction de l'arête a du tétraèdre les distances BH et AH.

Solution

1) BC = BD ; AC = AD ; JC = JD, donc le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).

2) (AH) est orthogonale au plan (BCD) ; donc (AH) est orthogonale à (CD), donc H appartient à l'unique plan qui passe par A et est orthogonal à (CD) ; c'est-à-dire plan médiateur de [CD] qui est (ABJ).

On vient de voir que H appartient au plan (ABJ), or H appartient par définition au plan (BCD), donc H appartient à la droite d'intersection des plans (ABJ) et (BCD) qui est (BJ).

3) KB = KC ; AB = AC ; DB = DC, donc le plan médiateur de[BC] c'est le plan ADK; (AH) est orthogonal à (BCD) donc à (BC); H appartient donc à l'unique plan qui passé par A et est orthogonal à (BC) c'est-à-dire (ADK). H appartient à la fois à (ADK) et à (BCD), donc H appartient à leur droite d'intersection qui est (DK).

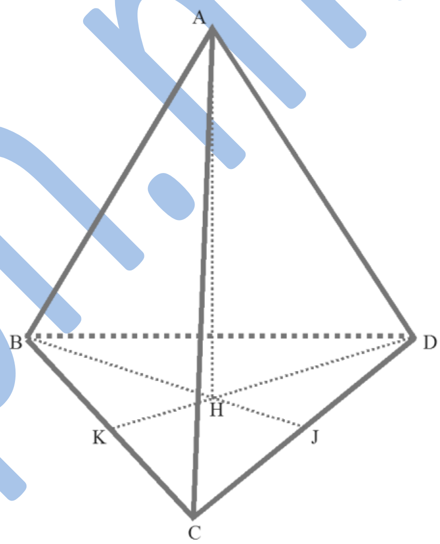
4) H est commun aux médianes (BJ) et (DK) du triangle (BCD) ; H est donc, le centre de gravité du triangle (BCD).

5) BCD est équilatéral de côté a ; sa hauteur BJ vaut donc $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

H est le centre de gravité de BCD.

Donc, BH = $\dfrac{2}{3}$ BJ ; d'où BH = $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

(AH) est orthogonale au plan (BCD), donc en particulier à (BH).



Dans le triangle ABH rectangle en H, on a :

$AH^2 = AB^2 - BH^2$

$= a^2 - (\dfrac{a\sqrt{3}}{3})^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2}{3}\ a^2.$

Donc, AH = $a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; BH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; AH = $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

11. Les vecteurs dans l'espace

Définition

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}_3$

a) Base de $\mathcal{V}_3$

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tous non nuls de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$ et deux-à-deux linéairement indépendants.

Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est alors appelé base de l'ensemble des vecteurs de l'espace $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$.

b) Composantes d'un vecteur dans $\mathcal{V}_3$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$**,** signifie que pour tout vecteur $\vec{e} \in \boldsymbol{\mathcal{V}_3}$, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que ;

$\vec{e} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w}.$

Inversement, soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$, et soit (α, β, γ) un triplet de réels. Il existe un seul vecteur $\vec{e}$ de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$ tel que ; $\vec{e} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w}$.

Le triplet de réels (α, β, γ) est appelé composantes ou coordonnées du vecteur $\vec{e}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$, et on note ;

$\vec{e}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, l'expression $\vec{e}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$ est la décomposition du vecteur $\vec{e}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Remarque

$$\vec{e}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}\Leftrightarrow\vec{e}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

c) Repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définition

Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de $\mathcal{V}_3$ et O un point quelconque de l'espace.

Le quadruplet $(O;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est appelé repère de l'espace $\mathcal{E}$.

Remarque

Si A, B, C et D sont quatre points distincts et non coplanaires, alors le triplet $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ forme une base pour $\mathcal{V}_3$ et le quadruplet $\left(O;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

d) Coordonnées d'un point dans l'espace $\mathcal{E}$

Soit $(O;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$, et soit un point $M\in\mathcal{E}$.

Soit x, y et z les réels tels que ;

$\overrightarrow{OM}=x.\vec{u}+y.\vec{v}+z.\vec{w}$.

Le triplet (x,y,z) est appelé coordonnées du point M dans le repère $(O;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace $\mathcal{E}$ et on note ; $M(x,y,z)$.

$$\begin{cases}\boldsymbol{x} \textbf{ est appelé abscisse du point } \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{y} \textbf{ est appelé ordonnée du point } \boldsymbol{M}.\\ \boldsymbol{z} \textbf{ est appelé la cote du point } \boldsymbol{M}\end{cases}$$

Remarque

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=\boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{w}}\Leftrightarrow\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

e) Base orthonormée de $\mathcal{V}_3$

Si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathcal{V}_3$ telle que ;

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{u}}\perp\vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\boldsymbol{u}}\perp\vec{\boldsymbol{w}} \textbf{ et } \vec{\boldsymbol{v}}\perp\vec{\boldsymbol{w}}\\ \|\vec{\boldsymbol{u}}\|=\|\vec{\boldsymbol{v}}\|=\|\vec{\boldsymbol{w}}\|=\boldsymbol{1}\end{cases}.$$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est alors appelé **une base orthonormée** de $\mathcal{V}_3$.

f) Repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$

O est un point quelconque de l'espace, et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}_3$,

Alors $(O;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est **un repère orthonormé** de l'espace $\mathcal{E}$.

g) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Soit dans l'espace, une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et passant par le point $M(x_0,y_0,z_0)$.

Pour tout $M\in D$, on a ; $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ tel que $k\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow D: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + k.a} \\ \boldsymbol{y = y_0 + k.b} \\ \boldsymbol{z = z_0 + k.c} \end{cases}$$

Cette écriture est appelée une représentation paramétrique de la droite (D) dans l'espace $\mathcal{E}$.

Exemple 5

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a la droite Δ passant par le point $A(7;\ -4;\ 5)$, et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$,

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution

$$\Delta: \begin{cases} \boldsymbol{x = 7 - 6t} \\ \boldsymbol{y = -4 + 3\alpha} \\ \boldsymbol{z = 5 - 8\alpha} \end{cases}.$$

Exemple 6

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$$(D): \begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases}.$$

Donner une équation cartésienne de cette droite.

Solution

$$\begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ 2z = -6 + 4\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$x + y + 2z = 4 \Rightarrow \boldsymbol{(D): x + y + 2z - 4 = 0}$.

Remarque

Si la droite (Δ) a pour équation cartésienne ;

$ax + by + cz + d = 0$, alors (Δ) a pour vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple 7

Soit (D) la droite d'équation cartésienne ;

$5x + 4y - 3z + 11 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(1, -4, 2)$ et orthogonale à (D).

Solution

On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à (D), est un vecteur directeur de (Δ).

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -4 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = -1 - 5t \\ 2y = -8 + 8t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x + 2y + z = 7 \Rightarrow (\Delta): \boldsymbol{x - 2y - z + 7 = 0}$.

Exemple 8

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(7,4,3)$, $B(-5,2,-6)$, donner l'équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AB]$.

Solution

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Rightarrow AM = BM \Rightarrow AM^2 = BM^2$

$$\Rightarrow (x-7)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = (x+5)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 25 + y^2 + 4 + z^2 + 36$$

$$\Rightarrow -14x - 8y - 6z = 25 + 4 + 36 - 49 - 16 - 9$$

$$\Rightarrow -14x - 8y - 6z = 25 + 4 + 36 - 49 - 16 - 9$$

$$\Rightarrow -14x - 8y - 6z = -9$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{P} : 14x + 8y + 6z + 9 = 0}$$

Exemple 9

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t, \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

Et (Δ) une droite dont l'équation cartésienne est ;

$(\Delta): x + 2y + z - 5 = 0$.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Solution

$H = (D) \cap (\Delta) \Rightarrow H(x_H, y_H, z_H)$ vérifie les équations des deux droites.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = -3 + t \\ z_H = 2 + 5t \end{cases} \boxed{\mathbf{1}} \text{ car } H \in (D) \text{ ;}$$

$x_H + 2y_H + z_H - 5 = 0$ $\boxed{\mathbf{2}}$ car $H \in (\Delta)$

$\boxed{\mathbf{1}}$ et $\boxed{\mathbf{2}}$ $\Rightarrow 1 + 2t + 2(-3 + t) + 5t - 5 = 0$

$\Rightarrow 9t - 8 = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{8}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{25}{9} \\ y_H = -3 + \dfrac{8}{9} = -\dfrac{19}{9} \\ y_H = 2 + \dfrac{40}{9} = \dfrac{58}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{H\left(\frac{25}{9}, \frac{-19}{9}, \frac{58}{9}\right)}}$$

Exercices généraux

Exercice 1

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a la droite Δ passant par le point $A(6,-5,2)$, et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\8\\-1\end{pmatrix}$,

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Exercice 2

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

(D): $\begin{cases}x = 1 + 2\beta\\ y = -3\beta\\ z = 1 + 2\beta\end{cases}$.

Donner une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 3

Soit (D) la droite d'équation cartésienne ;

$3x - 2y + z - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(2,0,-3)$ et orthogonale à (D).

Exercice 4

Dans un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace, on donne les points $A(3,-5,2)$, $B(4,1,7)$, donner l'équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AB]$.

Exercice 5

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

(D): $\begin{cases}x = 1 + 2t\\ y = -3 + t,\\ z = 2 + 5t\end{cases}$

Et (Δ) une droite dont l'équation cartésienne est ;

(Δ): $x + 2y + z - 5 = 0$.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Exercice 6

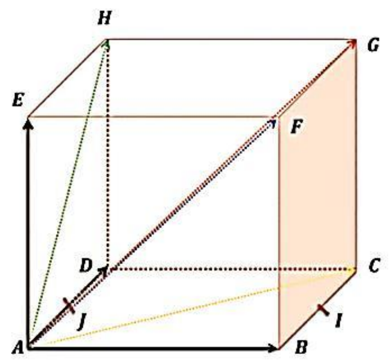
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

On suppose que l'espace est muni du repère orthonormé $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1° Déterminer les coordonnées des vecteurs ; $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, puis en déduire les coordonnées de A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

2° Donner une équation des droites (BG) et (DH).

3° Soit les points ; I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$. (DI) est-elle orthogonale à (CJ) ?



Exercice 7

$ABCD$ désignant un tétraèdre, soit I le milieu de$[BC]$.

Déterminer la droite d'intersection des plans (ABD) et (AIJ) lorsque :

1° J est le point du segment (CD) tel que $CJ = \frac{1}{4}CD$;

2° J est le milieu de $[CD]$.

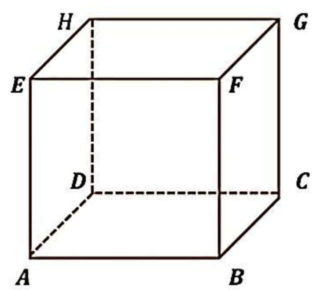
Exercice 8

Soit le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et I le milieu de $[EF]$. Déterminer successivement :

1° L'intersection des plans $(ABEF)$ et $(BCGF)$;

2° L'intersection des droites (AI) et (BF) ;

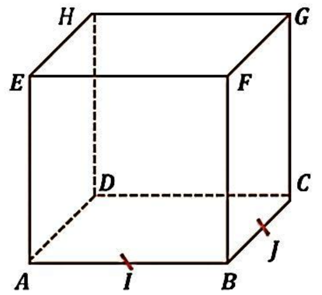
3° L'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$.



Exercice 9

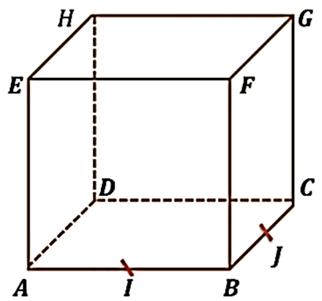
$ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

Prouver que les droites (IJ) et (EG) sont parallèles.



Exercice 10

Dans le cube $ABCDEFGH$, prouver que les plans (ACH) et (EBG) sont parallèle.



Exercice 11

Dans le cube $ABCDEFGH$ précédent, prouver que la droite (AC) est parallèle au plan (EFG).

Exercice 12

L'aire latérale d'une sphère est $16\ m^2$

1° Quel est son rayon ? On donnera la valeur exacte du rayon, puis une valeur approchée à 1cm près.

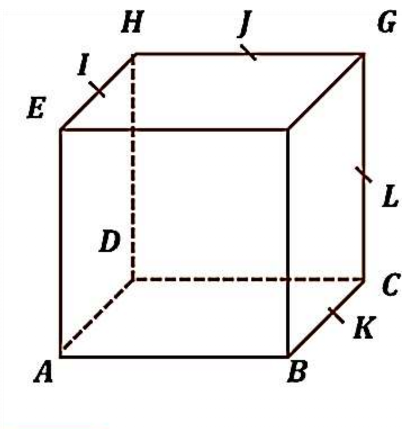
2° Quel est son volume ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 1cm près.

Exercice 13

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[EH]$, J celui de $[GH]$, K celui $[BC]$ et L celui $[CG]$.

1° Les droites (IJ) et (BG) sont-elles sécantes ?

2° Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*



Exercice 14

On considère un tétraèdre $ABCD$, et on désigne par E un point situé à l'intérieur du triangle BCD. Montrer que la droite (BD) et le plan (ACE) sont sécants et préciser leur point d'intersection.

Exercice 15

Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AD]$.

1° Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

2° On désigne par K un point du segment $[AB]$ autre que son milieu. Les droites (KI) et (BC) se coupent en E, les droites (KJ) et (BD) en F.

Montrer que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 16

$ABCDEFGH$ est un cube.

Dessiner la droite d'intersection des plans (ACH) et (EDF).

Exercice 17

Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AB]$ et J celui de (CD).

1° Soit K le point de $[AC]$ défini par $CK = \frac{1}{4}CA$.

Dessiner les droites d'intersection du plan (IJK) successivement avec chacun des plans (ABC), (ACD), (BCD) et (ABD).

2° Refaire la figure en supposant cette fois que K est le milieu de $[AC]$.

Exercice 18

Soit un cube $ABCDEFGH$ et I le milieu de $[GH]$. Construire le point P d'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$ de deux façons différentes :

1° En utilisant le plan (ABI) ;

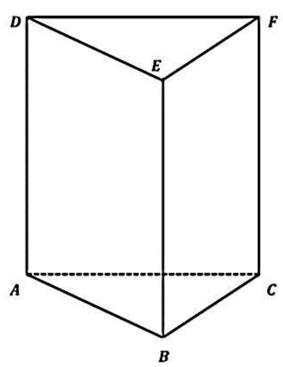
2° En utilisant le plan (AIJ), où J est le milieu $[CD]$.

Exercice 19

Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AD]$ et G le centre de gravité de ABC. En utilisant le plan (AGI), déterminer l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).

Exercice 20

Soit un prisme $ABCDEF$ (voir la figure ci-dessous). Déterminer l'intersection du plan $(ACFD)$ et de la parallèle à (BF) passant le milieu I de $[AB]$.



Exercice 21

$ABCDEFGH$ est un cube. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les droites (AF) et (BG) sont parallèles.

2° Les droites (AF) et (BG) sont sécantes.

3° La droite (AF) et le plan (DCG) sont parallèles.

4° Les droites (AF) et (CH) sont sécantes.

5° Les droites (BG) et (AH) sont parallèles.

6° L'angles $\widehat{AFC}$ mesure $\frac{\pi}{2}\ rad$.

Exercice 22

Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$.

1° Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

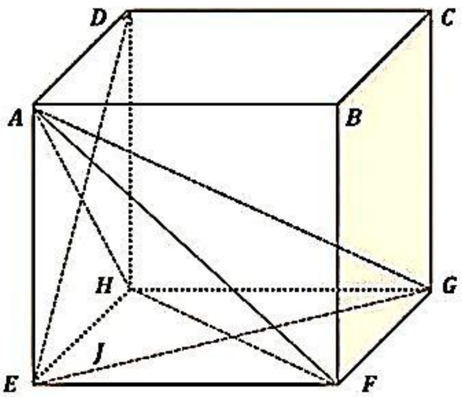
2° Montrer de même que $LMJN$ est un parallélogramme.

3° Déduire des questions précédentes que les trois droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Exercice 23

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.

L'exercice consiste à reconnaître la nature des triangles cités dans la première colonne du tableau suivant. Pour chaque triangle, on propose 3 réponses. Pour chacune d'elles, l'élève doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. On justifiera les réponses.



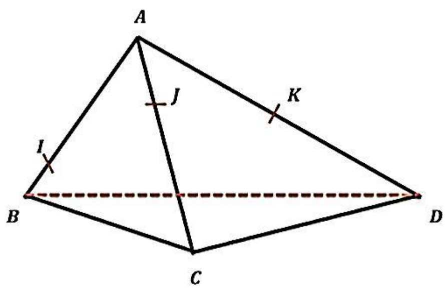
AEG	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*
AHF	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*
AFG	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*

Exercice 24

On considère le tétraèdre $ABCD$ est les points I, J et K situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

1°/ Dessiner l'intersection M de la droite (IJ) avec le plan (BCD).

2°/ Dessiner l'intersection N de la droite (JK) avec le plan (BCD) et en déduire l'intersection des plans (IJK) et (BCD).



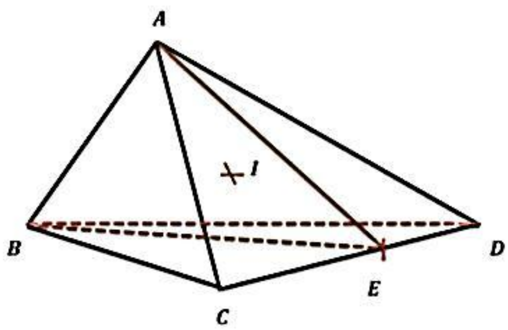
Exercice 25

On considère le tétraèdre $ABCD$, E un point du segment $[CD]$ et le point I du plan (ABE) comme sur la figure ci-après.

1°/ Déterminer l'intersection de la droite (AI) avec le plan (BCD).

2°/ Déterminer l'intersection des plans (ADI) et (BCD), puis des plans (ADI) et (ABC).

3°/ Déduire de ce qui précède l'intersection de la droite (DI) avec le plan (ABC).



Exercice 26

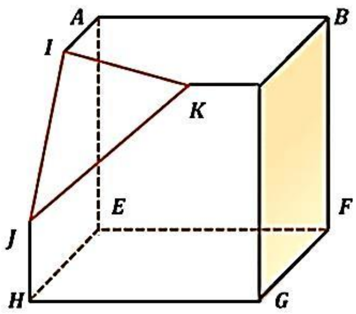
Soit le cube $ABCDEFGH$ dont on a coupé le coin contenant le point D, suivant la coupe triangulaire (IJK) comme l'indique la figure données ci-après.

1°/ Les arêtes du cube ont pour longueur $6cm$, de plus $AI = 2cm$, $CK = 1cm$ et $HJ = 2cm$.

Quel est le volume du cube tronqué ?

2°/ Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par le point C et parallèle au plan (IJK).

3°/ Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par A et parallèle au plan (IJK).



Exercice 27

On considère le parallélépipède rectangle (ou pavé droit) $ABCDEFGH$ tel que :

$AB = 8$; $BC = 4$; $AE = 4$

Le point I le milieu du segment $[AB]$ et le point O est le centre du rectangle $EFGH$. *(voir figure ci-après.)*

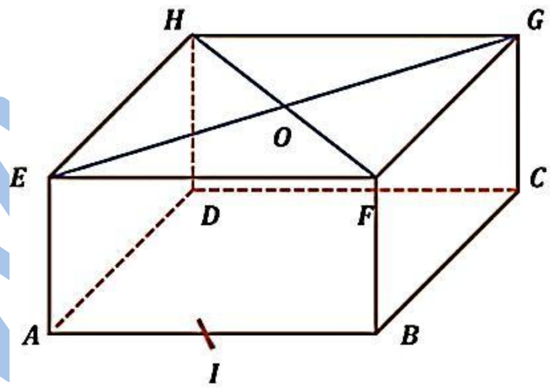
1°/ Quelle est la nature du quadrilatère $HGBA$?

Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en K, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AKB}$?

(on en donnera la valeur approchée au degré près par défaut.)

2°/ Calculer les longueurs OA, OC, AC. En déduire la nature du triangle AOC et déterminer la mesure approchée au dixième de degré près par défaut de chacun de ces angles.

3°/ Montrer de l'angle $\widehat{DIC}$ est droit. En déduire que le triangle HIC est rectangle.



Exercice 28

On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier, *(c-à-d dont toutes les arêtes ont la même longueur)*.

On appelle I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

1°/ a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale *(ou perpendiculaire)* au plan (DCJ). Que peut-on en déduire pour les droite (AB) et (DC) ?

b) Montrer que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

c) Montrer que la droite (IK) est orthogonale aux droites (BC) et (AD).

2°/ On pose a la longueur de chaque arête du tétraèdre, calculer les longueurs CG et DG en fonction de a.

3°/ Calculer le volume du tétraèdre en fonction de a. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel a pour que le volume soit égal à $\frac{9\sqrt{2}}{4}$?

Exercice 29

La pyramide $SABCD$ de sommet S a une base horizontale carrée $ABCD$ de côté 7. On appelle H la projection orthogonale de S sur le plan $ABCD$, M et N sont les projections orthogonales respectives du point H sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$.

On donne les longueurs $HM = 3$, $HN = 2$ et $SH = 8$, *(la figure ci-dessous.)*

1°/ Calculer les longueurs SA, SB, SC et SD.

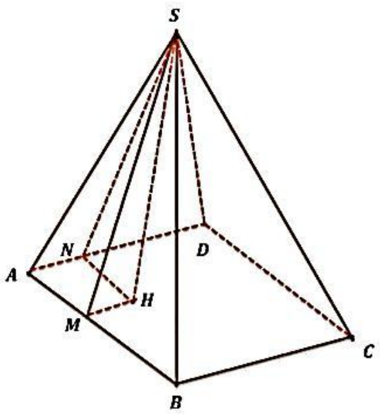
2°/ Calculer la base puis le volume de cette pyramide.

3°/ Soit E un point du segment $[AN]$, différent de A et de N tel que $AE = x$.

Dans le plan $ABCD$, on appelle O le point d'intersection des droites (AB) et (EH) et celui des droites (BC) et (EH).

En utilisant une configuration de Thalès, calculer les longueurs OA et BF en fonction de x. En déduire l'aire du trapèze $EABF$.

4°/ Déduire des résultats de la question précédente, la valeur de x pour laquelle le plan (SHE) partage la pyramide en deux parties de même volume.



Perspective

Exercice 30

Représenter sur une feuille non quadrillée un cube d'arête 7 cm en perspective cavalière avec

$\alpha = 45°$ et $k = \frac{1}{2}$.

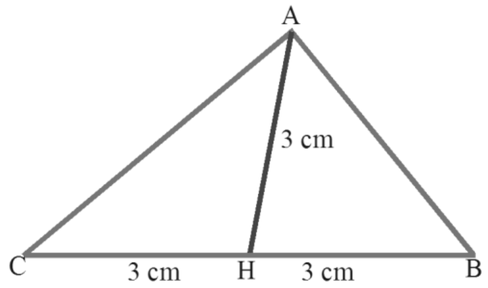
Exercice 31

Représenter sur une feuille quadrillée $(0{,}5 \times 0{,}5)$ une pyramide régulière à base carrée de côté 6 cm et de hauteur 10 cm en perspective cavalière cavalière avec$\alpha = 45°$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 32

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
1) La figure ci-contre
est la représentation

en perspective cavalière de ce triangle lorsqu'il est situé dans un plan horizontal, le côté [BC] étant vu de face.



Préciser le code de cette perspective cavalière.

2) Représenter ce triangle en perspective cavalière avec le code (α = 45° et k = $\frac{1}{3}$).

Lorsque la hauteur [AH] est verticale et vue de face, le support du côté [BC] est perpendiculaire au plan vertical de face.

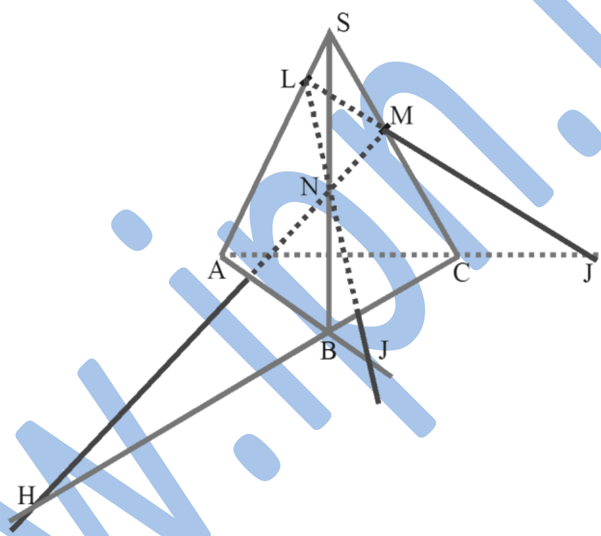
Démonstration et propriétés

Exercice 33

SABC est un tétraèdre, L est un point de [SA] ; M un point de [SC] et N un point de [SB].

- Les droites (MN) et (BC) se coupent en H ;
- Les droites (NL) et (AB) se coupent en I ;
- Les droites (LM) et (AC) se coupent en J ;

Montrer que H, I et J sont alignés.



Exercice 34

SABCD est une pyramide de sommet S de base parallélogramme ABCD ; O est le centre de cette base, soit J le milieu de l'arête [SA].

1) Démontrer que les droites (CJ) et (SO) sont sécantes ; On désignera par k le point d'intersection.

2) Démontrer que les triangles SAC et SDB ont même centre de gravité.

Exercice 35

Soit un prisme droit ABCDEF à bases triangulaires ABC et DEF. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [DF].

Déterminer la nature du quadrilatère IBEJ.

Soit O le point d'intersection des segments [IE] et [JB] les droites (AO) et (FC) sont-elles sécantes ?

Positions relatives et parallélismes

Exercice 36

On considère une pyramide de sommet S dont la base est un quadrilatère ABCD. Représenter la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) lorsque :

a) (AB) et (CD) sont sécantes en I ;

b) (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 37

Soit un tétraèdre ABCD et E le milieu de son arête [BC].

1 Soit F le point du segment [CD] tel que DF = $\frac{1}{3}$DC.

a) montrer que (EF) coupe le plan (ABD) et placer leur point d'intersection.

b) représenter la droite d'intersection des plans (AEF) et (ABD).

2) Soit G le milieu de [CD].

a) Refaire une figure.

b) Montrer que la droite (EG) est parallèle au plan (ABD).

c) Représenter la droite Δ d'intersection des plans (AEG) et (ABD).

Exercice 38

ABCDEFGH est un cube, représenter la droite d'intersection des plans (ACH) et (BDF).

Exercice 39

ABCDEFGH est un cube, soient I et J les centres respectifs des carrés EFGH et ABFE.

Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan ADHE.

2) a) Montrer que les plans (IJE) et (ADHE) sont sécantes selon une droite Δ parallèle à (IJ).

b) Représenter cette droite Δ dans le plan ADHE en précisant son intersection P avec (AD) puis représenter Δ dans l'espace.

Exercice 40

On considère un tétraèdre ABCD, On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [AC] et [BD].

1) Montrer que IJKL est un parallélogramme.

2) Montrer que IMKN est un parallélogramme.

3) a) Déduire des questions précédentes que les droites qui joignent les milieux des deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

Ces droites sont-elles coplanaires.

Exercice 41

ABCDEFGH est un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes [EA], [EF] et [EH].

Montrer que les plans (IJK) et (AFH) sont parallèles.

Orthogonalité

Exercice 42

Sur la figure de l'exercice précédent nommer :

a) Toutes les arêtes orthogonales à (HB) ;

b) Toutes les arêtes orthogonales au plan (ABCD) ;

Exercice 43

Le triangle ABC est rectangle en A, Soit S un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC).

1) Montrer que les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.

2) Montrer que : $SA^2 + BC^2 = SB^2 + AB^2$

Exercice 44

Soit C un cercle et [AB] un diamètre de C .

Soit M un point de C distinct de A et de B. Soit P un point distinct de A situé sur la perpendiculaire en A au plan de C .

1) Montrer que les droites (AP) et (BM) sont orthogonales.

2) En déduire que le triangle PMB est rectangle en M.

Exercice 45

a) ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 46

b) ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BG) sont perpendiculaires.

1) Préciser le plan médiateur du segment [AE] et représenter la section du cube par ce plan.

2) Préciser le plan médiateur du segment [AF] et représenter la section du cube par ce plan.

Exercice 47

ABCDEFGH est un cube.

On désigne par a l'arête du cube. O le centre du cube et I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] , [CD], [DA], [AC] et [BD].

Soit P le plan médiateur de la diagonale [CE] du cube.

Montrer que $O \in$ P.

2) a) calculer JB en fonction de a et en déduire JC.

b) Calculer de même JE en fonction de a.

Montrer que $J \in$ P.

3) Montrer que $K \in$ P. On montre de façon analogue et on considère donc comme démontré que L, M et N appartiennent à P.

4) Représenter la section du cube par le plan P.

Exercice 48

c) ABCDEFGH est un cube.
1) a) Montrer que E et C sont équidistants de A et F.

b) En déduire que (EC) et (AF) sont orthogonales.

2) Montrer de même que (EC) et (AH) sont orthogonales.

3) Déduire des questions précédentes que (EC) est orthogonale à (AFH).

4) a) Calculer le volume du tétraèdre EAFH

(utiliser la base AEF).

b) Calculer l'aire de AFH, puis en utilisant la réponse de la question 4) a) la distance de E au plan (AFH).

c) placer alors, le point d'intersection P de (EC) et de (AFH).

Exercice 49

a) On considère un tétraèdre OABC tel que :
OA = OB = OC = a (a> 0) et que les trois faces OAB, OAC et OBC soient rectangles en O.

Soit M un point du segment [OA], on pose

AM = x. Le plan P passant par M et parallèle aux droites (AB) et (OC) coupe respectivement les droites (AC), (CB) et (OB) en N, P et Q.

1) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un rectangle.

2) Calculer en fonction de x l'aire A (x) de ce rectangle.

XVI- STATISTIQUES

Faire savoir

Le cours

1. Le langage statistique

Définitions

a) Population

La population est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique. Ses éléments sont également appelés des individus. Un sous ensemble de la population s'appelle un échantillon.

b) Caractère

Une propriété retenue, ou un critère sur lequel porte l'étude pour analyser une population est appelé caractère.

S'il prend des valeurs chiffrées, on dit que le caractère est numérique ou quantitatif (*par exemple, la taille des élèves d'une classe…*).

Si non, on dit que le caractère est qualitatif (*par exemple, les loisirs d'une personne, ou le métier d'une personne…*).

Notre étude portera ici exclusivement sur les caractères quantitatifs

c) Classe

Quand on répartit la population étudiée en un nombre fini de classes, pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.

Les données doivent être suffisamment précises pour que tout individu appartienne à une classe et une seule.

d) Effectif, fréquence, pourcentage

Définitions

L'effectif n d'une classe est le nombre d'individus chez lesquels on observe cette valeur du caractère.

La fréquence f d'une classe est le quotient de l'effectif n relatif à cette valeur par l'effectif total N de la population étudiée ; $f = \frac{n}{N}$.

1°/ La distribution des fréquences est la liste des fréquences des valeurs du caractère.

2°/ Le pourcentage p d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f par 100 ;

$$p = 100 \times f = 100 \times \frac{n}{N}$$

Remarque

Toute fréquence est comprise entre 0 et 1, tout pourcentage est compris entre 0 et 100.

Comme la somme des effectifs de toutes les classes vaut N, la somme de leurs fréquences vaut 1 et la somme de leurs pourcentage vaut 100.

e) Effectifs cumulées, fréquences cumulées

Définitions

On considère un caractère numérique.

1°/ L'effectif cumulé correspondant à un nombre x est le nombre d'individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à x (*effectif cumulé croissant*), ou supérieure ou égale à x (*effectif cumulé décroissant*).

2°/ La fréquence cumulée correspondant à un réel x s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total N.

2. Séries statistiques à une variable

a) Les critères de la tendance centrale

a- Série statistique

Définition

On considère un caractère numérique appliqué à une population étudiée.

L'ensemble des données ainsi obtenues forme une série statistique à une variable.

Plus généralement, on appelle série statistique, tout ensemble de couples $(x_i;\ n_i)$.

où x_i est la valeur ou le caractère et où n_i est l'effectif avec $1 \leq i \leq n$

Si à chaque classe est associée une seule valeur du caractère ($x_i \in \mathbb{N}$), on dit que le caractère est discret.

Si à chaque classe est associé un intervalle de valeurs ($x_i \in \mathbb{D}$), on dit que le caractère est continu.

Si x_i n'est pas numérique, on dit que la série est qualitative.

Exemple 1

On a relevé le nombre de frères et de sœurs d'un groupe de 50 élèves.

On a obtenu les résultats suivants :

$Nbre\ frères\ et\ soeurs$	0	1	2	3	4
$Effectifs$	13	19	15	2	1

La population étudiée est le groupe de 50 élèves.

Le caractère étudié est le nombre de frères et sœurs ; c'est un caractère numérique discret.

Exemple 2

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats obtenus exprimés en kg, sont donnés par le tableau suivant :

$Pds\ (kg)$	$]40;45]$	$]45;50]$	$]50;55]$	$]55;60]$	$]60;65]$	$]65;70]$
$Effectif$	6	10	12	19	9	4

La population étudiée est le groupe de 60 personnes.

Le caractère étudié est le poids ; c'est un caractère numérique continu.

b) Caractéristiques de position ou critères de la tendance centrale

a- Etendue

L'étendue d'une série statistique à une variable est la différence entre les valeurs extrêmes observée du caractère.

Exemple 3

Dans l'exemple 1, l'étendue est ; $4-0=4$

Dans l'exemple 2, l'étendue est ; $70-40=30$

b- Mode ou classe modale

Si le caractère est discret, le mode est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs modes*).

Exemple 4

Dans l'exemple précédent, le mode est 1 car il correspond à l'effectif maximum 20.

Si le caractère est continu, la classe modale est l'intervalle de valeurs du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs classes modales*).

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, la classe modale est l'intervalle $]55;60]$ car il correspond à l'effectif maximum 19.

c- Médiane

La médiane M d'une série statistique partage cette série en deux parties de telle sorte que :
♦ Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égale à la médiane ;
♦ Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égale à la médiane.

Exemple 6

La médiane de la série : 2 ; 3 ; 5 ; $\mathbf{10}$; 12 ; 19 ; 20 est $\mathbf{10}$.
La médiane de la série : 2 ; 3 ; $\mathbf{5}$; $\mathbf{10}$; 12 ; 19 est $\frac{5+10}{2}=7{,}5$

Calcul de la médiane

Si la série contient n valeurs rangées dans l'ordre croissant :

♦ Si n est impair ; la médiane est la $\frac{n+1}{2}$ $ième$ valeur de la série.

♦ Si n est pair ; la médiane est la demi somme des $\frac{n}{2}$ $ième$ et $\frac{n+1}{2}$ $ième$ valeurs de la série.

Exemple 7

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	9

$n = 3+5+4+9 = 21$ impair.

$\frac{21+1}{2} = 11$

La médiane est la 11e valeur donc : 3.

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	12

$n = 3+5+4+12 = 24$ pair.

$\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \frac{n}{2} + 1 = 13$

$Me = \frac{12^e \text{ valeur} + 13^e \text{ valeur}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$

Plus généralement, si le caractère est discret, une médiane est un réel M séparant la population étudiée en deux groupes de même effectif.

Notons G_1 le groupes des individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à M.

Notons G_2 le groupes des individus ayant une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Dire que M est une médiane, signifie que G_1 et G_2 ont même effectif.

On peut remarquer que pour un caractère discret, la médiane n'est pas toujours précisément définie. C'est le cas de l'exemple 1.

Si l'on prend $M = 1$, alors les groupes G_1 et G_2 tels que définis ci-dessus ont respectivement pour effectifs ; $G_1 = 20 + 14 = 34$ et $G_2 = 20 + 12 + 3 + 1 = 36$. Ces valeurs sont différentes.

Si le caractère est continu, la médiane est le réel M pour lequel l'effectif cumulé est égal à la moitié de l'effectif total.

La médiane correspond donc à une fréquence de 0,5 (*ou pourcentage cumulé de de* 50%).

d- Moyenne arithmétique

Définition

La moyenne arithmétique est la somme de toutes les valeurs divisée par le nombre de valeurs.

On considère un caractère numérique x_i. On peut présenter les données sous la forme ;

$Valeur\ du\ caractère\ ou\ centre\ de\ l'intervalle$	x_1	x_2	x_3	…	x_p
$Effectifs$	n_1	n_2	n_3	…	n_p

Soit l'effectif total ;

$$\boldsymbol{N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

La moyenne arithmétique de la série est le réel noté ;

$$\boldsymbol{\overline{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \cdots + n_p x_p}{N}}$$

Notons les fréquences correspondantes ;

$$f_1;\ f_2;\ f_3;\ \ldots;\ f_p.$$

On a ;

$$f_1 = \frac{n_1}{N};\ f_2 = \frac{n_2}{N};\ f_3 = \frac{n_3}{N};\ \ldots;\ f_p = \frac{n_p}{N}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \overline{X} = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_p}$$

e- Linéarité de la moyenne arithmétique

Propriété

Lorsque, pour chaque individu, on additionne les valeurs observées pour deux caractères, la moyenne des valeurs ainsi obtenues est égale à la somme des moyennes des valeurs observées pour chacun des deux caractères.

Lorsque l'on multiplie toutes les valeurs observées pour un caractère par un même nombre réel k, la moyenne des valeurs ainsi obtenues est égale au produit de la moyenne des valeurs observées par le nombre k.

Exercice

Démontrer cette propriété.

Exemple 8

On a lancé un dé 100 fois, et on a obtenu les résultats suivants :

$4; 6; 1; 2; 5; 2; 1; 2; 3; 5; 4; 3; 1; 6; 6; 4; 2; 2; 3; 3;$

$1; 4; 6; 4; 2; 6; 4; 3; 6; 4; 6; 3; 3; 4; 4; 6; 2; 3; 1; 2;$

$5; 6; 5; 5; 3; 3; 5; 4; 1; 3; 1; 3; 2; 4; 5; 6; 4; 4; 6; 1;$

$3; 6; 2; 6; 5; 6; 3; 4; 6; 3; 4; 5; 3; 1; 5; 1; 3; 5; 2; 3;$

$6; 1; 5; 3; 4; 2; 2; 4; 1; 5; 1; 4; 6; 1; 2; 3; 2; 1; 3; 3.$

1° Ordonner les données ;

2° Préciser la population et la variable étudiée ;

3° Quelles sont les modalités ?

4° Déterminer l'effectif et la fréquence de chaque modalité ;

5° Le dé est-il équilibré ?

6° Représenter ces données dans un diagramme en bâtonnets

Solution

Pour ranger les résultats de lancers par ordre de façon méthodique et sûre, on peut cocher tous les « 1 », puis tous les « 2 », etc.

On vérifie bien que tous les nombres ont été cochés et que l'on a cent valeurs. On obtient donc ;

$1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2;$

$2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;$

$3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4;$

$4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5;$

$5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6.$

2° La population étudiée est l'ensemble des 100 lancers du dé. La variable est le nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé.

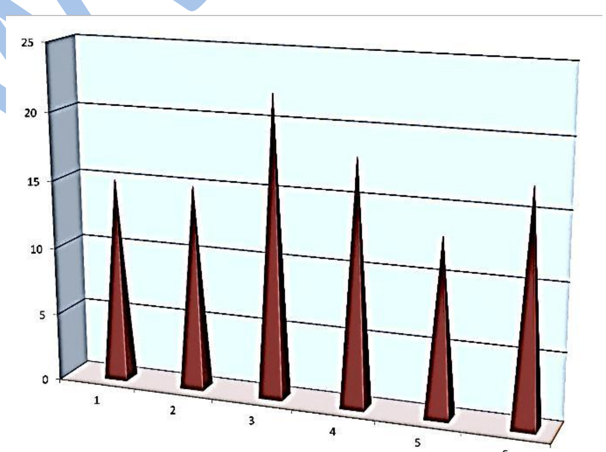
3° Les modalités sont $1; 2; 3; 4; 5; 6$.

4°

$Modalités$	1	2	3	4	5	6
$Effectifs$	15	15	22	18	13	17
$Fréquences$	0,15	0,15	0,22	0,18	0,13	0,17

5° Les fréquences d'apparition des différentes faces sont sensiblement différentes.

Le dé n'est pas équilibré ; On a par exemple beaucoup plus de 3 que de 5.



Exemple 9

Le tableau suivant donne les notes (*sur* 10) obtenues par les élèves d'une classe lors d'un test.

$Notes$	3	4	5	6	7	8	9
$Effectifs$	1	4	8	9	7	5	2

1° Construire un tableau contenant les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées ;

2° Déterminer ; **a/** Le nombre d'élèves ayant une note strictement inférieure à 5 ; **b/** Le nombre d'élèves ayant une note supérieure à 7 ; **c /** Le pourcentage des élèves qui peuvent dire « j'ai la moyenne » (*c'est-à-dire une note supérieure à* 6).

Pensez-vous que le terme "moyenne" soit adapté à ce sujet ?

Solution

Voici le tableau demandé

$Notes$	3	4	5	6	7	8	9
$Effectifs$	1	4	8	9	7	5	2
$Effectifs$ $cumulés$	1	5	13	22	29	34	36
$Fréquences$	0,028	0,111	0,222	0,25	0,194	0,139	0,056
$Fréquences$ $cumulées$	0,028	0,139	0,361	0,611	0,806	0,944	1

Pour calculer les fréquences cumulées, il faut diviser les effectifs cumulés par l'effectif total et éviter de cumuler les fréquences de façons à limiter les erreurs d'arrondi.

2° a/ D'après le tableau, on lit 5 élèves ont une note strictement supérieure à 5.

b/ 14 élèves ont une note supérieures à 7.

c/ A partir du tableau, on peut confirmer que $13{,}9\%$ des élèves ont une note inférieure ou égale à 4. Donc $86{,}1\%$ des élèves peuvent affirmer « j'ai la moyenne » ($86{,}1 = 100 - 13{,}9$).

Le mot moyenne est pris ici au sens scolaire du terme, (la moitié de la note maximale) et non le sens statistique.

Exemple 10

Dans une classe de 25 élèves, les notes obtenues lors d'un devoir sont les suivantes ;

$$14; 15; 4; 7; 11; 14; 9; 10; 12; 12; 16; 10; 18;$$

$$13; 12; 3; 11; 14; 12; 13; 13; 6; 12; 10; 7.$$

1° Déterminer l'étendue et le mode de cette série ;

2° Calculer la moyenne arithmétique ;

3° Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10.

Solution

1° On commence par trier les résultats, c'est-à-dire que l'on compte les effectifs correspondant à chaque note. A l'issue de ce regroupement, la série des notes peut se présenter de la façon suivante :

$Notes$	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
$Effectifs$	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

L'étendue de la série est : $18 - 3 = 15$.

Son mode vaut 12, car, c'est la note obtenue le plus de fois.

2° La moyenne arithmétique c'est ;

$$\bar{X} = \frac{1}{25}(1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 6 + \cdots + 18 \times 1)$$

$$\bar{X} = \frac{275}{25} = 11$$

2° Le nombre d'élèves ayant une note supérieure ou égale à la moyenne :

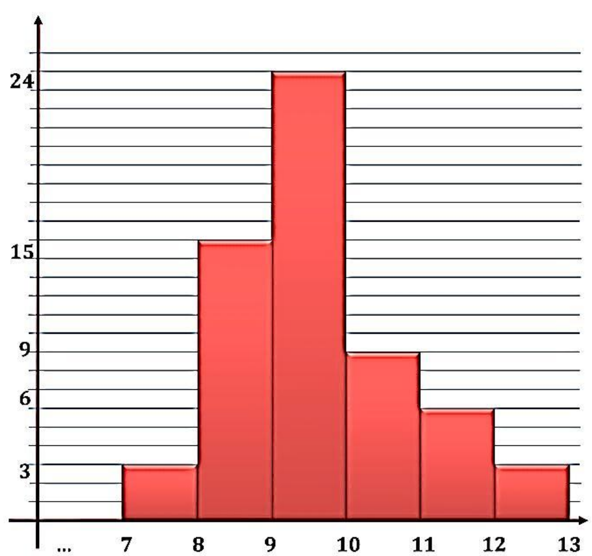
$$4 + 2 + 5 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 = 19$$

Le pourcentage correspondant :

$$\frac{19}{25} \times 100 = 76\%$$

Exemple 11

On a mesuré 60 épis de blé au centimètre près. Les résultats obtenus sont donnés par l'histogramme de la figure ci-dessous :



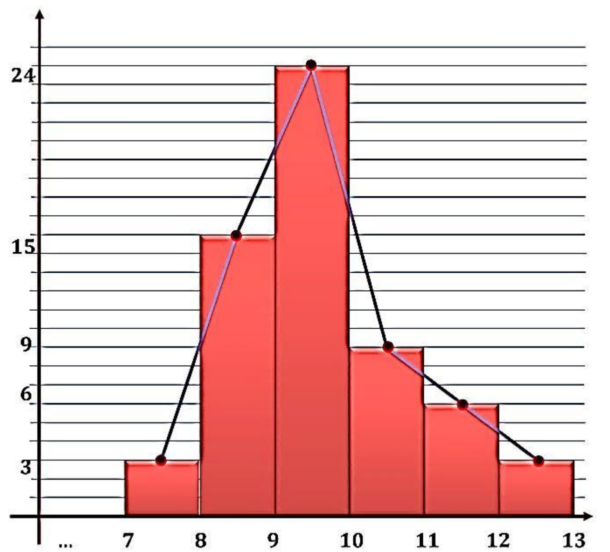
1° Déterminer l'étendue et la classe modale de cette série ;

2° Calculer sa moyenne arithmétique ;

3° Dans un lot de 140 épis, la moyenne de longueur est d'environ $8{,}9cm$.

Quelle est la moyenne des longueurs de l'ensemble des 200 épis ?

Solution



1° D'après la figure illustrant les données, la longueur maximale d'un épi est $13cm$, et la longueur minimale est de $7cm$.

L'étendue est donc ; $13 - 7 = 6cm$.

La classe modale est l'intervalle $[9; 10]$, car c'est dans cette classe qu'il y a le plus d'épis de blé ; 24.

2° Considérons le tableau suivant :

$Centre\ de\ l'intervalle$	$7{,}5$	$8{,}5$	$9{,}5$	$10{,}5$	$11{,}5$	$12{,}5$
$Effectifs$	3	15	24	9	6	3

L'effectif total est 60 $épis$

La moyenne arithmétique de la série vaut :

$$\bar{X} = \frac{1}{60}(3 \times 7{,}5 + 15 \times 8{,}5 + 24 \times 9{,}5 + 9 \times 10{,}5 + 6 \times 11{,}5 + 3 \times 12{,}5) = \frac{579}{60}$$

$$\Longrightarrow \bar{X} = 9{,}65cm$$

3° D'après **1°**, la somme des longueurs du premier lot vaut $579cm$. Dans le deuxième lot, la somme S des longueurs des 140 $épis$ vérifie ;

$$\frac{S}{140} = 8{,}9cm$$

Puisque la moyenne du deuxième lot est d'environ $8{,}9cm$, donc, $S = 140 \times 8{,}9 = 1\,246cm$.

On en déduit que la somme de toutes les longueurs des 200 $épis$ est environ égale à ;

$$1\,246 + 579 = 1\,825cm$$

La moyenne de l'ensemble des 200 $épis$ est ;

$$\frac{1\,825}{200} = 9{,}1cm$$

c) Caractéristiques ou critères de dispersion

a- Variance

Soit une série statistique ; $(x_i;\ n_i)_{1\leq n\leq p}$ de moyenne $\bar{X}$. La variance est le nombre réel V défini par ;

$$\boldsymbol{V = \frac{n_1(x_1 - \bar{X})^2 + n_2(x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + n_p\left(x_p - \bar{X}\right)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}}$$

b- Ecart type

L'écart type est le nombre réel positif σ défini par ;

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V}}}$$

3. Représentation graphique

Il existe de nombreuses façons de représenter graphiquement les données statistiques.

a) Diagramme en bâtonnets

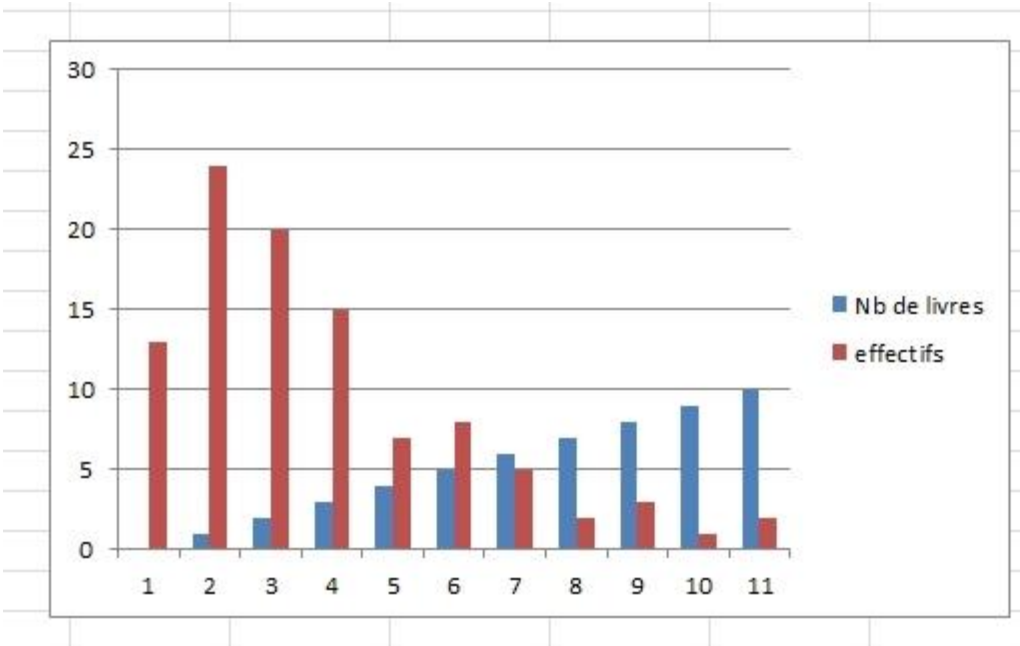
Dans un repère orthogonal, on dessine un segment parallèle à l'axe des ordonnées pour figurer chaque modalité. La hauteur de ce segment est proportionnelle à l'effectif de la modalité.

Exemple 12

La série suivante donne le nombre de livres lus par an sur une population de 100 personnes, représenter par un diagramme en bâtonnets les données de cette série :

Nb de livres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
effectifs	13	24	20	15	7	8	5	2	3	1	2

Solution



Remarque

On joint parfois les sommets de deux bâtons consécutifs par un segment de droite.

On obtient ainsi le polygone des effectifs.

b) Histogramme

Dans le cas où les valeurs de la variable sont regroupées en classes, on utilise un histogramme où chaque classe est représentée par un rectangle dont un côté est la classe sur l'axe des abscisses, et dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.

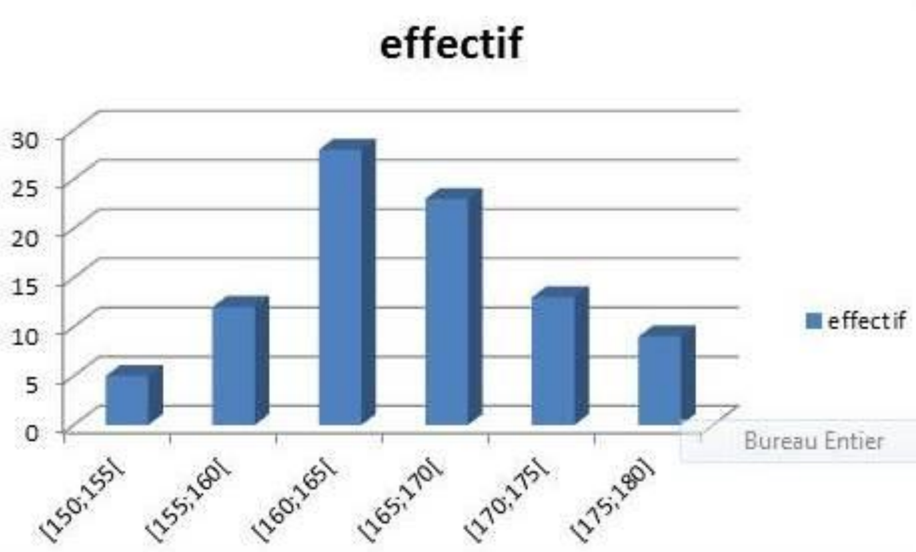
Si toutes les classes ont la même amplitude (*largeur*), les hauteurs des rectangles sont alors proportionnelles aux effectifs des classes.

Exemple 13

Représenter par un histogramme la répartition d'un groupe d'élèves suivant la taille :

Taille (*en cm*)	$[150; 155[$	$[155; 160[$	$[160; 165[$	$[165; 170[$	$[170; 175[$	$[175; 180]$
effectif	5	12	28	23	13	9

Solution



c) Diagramme polaire (*ou radar*)

Il est utilisé souvent pour des données chronologiques, ce diagramme utilise un axe tournant autour d'un point.

Les différentes positions de l'axe correspondent aux modalités.

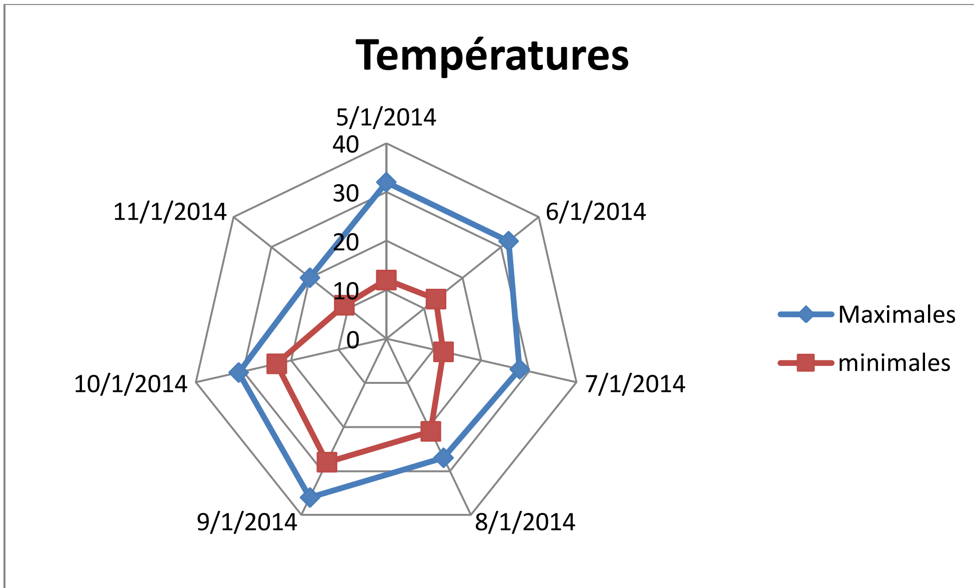
Chaque modalité est représentée par un point dont l'écart au centre du graphique est proportionnel à l'effectif de cette modalité.

Exemple 14

Le tableau suivant représente les températures maximales et minimales enregistrées en degré Celsius dans une ville mauritanienne sur la semaine du 1 au 7 janvier 2014.

Représenter les données de cette suite statistique par un diagramme polaire :

	T. Maximales	**T. minimales**
5/1/2014	32	12
6/1/2014	32	13
7/1/2014	28	12
8/1/2014	27	21
9/1/2014	36	28
10/1/2014	31	23
11/1/2014	20	11



d) Diagramme circulaire

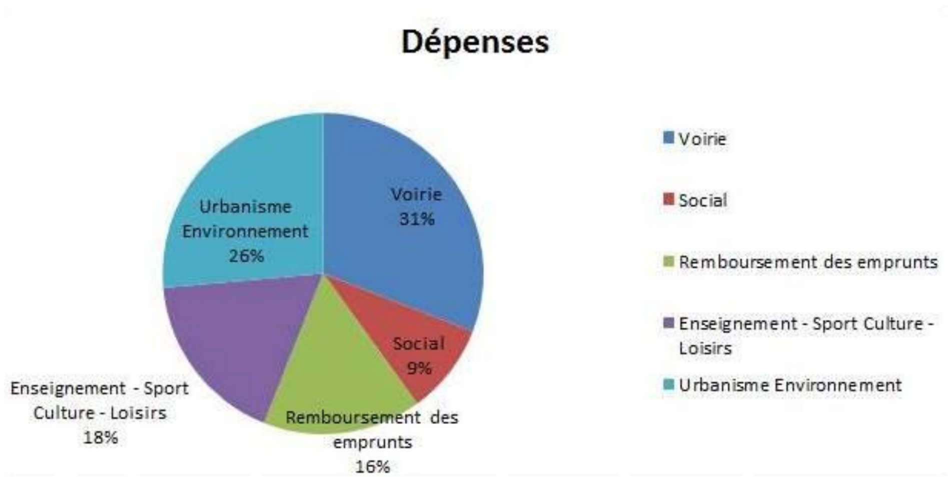
Il s'agit d'un disque partagé en secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs des modalités qu'ils représentent.

Exemple 15

Voici les dépenses d'investissement d'une commune en Ouguiyas, représenter par un diagramme circulaire ces données :

Poste	Voirie	Social	Remboursement des emprunts	Enseignement – Sport Culture – Loisirs	Urbanisme Environnement
Dépenses	9 592 836	2 838 411	4 962 561	5 456 333	8 204 686

Solution



Exemple 16

Voici le relevé des températures extérieures maximales et minimales exprimées en degrés Celsius ($°C$) enregistrées dans des zones étrangères, au mois de janvier 1992.

$Mini$	0	0	1	-2	-2	2	4	4	5	5	3	1	0	3	4	5
$Maxi$	1	2	3	2	3	5	7	6	8	8	6	3	3	5	7	9

$Mini$	8	0	-1	0	3	3	3	3	6	4	5	6	3	3	7
$Maxi$	9	10	8	5	7	10	8	9	10	12	6	9	10	10	10

1° Calculer la moyenne et l'écart type des températures minimales.

2° Même question avec les températures maximales.

3° Avec les températures minimales, regrouper les données en classes d'amplitude $2°C$; $([-2;0[,[0;2[,\ldots)$

a/ Construire l'histogramme représentatif des résultats obtenus.

b/ Même question avec les températures maximales.

Solution

Moyenne des températures minimales

$Mini$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Effectifs$	2	1	5	2	1	8	4	4	2	1	1

$$\bar{X}=\frac{1}{31}(2\times -2+1\times -1+5\times 0+2\times 1+1\times 2+8\times 3+4\times 4+4\times 5+2\times 6+1\times 7+1\times 8)$$

$$= \frac{1}{31}(-4-1+2+2+24+16+20+12+7+8) = \frac{1}{31}\times 86 = \frac{86}{31} \Longrightarrow \boxed{\bar{X} \approx 2.7742}$$

La variance

$$V = \frac{2\left(-2-\frac{86}{31}\right)^2 + 1\left(-1-\frac{86}{31}\right)^2 + 5\left(0-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(8-\frac{86}{31}\right)^2}{2+1+5+2+1+8+4+4+2+1+1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$

$$\boldsymbol{V \approx 6.3683}$$

L'écart type

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{6.3683} \approx 2.5235}$$

Moyenne des températures maximales

$Maxi$	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12
$Effectifs$	1	2	4	3	3	3	4	4	6	1

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(1\times 1 + 2\times 2 + 4\times 3 + 3\times 5 + 3\times 6 + 3\times 7 + 4\times 8 + 4\times 9 + 6\times 10 + 1\times 12)$$

$$= \frac{1}{31}(1+4+12+15+18+21+32+36+60+12) = \frac{1}{31}\times 197 = \frac{197}{31}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{X} \approx 6.3548}$$

La variance

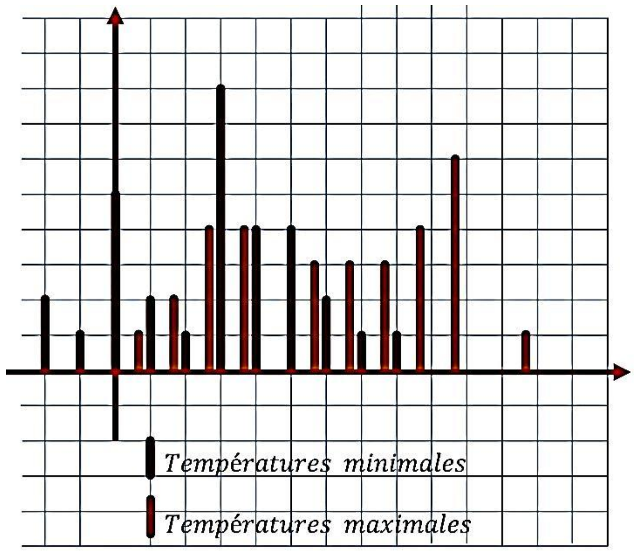
$$V = \frac{1\left(1-\frac{197}{31}\right)^2 + 2\left(2-\frac{197}{31}\right)^2 + 4\left(3-\frac{197}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(12-\frac{197}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1}$$

$$= \frac{1\left(-\frac{166}{31}\right)^2 + 2\left(-\frac{135}{31}\right)^2 + 4\left(-\frac{104}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{175}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1}$$

$$\boldsymbol{V \approx 5.5477}$$

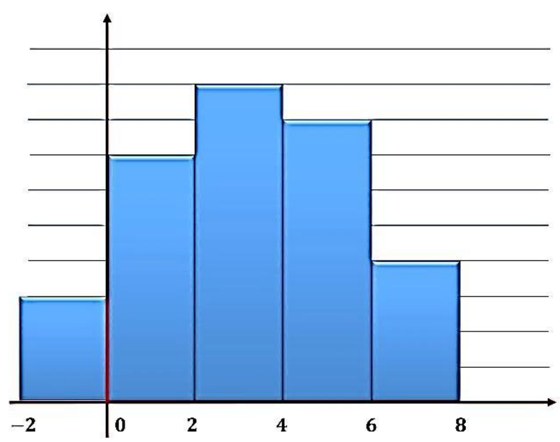
L'écart type

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{5.5477} \approx 2.3553}$$



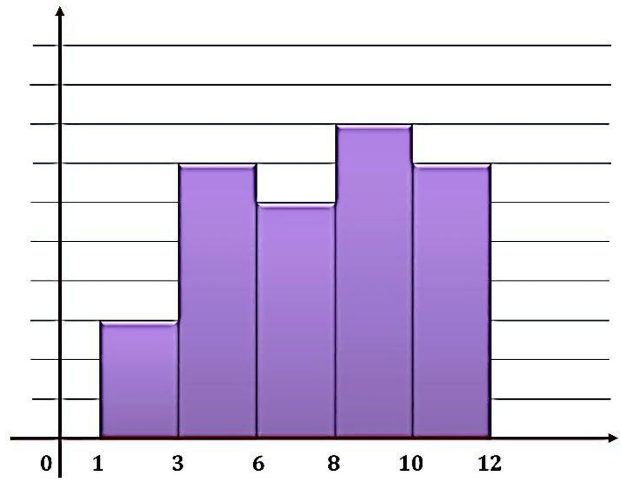
3° a/

$Intervalles$	$[-2; 0[$	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8]$
$Effectifs$	3	7	9	8	4



b/

$Intervalles$	$[1; 3[$	$[3; 6[$	$[6; 8[$	$[8; 10[$	$[10; 12]$
$Effectifs$	3	7	6	8	7



Exercices généraux

Organisation de données- Effectifs - Fréquences

Exercice 1

Soit la série statistique suivante :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	8	9	11	9	8	5

1° Donner le mode, la médiane et calculer la moyenne ;

2° Compléter un tableau de fréquences et d'effectifs cumulés ;

3° Représenter sur un diagramme à bâtonnets et tracer le polygone des effectifs ;

4° Déterminer le nombre de valeurs qui dépassent 7 ;

5° Déterminer le pourcentage des valeurs qui n'atteignent pas 5 ;

6° Calculer la variance de cette série, son écart type.

Exercice 2

On a relevé les tailles, en cm, des élèves de la cinquième année.

173 ; 180 ; 160 ; 174 ; 170 ; 173 ; 163 ; 154 ; 170 ; 176 ; 170 ; 169 ; 164 ; 174 ; 165 ; 177 ; 158 ; 180 ; 162 ; 169 ; 163 ; 170 ; 180 ; 163 ; 170 ; 171 ; 167 ; 184 ; 173 ; 166 ; 174 ; 180 ; 183 ; 171 ; 181 ; 163 ; 173 ; 184 ; 163 ; 178 ; 162 ; 175 ; 161 ; 163 ; 175 ; 172 ; 179 ; 178 ; 180 ; 172 ; 164 ; 162 ; 181 ; 172 ; 179 ; 170 ; 184 ; 182 ; 177 ; 179 ; 177 ; 181 ; 180 ; 178 ; 163 ; 183 ; 177 ; 181 ; 172.

1) Ordonner les mesures.

2) Quelle est la population ?

Quels sont les individus ?

Quelle est la variable étudiée ?

3) Regrouper les mesures en classes d'amplitude 4 cm.

4) Construire le tableau des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.

5) Combien d'élèves ont une taille strictement inférieure à 1,70 cm ?

Exercice 3

a) On jette un dé 100 fois et on note la lecture xi. On appelle n_i l'effectif correspondant à la lecture x_i (n_i est le nombre d'apparition du chiffre x_i). On obtient le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	10	26	14	10	20

Déterminer les fréquences et les fréquences cumulées.

Caractéristiques de position

Exercice 4

Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'étendue de la série de l'Ex. 2.

Exercice 5

Dans un Lycée, trois classes de terminale C ont le même sujet de Mathématiques au cours d'un Bac blanc. Les notes obtenues sont les suivantes :

Terminale C_1	6,5	8	9	10	11	12,5	14	16
	3	**7**	**5**	**3**	**3**	**4**	**1**	**1**

Terminale C_2	7	8	9	10	11	12,5	14	15	17
	2	**5**	**6**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**2**

Terminale C_3	6	7,5	9	10	11	12	14	15	17
	4	**4**	**5**	**4**	**2**	**3**	**4**	**2**	**3**

1) Calculer les moyenne m_1 ; m_2 ; m_3 des notes respectivement en TC_1 ; TC_2 ; TC_3.

2) En déduire la moyenne m des notes des trois classes réunies.

Exercice 6

On a relevé l'âge des vingt personnes d'une entreprise :

20 ; 18 ; 36 ; 30 ; 20 ; 24 ; 60 ; 26 ; 40 ; 24 ; 30 ; 32 ; 18 ; 24 ; 50 ; 26 ; 42 ; 28 ; 52 ; 28.

Construire le tableau statistique de la série des âges (indiquer l'effectif, la fréquence, la fréquence cumulée).

Déterminer le mode, la moyenne m, la médiane, l'étendue de cette série statistique.

Exercice 7

On a mesuré la durée de vie (en certaines heures) de 900 ampoules.

Les résultats ont permis de dresser la courbe des effectifs cumulés croissants.

Faire un tableau avec les classes, les effectifs et les effectifs cumulés croissants.

Déterminer graphiquement une approximation de la médiane.

Exercice 8

La moyenne des notes d'un élève est actuellement de 12,5 sur 20. Avec une note de 16 sur 20 au prochain contrôle, cette moyenne passerait à 13.

Quel est le nombre de contrôles effectués à ce jour ?

Exercice 9

La moyenne des notes de Français d'un élève à l'issue des neuf premiers devoirs est 11, 75 sur 20.

Quelle meilleure moyenne peut-il espérer obtenir après un dixième et dernier devoir ?

Sa moyenne peut-elle être inférieure à 10 à l'issue de ce dernier devoir ?

Caractéristiques de dispersion

Exercice 10

On lance deux dés 60fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus.

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

1) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.

2) Construire les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants.

En déduire la valeur de la médiane.

Exercice 11

Lors d'un contrôle de 400 pointes, on relevé la taille (en mm) de chacune d'elles, et regroupé les résultats dans le tableau suivant :

Taille (en mm)	Effectif
28,5	2
28,8	9
29,1	5
29,4	15
29,7	60
30	165
30,3	95
30,6	21
30,9	15
31,12	9
31,5	4

1) Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série.

2) Quel est le pourcentage du nombre de pointes dont la taille est comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$

Exercice 12

Un professeur de français recense le nombre de livres lus par chacun de ses 180 élèves au cours du drenier mois.

Il obtient le résultat suivant :

- 18 élèves n'ont lu aucun livre,
- 72 élèves ont lu 1 livres,
- 45 élèves ont lu 2 livres,
- 36 élèves ont lu 3 livres,
- 9 élèves ont lu 4 livres,

1) Recopier et compléter le atbleau suivnat :

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif					
Fréquence					
Fréquence (en %)					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					

Combien d'élèves ont lu au moins 2 livres ? moins de 2 livres ?

2) Quel est le mode de cette série statistique ?

3) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type.

4) Représenter le résultat de cette enquête par undiagramme circulaire.

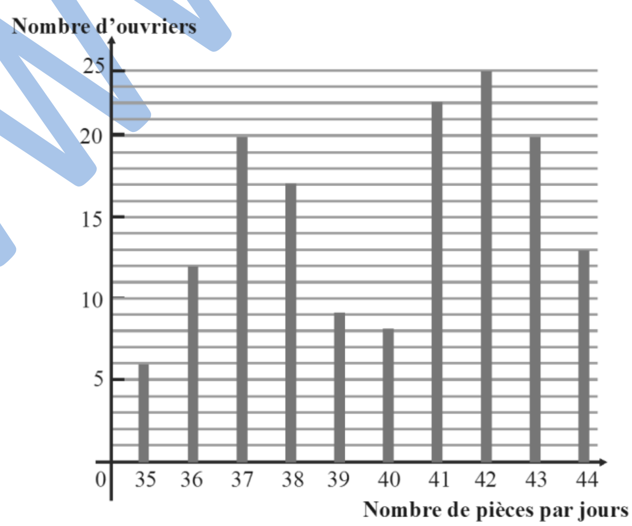
Exercice 13

Une usine utilise deux types de machines, M_1 et M_2, pour produire la même pièce. La direction a relevé la production journalière de chacun de ses ouvriers :

Les ouvriers travaillant sur une machine M_1 produisent entre 35 et 39 pièces par jour ;

Les ouvriers travaillant sur une machine M_2 produisent entre 40 et 44 pièces par jour.

On regroupe ces données dans le diagramme en bâtons suivant :



1) Organiser les données dans un tableau faisant apparaître les effectifs (nombre d'ouvriers) ni

Représentation graphique

Exercice 14

On a relevé la taille (en m) de 50 individus.

Les résultats obtenus sont les suivants :

1,71 ; 1,72 ; 1,82 ; 1,57 ; 1,75 ; 1,78 ; 1,96 ; 1,67 ; 1,63 ; 1,72 ; 1,67 ; 1,73 ; 1,77 ; 1,69 ; 1,78 ; 1,71 ; 1,82 ; 1,62 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,7 ; 1,79 ; 1,65 ; 1,75 ; 1,7 ; 1,84 ; 1,64 ; 1,73 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,78 ; 1,68 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,6 ; 1,73 ; 1,72 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,73 ; 1,64 ; 1 ;74 ; 1,67 ; 1,72 ; 1,63 ; 1,75.

Regrouper les données dans un tableau suivant les classes [1,5 ; 1,6[; [1,6 ; 1,65[; [1,65 ; 1,7[;

[1,7 ; 1,75[; [1,75 ; 1,8[; [1,8 ; 1,9[; [1,9 ; 2[.

Construire l'histogramme correspondant (une classe d'amplitude 0,1 sera représentée par un rectangle de base 3 cm et le rectangle représentant la classe [1,65 ; 1,7[aura une hauteur de 2 cm).

Exercice 15

Le tableau ci-dessous recense les têtes de

bétail (bovin et ovin) dans certain pays africain :

	Bovin ($\times$1000)	Fréquence	Ovin ($\times$1000)	Fréquence (%)
Burkina	4250			19,85
Cameroun	5 000			13,7
Guinée	1 750			1,6
Mali	5 500			18,6
Mauritanie	1 369			
Niger	4 750			18,75
Sénégal	2 750			16,6
Tchad	4 750			7,55
Totale	Totale		28 000	

1) Compléter le tableau (on arrondira) les fréquences à 10^{-3}près).

2) Dessiner un diagramme circulaire représentant la répartition de la population de bovins de ces huit pays.

3) Représenter par un diagramme à bandes les effectifs de la population ovine de ces pays.