République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire & Supérieur

Honneur –Fraternité- Justice

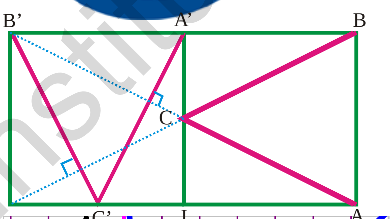
Institut Pédagogique National

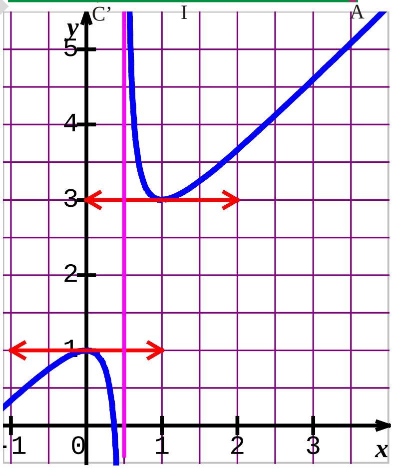
Fascicule de Mathématiques

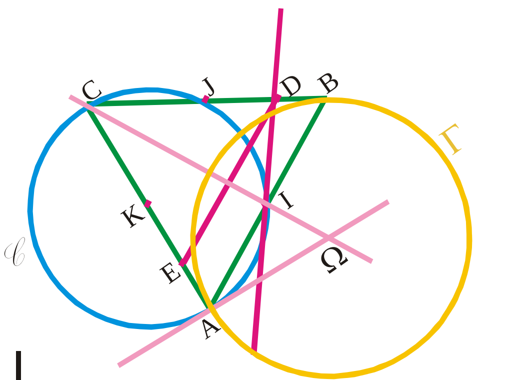
Pour les classes de 6èmes Années Secondaires

Séries C & D

$\forall a;b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}^*; (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k$







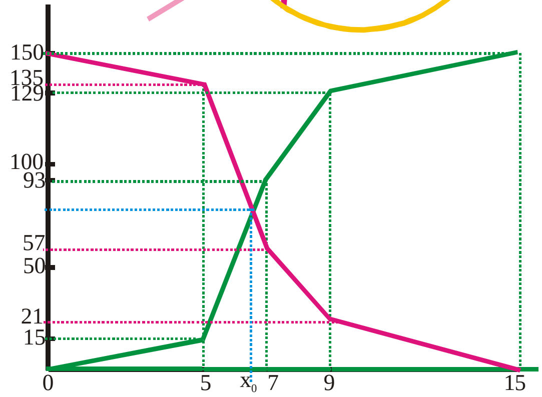


Fig.3

$S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; si le 1er terme est U_0

Avant – propos

Chers collègues professeurs,
Chers élèves,

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 6ème année secondaire conformément aux nouveaux programmes de la réforme de 1999.

Ce document a été réalisé dans des conditions d'urgence (1 mois) afin qu'il soit disponible dès le mois de janvier 2010. Il sera expérimenté à l'aide d'une grille d'évaluation élaborée à cet effet.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans les programmes suivant une approche pragmatique qui privilège les aspects pratiques.

Ce choix a été traduit par le découpage du programme en termes de chapitres (13) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs de tirer profit.
Cette structure est ainsi conçue

- '' **Faire- savoir**'' : permet de déterminer les savoirs et savoir-faire utiles et essentiels.
- '' **L'essentiel du chapitre ''** : résumé des points essentiels et incontournables.
- '' **Savoir – faire** '': permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **exercices** de niveau avancé.

L'IPN, souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel lui fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour une prise en compte dans la prochaine édition.

Les auteurs

Chapitre 1 ☛ Géométrie analytique dans le plan & l’espace

Faire savoir

L’essentiel du chapitre

I. A propos des vecteurs

1. Quelques relations vectorielles

- Pour tout point A du plan ou de l’espace, on a $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (vecteur nul).
- Pour tout point A et B du plan ou de l’espace, on a $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés) .
- Pour tout point A, B et C du plan ou de l’espace, on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ (Relation de Chasles).

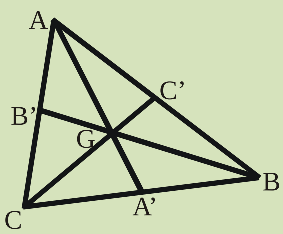
Soit [AB] un segment dans le plan ou de l’espace de milieu I :

- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Pour tout point M du plan ou de l’espace, on a :

- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$
- $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

Soit ABC un triangle dans le plan ou dans l’espace.
A’, B’, C’ les milieux respectifs de [BC] , [AC] , [AB] ,
G le centre de gravité ABC.



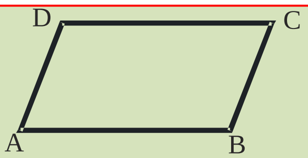
- $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{A'B'}$

Les droites (AB) et (A’B’) sont parallèles ;

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
- $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$
- Pour tout point M du plan ou de l’espace

  $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$; $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.
- Dans l’espace le point G appartient au plan du triangle ABC.
  (G ; A ; B ; C sont coplanaires).

Soit ABCD un parallélogramme dans le plan ou dans l’espace.

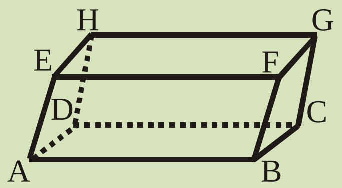


- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Dans l’espace les points A ; B ; C ; D sont coplanaires.

Soit ABCDEFGH un pavé dans l'espace

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$



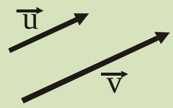
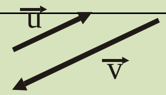
2. Produit d'un vecteur par un réel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou dans l'espace

- $0\vec{u} = \vec{0}$; $1\vec{u} = \vec{u}$; $-1\vec{u} = -\vec{u}$;
- $\forall\ \alpha$; $\beta \in \mathbb{R}$; $\alpha\left(\beta\vec{u}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{u}$; $\left(\alpha+\beta\right)\vec{u} = \overrightarrow{\alpha u} + \beta\vec{u}$; $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

3. Vecteurs colinéaires

- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur dans le plan ou dans l'espace.
- Deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace, sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction (c'est-à-dire ils sont portés par la même droite ou par deux droites parallèles).
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Si deux vecteurs sont colinéaires, alors, tout vecteur colinéaire à l'un est colinéaire à l'autre.

On a	Si, et seulement si,
$\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^+$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens. 
$\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^-$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires. 

4. Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels.

Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5. Norme d'un vecteur dans le plan ou dans l'espace

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est la distance entre deux points origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$. Elle est notée $\left\|\vec{u}\right\|$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$;

- $\left\|\vec{u}\right\| \geq 0$.
- $\left\|\vec{0}\right\| = 0$ et $\left\|\vec{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

Pour tout réel k :

- $\left\|k\vec{u}\right\| = |k|\left\|\vec{u}\right\|$; $\left\|-\vec{u}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$

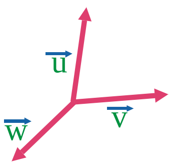
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace;

- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$.
- Si : $\left\|\vec{u}\right\| = 1$, alors $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

II. Bases de l’espace

Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls dans l’espace $\mathscr{E}$.

Le triplet ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base de l’espace $\mathscr{E}$ si, et seulement, si $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont non coplanaires.



- Le triplet ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base dans l’espace $\mathscr{E}$ si et seulement :

$\forall \alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \neq \vec{w}\ ;\ \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \neq \vec{u}\ ;\ \alpha\vec{w} + \beta\vec{u} \neq \vec{v}$

- Soit ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) une base de $\mathscr{E}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l’espace, il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que :
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, x ; y ; z sont les composantes ou coordonnées de $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

On écrit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

- x est l’abscisse du vecteur $\vec{u}$,
- y est l’ordonnée du vecteur $\vec{u}$,
- z est la côte du vecteur $\vec{u}$.
- $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; α et β deux réels, on a :

$-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$; $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$; $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$; $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}$; $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha x+\beta x' \\ \alpha y+\beta y' \\ \alpha z+\beta z' \end{pmatrix}$.

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,
$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$

- Si ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux (portées par deux droites orthogonales).

  Alors la base ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base orthogonale dans $\mathscr{E}$.
- Si ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base orthogonale de $\mathscr{E}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$

  Alors, ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$) est une base orthonormale de $\mathscr{E}$

III. Repères

Si $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est une base de $\mathscr{E}$ et O un point donné de $\mathscr{E}$, alors $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est un repère de $\mathscr{E}$.

Pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$; il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

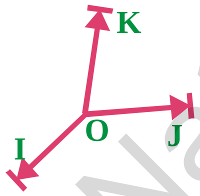
x ; y ; z sont les coordonnées du points M dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.
On écrit M(x ; y ; z) ;

- x est l'abscisse de M ; on écrit $x = x_M$
- y est l'ordonnée de M ; on écrit $y = y_M$
- z est la côte de M ; on écrit $z = z_M$

Avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$; $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$;

Le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est désigné aussi par (O, I ; J ; K).

- O est l'origine du repère,
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées
- (OK) est l'axe des côtes
- O(0 ; 0 ; 0) ; I(1 ; 0 ; 0) ; (J(0 ;1 ; 0) ; K(0 ; 0 ; 1).



- Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$; $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$; alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

- Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$; $B(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et I milieu de [AB], alors,

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$;

$y_J = \dfrac{y_A + y_B}{2}$;

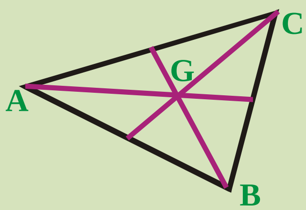
$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

- Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors

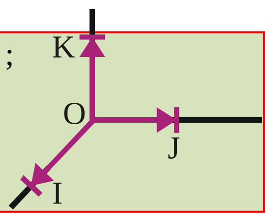
$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$;

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$;

$z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.



- Si (O ; I ; J ; K) est un repère de $\mathscr{E}$ et (OI) ⊥ (OJ) ; (OJ) ⊥ (OK) ; (OK) ⊥ (OI) ; alors ; (O ; I ; J ; K) est un repère orthogonal de $\mathscr{E}$.
- Si (O ; I ; J ; K) est un repère orthogonal de $\mathscr{E}$ et OI = OJ = OK = 1 ; alors (O ; I ; J ; K) est un repère orthonormal de $\mathscr{E}$.



- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- Si A(x_A ; y_A ; z_A) ; B(x_B ; y_B ; z_B), dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, alors
AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

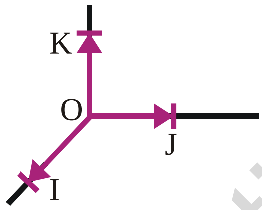
- Dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, la sphère de centre Ω(x_0 ; y_0 ; z_0) et de rayon R a pour équation cartésienne : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

VI. Equation de droite dans le plan et dans l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère (O ; I ; J ; K).

1. Equations des plans (OIJ) ; (OJK) ; (OKI) :

- Le plan (OIJ) a pour équation z = 0
- Le plan (OJK) a pour équation x = 0
- Le plan (OKI) a pour équation y = 0



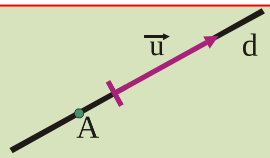
2. Equations des droites (OI) ; (OJ) ; (OK) :

- La droite (OI) a pour système d'équations : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- La droite (OJ) a pour système d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
- La droite (OK) a pour système d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

3. Représentation paramétrique d'une droite

Soit (d) une droite passant par un point donné

A(x_0 ; y_0 ; z_0) et de vecteur directeur donné $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



(d) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Ce système d'équations est la représentation paramétrique de (d).

4. Représentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant un point donné A(x_0 ; y_0 ; z_0) et de base $(\vec{u} ; \vec{u}')$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{u}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que :

$\begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \quad ; (t ; t') \in \mathbb{R}^2 \quad ; \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases}$ Ce système d'équations est la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

4. Vecteur normal d'un plan de l'espace

- Soit $\mathscr{P}$ un plan, tout vecteur non nul $\vec{n}$ porté par une droite orthogonale à $\mathscr{P}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- Soit $(\vec{u} ; \vec{v})$ une base de $\mathscr{P}$: $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

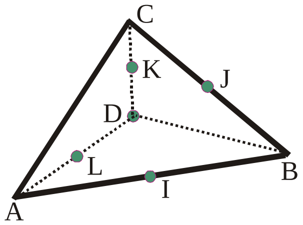
Savoir-faire

A. Applications

Vecteurs et configurations

Exercice1.

ABCD un tétraèdre. I ; J ; K ; L les milieux respectives de : [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA]. Montrer que IJKL est un parallélogramme.



Solution

Dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Donc, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

Donc, IJKL est un parallélogramme.

Vecteurs et alignement

Exercice2.

ABCDEFGH un cube d'arête a.

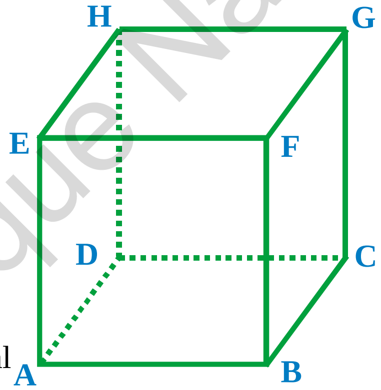
1) Montrer que le triangle BDE est équilatéral.

2) Soit I le centre de BDE.

Montrer que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$,

que peut-on déduire pour les points A ; I ; G ?

3) On prend a = 1. L'espace est rapporté au repère orthonormal (D ; A ; C ; H).



1) Donner les coordonnées des sommets de ce cube.

2) Déterminer les coordonnées de I.

Vérifier que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Solution

1) On a : ABCD ; ADHE ; ABFE sont des carrés de côté mesurant a.

Donc : BD = a$\sqrt{2}$; DE = a$\sqrt{2}$; BE = a$\sqrt{2}$;

Donc : BD = DE = BE ;

Donc ADE est un triangle équilatéral.

2) ABCDEFGH est un pavé,

Donc, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$,

Or, I est le centre de gravité de BDE

Donc, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AI}$,

Donc, $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$

Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$,

D'où les points A ; I ; J sont alignés.

3) a) On a : D(0 ; 0 ; 0) ; A(1 ; 0 ; 0) ; C(0 ; 1 ; 0) ; H(0 ; 0 ; 1).

On a : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$; donc B(1 ; 1 ; 0),

On a : $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$; donc G(0 ; 1 ; 1) ,
On a : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$; donc E(1 ; 0 ; 1) ,
On a : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$; donc F(1 ; 1 ; 1).
b) I est le centre de gravité de BDE,

Donc ; $x_I = \frac{x_A + x_D + x_E}{3} = \frac{1-0+1}{3} = \frac{2}{3}$; $y_I = \frac{y_B + y_D + y_E}{3} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$;

$z_I = \frac{z_B + z_D + z_E}{3} = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}$.

Don, I$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(0-1) \\ \frac{1}{3}(1-0) \\ \frac{1}{3}(1-0) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Equations de droites et de plans

Exercice3.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère (O **;** $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

1) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'ensemble $\mathscr{P}$ des points M(x ; y ; z) de $\mathscr{E}$ tels que :

$$\begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 2t - t' \quad ; \ (t\,;t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (une relation entre x ; y ; z).

Solution

1 .) On a $\begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 0 + 2t - t' \\ z = 3 + t + 0t' \end{cases}$, or $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$.

Donc, $\mathscr{P}$ est le plan de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{u}')$ et contenant le point A(1 ; 0 ; 3).

2.) On a $\begin{cases} t + t' = x - 1 \\ 2t - t' = y \end{cases}$

Donc, 3t = x + y – 1 et t = $\frac{x+y-1}{3}$,

Or, z = 3 + t

Donc, z = 3 + $\frac{x+y-1}{3}$ et 3z = 9 + x + y -1 ,

Donc, $\boxed{\mathscr{P} : x + y - 3z + 8 = 0}$

B. Exercices

1. ABCD un tétraèdre, I, J, K, L les points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

1) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

2) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJKL ?

2. ABCD un tétraèdre, d'arête a (a > 0). A' milieu de [BD].

1) Montrer que le plan (AA'C est le plan médiateur du segment [BD].

2) Montrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

3) Soit T, J, K, L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ;[CD] ; [DA].

Montrer que IJKL est un carré et déterminer son aire en fonction de a.

3. ABCD un tétraèdre, I, J, K, L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].

L'espace est rapporté au repère (A ; B ; C ; D).

1) Donner les coordonnées des points I ; J ; K ; L.

2) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

4. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{w} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$.

1) $(\vec{u} ; \vec{v})$ est-elle une base de $\mathscr{E}$?

2) $(\vec{u} ; \vec{w})$ est-elle une base de $\mathscr{E}$?

5. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère (O ; I ; J ; K). A(2 ;0 ;3), B(-1 ;2 ; 5) ; C(3 ;-2 ;0).

1) Les points A ; B ; I sont-ils alignés ?

2) les points I ; J ; C sont-ils alignés ?

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $\|\vec{u}\|$, $\vec{u}$ est-il unitaire ?

2) $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, donnes les coordonnées de $\vec{v}$, $\vec{v}$ est-il unitaire ?

7. L'espace est rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J ; K).

1) Calculer les longueurs IJ, JK, KI. Quelle est la nature du triangle IJK ?

2) Soit G le centre du triangle IJK. Déterminer les coordonnées de G.

3) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (OG).

4) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK), puis une équation cartésienne de ce plan.

8. L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. A(1 ; 2 ; 3); B(2 ; 0 ; 1); C(-1 ; 3 ; -5).

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme et déterminer les coordonnées de son centre I.

3) Soit G et H les centres de gravité des triangles ABC et ACD.

a) Déterminer les coordonnées des points G et H.

b) Montrer que I est le milieu de [GH].

9. L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

1) $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + 3y + 2z + 1 = 0$. (d) la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (d).

2) $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x + 3y + 2z + 1 = 0$. (d') la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{-1}{3} + t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{-5}{2}t \end{cases}$

Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (d').

3) $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne $2x + 3y + 2z + 1 = 0$.

(d'') la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{-5}{2}t \end{cases}$

10 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ des points M(x ; y ; z) de l'espace dans chacun des cas :

1) Γ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) Γ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 3 = 0$

3) Γ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - x - 1 = 0$

Chapitre 2 Equations, inéquations &systèmes

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

1. Equations

a) Equations du premier degré

La forme générale d'une équation du premier degré est ax + b = 0 où a et b sont deux réels donnés.

Si	alors l'ensemble des solutions est
a = 0 et b = 0	$\mathbb{R}$
a = 0 et b ≠ 0	$\varnothing$
a ≠ 0	$\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

b) Equations du second degré

La forme générale d'une équation du second degré est $ax^2 + bx + c = 0$ où a est réel non nul donné et b, c sont deux réels donnés.

Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ, soit le nombre Δ' tel que :

$\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)	$\varnothing$
$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)	$\{x_1\ ;\ x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Ou : $x_1 = \frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Si	alors
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
a + b + c = 0	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{1\ ;\ \frac{c}{a}\right\}$.
a - b + c = 0	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{-1\ ;\ \frac{-c}{a}\right\}$.
$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ où s et p sont deux réels donnés	Les nombres x et y (s'ils existent) sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X : $X^2 - sX + p = 0$

L'équation $x^2 = k$ où k est un réel donné.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	$\varnothing$
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}\}$

c) Equation bicarrée

La forme générale d'une équation bicarrée est : $ax^4 + bx^2 + \ + c = 0$; avec a un réel non nul donné et b et c deux réels donnés.
En plus : $ax^4 + bx^2 + \ + c = 0 \Leftrightarrow X = x^2$ et $aX^2 + bX + c = 0$.

2. Inéquations

a) Inéquations du premier degré

La forme générale d'un binôme du premier degré est ax + b où a est un réel non nul donné et b un réel donné.

- Signe de ax + b sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		Signe contraire de a	0	Signe de a	

La forme générale d'une inéquation du premier degré est :
$ax + b \leq 0$ où $ax + b < 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b > 0$

b) Inéquations du second degré

La forme générale d'un trinôme du second degré est ax + bx + c ou a est un réel non nul donné, b et c deux réels donnés.

Signe d'un trinôme du second degré

Si	alors
$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>signe de a</td></tr></table>
$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table>
$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>Inf $(x_1 ; x_2)$</td><td></td><td>Sup $(x_1 ; x_2)$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe contraire de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table>

La forme générale d'une inéquation du second degré est :
$ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$.

3. Système d'équations et d'inéquations

a) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

La forme générale d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues est :

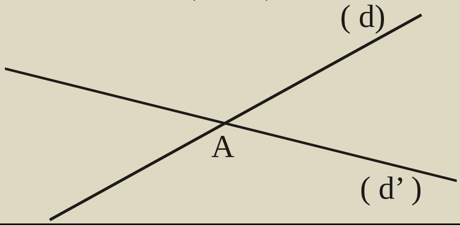
$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a ; b ; c ; a' ; b' ; c' sont six nombres réels donnés et où (x ; y) est le couple de réels inconnus.

Le déterminant du système est le nombre Δ tel que : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta \neq 0$	Le système a une solution unique. On la détermine par substitution ou par combinaison linéaire.
$\Delta = 0$	Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité

Interprétation graphique

Soit (d) et (d') les deux droites d'équations cartésiennes ax + by = c et a'x + b'y = c'
dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan.

Si	alors l'ensemble des solutions est
(d) et (d') sont sécantes ($\Delta \neq 0$) 	Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à (d) et (d').
(d) et (d') sont strictement parallèles ($\Delta = 0$). (d) (d') Les droites n'ont pas de points communs	Le système n'a pas de solution.
(d) et (d') sont confondues ($\Delta = 0$). (d') = (d') Les droites ont une infinité de points communs	Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées du point de (d) (ou de d').

b) Système linéaire d'inéquation à deux inconnues

La forme générale d'une inéquation linéaire à deux inconnues est :
ax + by + c $\geq$ 0 ou ax +by + c $\leq$ 0 ou ax +by + c > 0 ou ax +by + c < 0, avec a; b deux réels non nuls et c un réel donné.

Soit (d) la droite d'équation ax +by + c = 0.

On considère le nombre ax + by + c

- ce nombre est nul pour tous les couples M(x ; y) de (d).
- ce nombre est positif pour tous les points M(x ; y) de l'un des demi-plans de frontière (d).
- ce nombre est négatif pour tous les points M(x ; y) de l'autre demi-plan.

- On détermine le demi-plan où $ax + by + c \geq 0$ (respectivement $ax + by + c \leq 0$) en calculant ce nombre pour un point donné que l'on choisit en dehors de (d).
- Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues ne peut se résoudre que graphiquement

4. Polynômes

Définition

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$; f la fonction définie par $f(x) = ax^n$.
  La fonction f est appelée un monôme de coefficient a et de degré n.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ où a_n est un réel non nul et a_{n-1} ; … ; a_1 ; a_0 des réels, est la forme réduite du polynôme P et n est appelée le degré du polynôme P. On écrit $d°P = n$.
- Un binôme $ax + b$ est un polynôme de degré 1.
- Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré 2.

Zéro d'un polynôme- Factorisation

- On appelle zéro (ou racine) d'un polynôme P.
  Tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.
- Déterminer les zéros d'un polynôme P ; c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$
- si α est un zéro de $P(x)$ alors, $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$.

- **Des égalités remarquables**

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; 2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 3) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Forme canonique d'un trinôme du second degré :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ (forme canonique)}$$

Savoir-faire

A. Applications

Equations bicarrées

Exercice 1 Résoudre dans l'équation $x^4 + x^2 -12 = 0$.

Solution

Soit $x^2 = X$, on a : $x^4 + x^2 -12 = 0 \Rightarrow X^2 + X -12 = 0 \Leftrightarrow (X + 4)(X -3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 -3) = 0$.

- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution,
- L'équation $x^2 -3 = 0$ a pour solution : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- L'équation $x^4 + x^2 -12 = 0$ a donc deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Exercice 2

m est un nombre réel donné, on considère l'équation d'inconnue x : $x^4 -3mx^2 +m^2 -1 = 0$.

a) Résoudre dans cette équation pour chacune des valeurs suivantes de m : 0 ; 1 ; 3.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette équation a

- quatre solutions ;
- trois solutions distinctes ;
- deux solutions distinctes

Solution

a) Si m = 0 ; on a $x^4 – 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 -1) = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x -1)(x +1) = 0$.
Donc l'équation a deux solutions : -1 et 1.

- si m = 1 on a : $x^4 – 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 -3) = 0 \Rightarrow x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.
  Donc l'équation a trois solutions : $-\sqrt{3}$; 0 et $\sqrt{3}$.
- si m = 3 on a : $x^4 – 9x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x +1)(x -2\sqrt{2})(x +2\sqrt{2}) = 0$.
  Donc l'équation a quatre solutions : $-2\sqrt{2}$; -1 ; 1 et $2\sqrt{2}$.

b) On pose $X = x^2$, on obtient l'équation $X^2 -3mX +m^2 -1 = 0$; (2)

Dans l'équation (2) : $\Delta = 5m^2 + 4$; $p = m^2 -1$ et $s = 3m$.

- On remarque que pour tout nombre réel m ; l'équation (2) admet deux solutions distinctes.
- L'équation (1) a quatre solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) admet deux solutions distinctes et positives. Cette conditions est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$; $s > 0$ et $p > 0$; c'est-à-dire $m \in [1 ; +\infty[$.
- L'équation (1) a trois solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solution distinctes et positives dont l'une est nulle, cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$, $p = 0$ et $s > 0$ c'est-à-dire m = 1.
- L'équation (1) a deux solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solutions distinctes non nulles et de signes opposées, cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$; $p < 0$ c'est-à-dire $m \in]-1 ; 1[$.

Inéquations bicarrées

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^4 -5x^2 +1 > 0$…(1)

Solution

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^4 -5x^2 +1$; on pose $X = x^2$.

On a : $4x^4 -5x^2 +1 = 4x^4 -5x^2 +1$; le polynôme $4x^4 -5x^2 +1$ a pour racine 1 et $\frac{1}{4}$.

Donc ; $4x^4 -5x^2 +1 = (4X -1)(X -1) = (4x^2 -1)(x^2 -1) = (2x- 1)(2x +1)(x -1)(x+1)$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$ -1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
(2x -1) (2x +1)	+	+	-	+	+
(x-1)(x +1)	+	-	-	-	+
P(x)	+	-	+	-	+

Donc l’ensemble de solution de l’inéquation (1) est $S =]-1\,;-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;1[$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $x^4 \geq x^2 + 12$ ……(2)

Solution

On a : $x^4 \geq x^2 + 12 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 \geq 0$; on pose $X = x^2$. On a : $x^4 - x^2 - 12 = X^2 - X - 12$; le polynôme $X^2 - X - 12$ a pour racine -3 et 4, donc

$$\begin{aligned} X^2 - X - 12 &= (X + 3)(X - 4) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 + 3)(x - 2)(x + 2). \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 3 > 0$; donc l’ensemble de solutions de l’inéquation (2) est $S =]-\infty\,;-2[\cup[2\,;+\infty[$.

Autres équations et inéquations

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’équation $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$……(1)

Solution

- Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$; $P(1) = 0$.
  Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)\,Q(x)$; ….$P(-1) = 0$
  Donc il existe un polynôme $R(x)$ tel que $Q(x) = (x + 1)R(x)$;
  Par la suite on a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $P(x) = (x - 1)\,Q(x) = (x - 1)(x + 1)R(x) = (x^2 - 1)R(x)$
- Pour déterminer le polynôme R on peut effectuer une division euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 & x^2 - 1 \\ \hline \underline{x^4 - x^2} & x^2 - x - 12 \\ -x^3 - 12x^2 & \\ \underline{-x^3 + x} & \\ -12x^2 + 12 & \\ \underline{-12x^2 + 12} & \\ 0 & \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 12)$
$= (x - 1)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$

Donc l’ensemble de solutions de l’équation (1) est $\{-1\ ;\ 1\ ;\ -3\ ;\ 4\}$

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$

a) Vérifier que -3 et 2 sont racines de P et en déduire une factorisation du polynôme P(x).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $x^4 + x^3 - 5x + x - 6 < 0$ ……..(2)

Solution

- $P(-3) = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$ donc -3 est racine de P(x)
- $P(2) = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$ donc 2 est racine de P(x)

  On en déduit qu’il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 2)(x - 3)\,Q(x)$.
  Pour déterminer ce polynôme Q, on peut utiliser la méthode de cœfficients indéterminés.
  Q est un polynôme du 2^{end} degré, on pose $Q(x) = ax2 + bx + c$; on a $\forall x \in$; $P(x) = (x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c)$.
  Donc, $(x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$;
  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx - 6ax^2 - 6bx - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$
  $ax^4 + (b + a)x^3 + (c + b - 6a)x^2 + (c - 6b)x - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 & \\ b + a = 1 & \Rightarrow b = 0 \\ c + b - 6a = -5 & \Rightarrow c = 1 \\ c - 6b = 1 & \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 + 1)$$

  On a pour tout réel x ; $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow P(x)$ est du signe de $x^2 + x - 6$; donc l’ensemble de solution de l’inéquation (2) est $S =]-3\,;2[$

Equations irrationnelles

On appelle équation irrationnelle toute équation où l’inconnue figure sous un radical.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2-x} = x + 10$ …(1)

Solution

Nous allons proposer deux méthodes pour résoudre une telle équation.

- **Résolution par implication** : Pour tous nombres réels a et b on a
  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$; on peut écrire : $\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow 2 - x = (x + 10)^2 \Leftrightarrow x^2 + 21x + 98 = 0$;
  $(x + 7)(x + 14) = 0$; l'équation $(x + 7)(x + 14) = 0$ a deux solutions -7 et -14.
  Pour terminer la résolution on doit vérifier si, -7 et 14 sont solutions de l'équation (1) :
  $\sqrt{2-(-7)} = -7+10$ -7 est solution ; $\sqrt{2-(-14)} = -14+10$ -14 n'est pas solution
  Donc ; l'équation (1) a une solution unique x = -7.
- **Résolution par équivalence** pour tous nombres réels a et b on a :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{Donc ; } \sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21x + 98 = 0 = b^2 \\ x \geq -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+14) = 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7$$

Donc l'équation (1) a pour solution x = -7.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{-x2+5x+9} = \sqrt{x+3}$; …….(2)

Solution

Pour tout nombre réel $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}$. On peut écrire $\sqrt{-x2+5x+9} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x2+5x+9 = x-3 = 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$ Donc, l'équation (2) a une seule solution : x = 6.

Pour résoudre une équation irrationnelle (E) on peut utiliser la méthode suivantes :

- éliminer les radicaux par élévation au carré
- résoudre l'équation (E)' sans radical ainsi obtenue ;
- déterminer parmi les solutions de (E)' celles qui sont solutions de (E).

Inéquations irrationnelles

Pour résoudre une telle inéquation, il est difficile de procéder par implication car les ensembles de solutions contiennent en général une infinité d'éléments ; on ne peut donc pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x + \sqrt{x-1} \geq 3$; …..(1)

Solution

- Contraintes sur l'inconnue $x \in]1 ; +\infty[$
- On a $\forall x \in]1 ; +\infty[$: $x + \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 3 - x$,Or $\forall x \in]1 ; +\infty[$; $\sqrt{x-1} \geq 0$; donc
  - Si, $3 - x \leq 0$; l'inéquation est vérifiée, tout nombre réel de l'ensemble $[3 ; +\infty[$ est solution de (1).
  - Si $3 - x > 0$ on a : $\sqrt{x-1} \geq 3 - x \Leftrightarrow x - 1 \geq (3 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leq 0$.
    $\Leftrightarrow x \in [2 ; 5[$.
    Tout nombre réel de l'ensemble $[2 ; 3[$ est solution de (1).
    Donc ; l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $[2 ; +\infty[$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\geq 3.....(2)$.

Solution

- Contraintes sur l'inconnue $x \geq -1$ et $x \geq -2$; donc $x \in [-1 ; +\infty[$,
- On a $\forall$ $x \in [-1 ; +\infty[$: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\geq 3 \Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+2)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{(x+2)(x+1)}\geq -x+3$. Or $\forall$ $x \in [-1 ; +\infty[$; $\sqrt{(x-1)(x+2)}\geq 0$; donc

  Si $-x+3\leq 0$; l'inéquation est vérifiée, tout nombre réel de l'ensemble $[3 ; +\infty[$ est solution de (2).

  Si ; $-x+3>0$; on a $\sqrt{(x+1)(x+2)}\geq -x+3 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)\geq(-x+3)^2 \Leftrightarrow 9x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{7}{9}$.

  Tout nombre réel de l'ensemble $[\frac{7}{9} ; 3[$ est solution de(2), donc, l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est $[\frac{7}{9} ; +\infty[$

Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations

Système à trois équations à trois inconnues

On considère le système $\Sigma : \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a"x+b"y+c"z=d" \end{cases}$; x ; y ; z sont les inconnues.

Σ est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.
Résoudre Σ c'est déterminer les triplets (x ; y ; z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.
Nous allons étudier deux méthodes de résolution d'un tel système, par substitution et par pivot de Gauss.

Résolution par substitution

Exercice 1

Résoudre le système $\Sigma_1 \begin{cases} x+y-2z=-7 & ....(E_1) \\ 2x-y+z=0 & ....(E_2) \\ 2x+y+z=8 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On déduit de l'équation (E_1) que $z = -2x - y$; on remplace z par sa valeur dans (E_1) et (E_2)

On obtient $\Sigma_1 \begin{cases} 7x+3y=23 \\ -x-2y=-8 \\ z=-3x-y+8 \end{cases}$; le système $\begin{cases} 7x+3y=23 \\ -x-2y=-8 \end{cases}$ a un unique couple solution (2 ; 3).

On en déduit que $z = -3 \times 2 - 3 + 8 = -1$, donc ; le système Σ_1 a un unique triplet solution (2 ; 3 ; -1).

Exercice 2

Résoudre le système $\Sigma_2 : \begin{cases} 2x-y-2z=6 & ....(E_1) \\ x+y-z=1 & ....(E_2) \\ x-5y-z=9 & ....(E_3) \end{cases}$.

Solution

On en déduit de l'équation E_1 que : $y = 2x -2z -6$; on remplace y par sa valeur dans E_2 et E_3 :

On obtient : $\Sigma_2 : \begin{cases} y=2x-2z-6 & ....(E_1) \\ 3x-3y=7 & ....(E_2) \\ -9x+9y=-21 & ....(E_3) \end{cases}$

Le système $\Sigma_2 : \begin{cases} 3x-3y=7 \\ -9x+9y=-21 \end{cases}$ a pour solution tous les couples (x ; y) de nombres réels tels que :

3x -3z = 7. On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire λ (z = λ) ;On en déduit :

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \lambda \end{cases}$$; donc l'ensemble de triplets solutions de Σ_2 est $\left\{\left(\frac{7}{3}+\lambda\ ;\ \frac{-4}{3} ;\ \lambda\right)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Résolution par Pivot de Gauss

On peut également résoudre un système d'équations par combinaison.

Cette méthode nécessite généralement une vérification sauf dans le cas du Pivot de Gauss,dont nous nous admettons qu'il transforme un système en un système équivalent

Exercice 1

Résoudre le système $\Sigma_1 : \begin{cases} x-5y-7z=3 & ....(E_1) \\ 5x+3y+z=3 & ....(E_2) \\ 3x + y - 2z = -1 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On élimine x dans (E_2) et dans (E_3) par combinaison de chacune de ces équations avec (E_1).

On obtient $\Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & ....(E_1) \\ -28x-36z=12 & ....5\times(E_1) - (E_2) \\ -16y - 19z = 10 & ....3\times(E_1) - (E_3) \end{cases}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & ....(E'_1) \\ -7x-9z=3 & ....\ (E'_2) \\ -16y - 19z = 10 & ....\ (E'_3) \end{cases}$.

On élimine y dans (E'$_3$) par combinaison de (E'$_2$) et (E'$_3$)

On obtient $\Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 \\ -7y-9z=3 \\ z = 2 \end{cases}$. Il reste à résoudre ce système triangulaire ; on obtient en commençant par la dernière équation puis en remontant : z = 2 ; y = -3 ; et x = 2. Donc le système Σ_1 a pour solution un triplet (2 ; -3 ; 2).

Exercice 2

Résoudre le système $\Sigma_2 : \begin{cases} x+y-2z=1 & ....(E_1) \\ x-2y+z=1 & ....(E_2) \\ -2x + y + z = 1 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On obtient $\Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_2 : \begin{cases} x+y-2z=1 & ....(E_1) \\ 3y-3z=0 & ....(E_1) + (E_2) \\ 2y - 3z = 3 & ....3\times(E_1)+(E_3) \end{cases}$ le système $\begin{cases} 3y-3z=0 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$ n'a pas de solution ; donc le système Σ_2 n'a pas de solution.

Exercice 3

Résoudre le système $\Sigma_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 & ....(E_1) \\ x+2y+2z=6 & ....(E_2) \\ 2x + 3y + 7z = 10 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On obtient $\Sigma_3 \Leftrightarrow \Sigma_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 & ....(E_1) \\ y+3z=-2 & ....(E'_2)=(E_1) - (E_2) \\ y + 3z = -2 & ....(E_3) \end{cases}$; Donc $\Sigma_3 \Leftrightarrow \Sigma_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 \\ y+3z=-2 \end{cases}$; on donne à l'une des inconnues y ou z une valeur arbitraire ; z = λ. On en déduit que y = -2 -3λ (E'$_2$) ; on déduit que x = 4 -2(-2-3λ) +5λ= 8 + 11λ.

Donc l'ensemble des triplets solutions de Σ_3 est $\{(8+11\lambda\ ;\ -2-3\lambda\ ;\ \lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

B. Exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x^2 -4x + 3 = 0$; $x^2 +x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$;
$x^2 +3x - 4 = 0$; $x^2 -2x - 2 = 0$; $x^4 -4x^2 +3 = 0$
$x^2 -3x - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x + 3\sqrt{x}\ 1 = 0$;
$2x^2 -x - 1= 0$; $1- 4x^2 = 0$; $(2x +1)2 -3(2x +1) -4 = 0$
$(x -1) (x + 3) = 0$; $(1 -2x)^2(1 + x) = 0$; $x(1-x^2) = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
$x + 1 \geq 0$; $2x - 1 \leq 0$; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$.

3. Soit m un réel. Soit E_m l'équation :
$mx^2 - x + 1 = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de E_m.

4. Soit g_m le trinôme défini pour tout x réel, par : $g_m(x) = x^2 + 2x -2m$ où m est un paramètre réel non nul.
1) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$.
2) Dans le cas où l'équation gm(x) = 0 admet deux solutions réelles x' et x'' telles que x' < x'' et que si m > 0 alors x' < -2 < 0 < x''.

5. On considère l'équation (E) :
$x^4 -5x^3 +8x^2 -5x + 1= 0$.
1) Montrer que(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) = 0

6. 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système :
$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$.
2) Déterminer, de la question précédente, la résolution des systèmes suivants :
$\begin{cases} 5x + 2y^2 = 26 \\ 2x - 3y^2 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$

7. Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Déterminer l'intersection des droites (d) et (d') données par leurs équations :
(d) $4x + 5y -1 = 0$ 2) (d) $2x - 10y -4 = 0$
(d') $3x + 4y -2 = 0$ (d') $-3x + 15y + 6 = 0$
3) (d) $4x - 2y -1 = 0$ (d') $y = 2x + 1$

8. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes :
1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ -2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - 2y + 3z = 12 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$.

9. Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan.
1) Les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :
$x + y - 2 = 0$; $3x -y -1 = 0$; $2x -3y + 2 = 0$ sont elles concourantes.
2) Vérifier graphiquement la réponse.

10 1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :
$x + y - 2 = 0$; $3x -y -1 = 0$; $2x -3y + m = 0$ soient concourantes ?
2) Faites la figure pour la valeur de m trouvée.

11 Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations suivantes :
1) $2y - x + 2 \leq 0$; 2) $y \geq 0$; 3) $x \leq 1$.
4) $\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$

12 On donne un polynôme P et un nombre réel a. Dans chacun des cas suivants :
Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.
Déterminer le quotient de P(x) par x – a.
Factoriser, si possible, ce quotient.
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x -2$ et a = 2
2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.
3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x -9$ et a = -3
4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x -6$ et $a = \sqrt{3}$.

13 Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points A(-3 ; 2) ; B(0 ; -3) ; C(2 ; 2).
1) Déterminer une équation de chacune des droites (AB) ; (AC) et (BC).
2) Déterminer un système d'inéquation définissant l'intéieur du triangle ABC.

14 Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2. Mettre P(x) sous la forme canonique. Déterminer les racines éventuelles de P
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^2 + 2x -1$ 5) $P(x) = x2 + 2x +2$
2) $P(x) = -x^2 + x -1$ 6) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

Chapitre 3 Limites & continuité

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

1. Limite en $+\infty$ et $-\infty$

a) Limite infinie en $+\infty$

Soit ***f*** une fonction définie sur un intervalle de type $[a\ ;+\infty[$; $a \in \mathbb{R}$.
Nous écrivons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ pour rendre compte du comportement suivant :
un réel arbitrairement choisi et ce aussi grand que l'on veut, alors toutes les valeurs ***f***(x) de la fonction dépassent ce réel dés que x est assez grand.
On dit alors, que ***f*** tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple

Chacune des fonctions suivantes tend vers $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.

$x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) limite finie en $+\infty$

- Limite nulle ; ***f*** une fonction positive définie sur un intervalle du type $[a\ ;+\infty[$; $a \in \mathbb{R}$.
  L'écriture $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ traduit le comportement suivant :
  Un réel arbitrairement choisi et ce aussi petit que l'on veut, alors toutes les valeurs ***f***(x) de la fonction sont plus petites que ce réel dés que x est assez grand.

- Si ***f*** est une fonction de signe quelconque, alors par définition :
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ signifie $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = 0$.
  On dit alors que ***f*** tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple

Chacune des fonctions suivantes tend vers 0, quand x tend vers $+\infty$.

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Limite finie

Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$; c'est dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - \ell| = 0$;

Ou encore ***f***(x) $= \ell + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

- Une fonction n'a pas nécessairement une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$.
  C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \sin x$.

Autres situations

- Limite égale à $-\infty$

Par définition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty} - f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$; cette notion n'intéresse que les fonctions définies sur un intervalle de type$]-\infty\,;\,a]$. $a \in \mathbb{R}$.

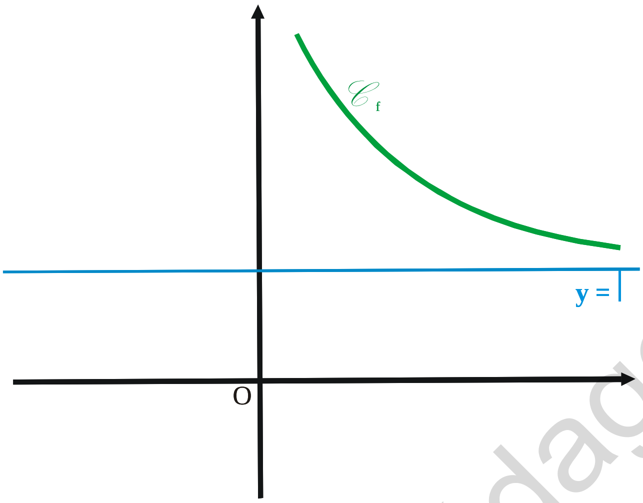
Il suffit de remarquer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

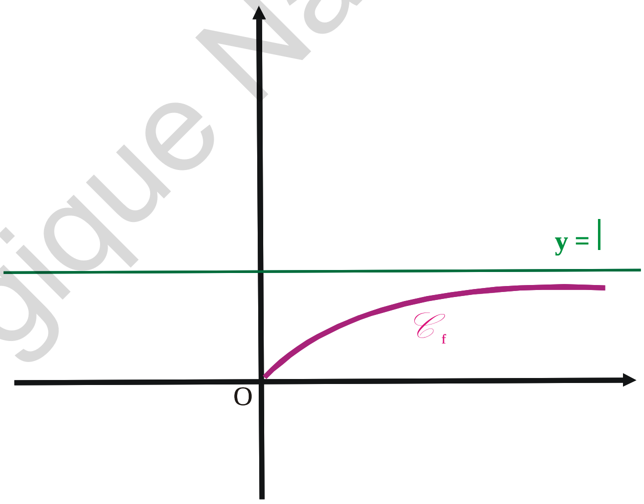
Exemple

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.
- Les fonctions : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$ tendent vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (fonction paire)

Remarque

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, on dit alors que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale de $\mathscr{C}_f$.





2. Limite en un réel a

a) limite nulle en 0

Exemple

les fonctions : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$ tendent vers 0 quand x tend vers 0.

b) limite finie en a

Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ c'est dire que $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - l| = 0$,

Ou encore $f(x) = l + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto a} \varphi(x) = 0$.

Le changement de variable x = a + h permet de se ramener à la recherche de la limite en 0.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = l$.

c) Limite infinie : asymptotes verticales

On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ lorsque pour tout A > 0 ;

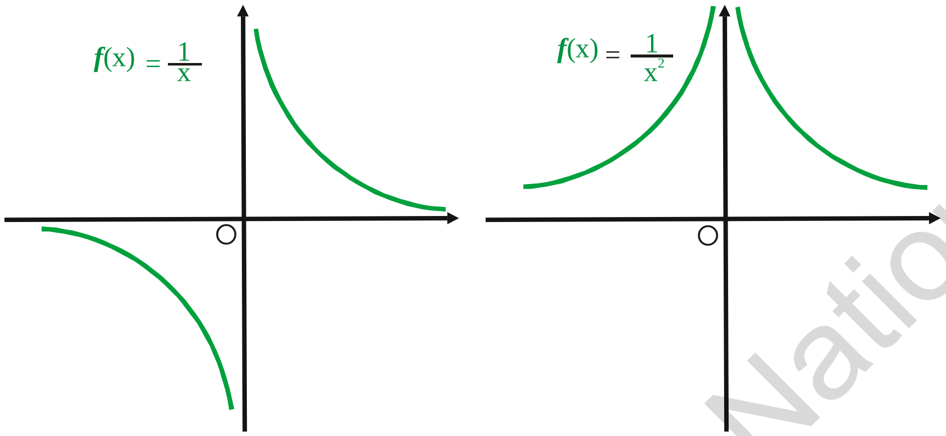
la valeur de f(x) dépasse A lorsque x est très proche de a.

Exemple

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ (limite à gauche) ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; (limite à doite).

Lorsque la fonction f admet une limite infinie en un point a, on dit que la droite Δ : x = a est une asymptote verticale de $\mathscr{C}_f$.

Exemple



3. Théorèmes de comparaison

a) Théorème de majoration, de minoration

Si pour x assez grand on a $f(x) \geq U(x)$ et si $\lim\limits_{x\leftarrow+\infty} U(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Si pour x assez grand on a $f(x) \leq U(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x + \sin x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\sin x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 - x$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- On a : $1 \leq 1 + x^2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \geq \dfrac{1}{x^2}$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$.

b) Théorèmes d'encadrements

Si pour x assez grand on a $|f(x) - l| \leq U(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$.

Alors, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemples

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (2 - x\cos\dfrac{1}{x})$.

- On a : $f(x) - 1 = \dfrac{\sin x}{x}$; d'où $|f(x) - 1| = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \dfrac{|\sin x|}{x}$; pour x > 0 ; et comme

  $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \dfrac{1}{x}$; pour x > 0. Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$.
- On a : $f(x) - 2 = -x\cos\dfrac{1}{x} \Rightarrow |f(x) - 2| = \left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|$, et comme

  $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow |(f(x) - 2)| \leq |x|$; et comme $\lim\limits_{x\mapsto 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = 0$.

c) Théorème des Gendarmes

Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$; avec $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = l$

Exemples

Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$; On a : $x^2 \le 1 + x^2 \le (1 + x^2)^2 \Rightarrow 1 \le f(x) \le 1 + \dfrac{1}{x}$; et comme on a :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = 1$.

d) Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(f + g)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(f \times g)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \ne 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$	$\times$

4. Continuité

Définition

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel. On dit que f est continue en x_0 si, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples

Les fonctions suivantes sont continues en tout point x_0 de leurs domaines de définitions :

- $x \mapsto k$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \cos$; $x \mapsto x$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sin x$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors les fonctions :

- $f + g$; $f \times g$; kf $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues en x_0.
- Si $g(x) \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ est continue en x_0 et si $f(x) \ge 0 \Rightarrow \sqrt{f}$ est continue en x_0

4. Prolongement par continuité

Soit f une fonction non définie en x_0, et ℓ un nombre réel tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$;

On appelle prolongement par continuité de f la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; \ x \in D_f \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$

Exemple

Un prolongement par continuité de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$ au point $x_0 = 1$ est tel que : on a :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$; donc la fonction

$\boldsymbol{g}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{f}(x) & ; \quad x \in D\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g}(1) = 1 & \end{cases}$ est un prolongement par continuité de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Savoir-faire

A. Applications

Limites d'une fonction polynôme à l'infini

Exercice 1.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction : $\boldsymbol{f}(x)= 3x^4 -2x^2$

Solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$; $\boldsymbol{f}(x)= 3x^4-2x^2 = 3x^4(1-\dfrac{2}{3x^2})$ et on a: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{2}{3x^2}) = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x) = +\infty$; Plus généralement, on a, la propriété suivante :

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Exercice 2.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle : $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{3x^2+2x^2}{-7x^5+11}$.

Solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$; $\dfrac{3x^4+2x^2}{-7x^5+11} = \dfrac{3x^4(1+\dfrac{2x^2}{3x^4})}{-7x^5(1-\dfrac{11}{7x^2})} = \dfrac{3x^4}{-7x^5} \times \dfrac{1+\dfrac{2x^2}{3x^4}}{1-\dfrac{11}{7x^5}}$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4}{7x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{7x} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{2x^2}{3x^4}}{1-\dfrac{11}{7x^5}} = 1$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4+2x^2}{-7x^5+11} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4}{-7x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{-7x} = 0$,

plus généralement, on a la propriété suivante :
La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Autres types de fonctions

Exercice 3.

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $\boldsymbol{f}(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et en 2 de la fonction $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-8}$.

Solution

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - (+\infty) =$; donc on ne peut pas conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2+1} + x \neq 0$; donc on peut écrire ;

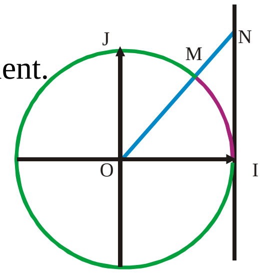
  $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x)\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = 0$.

- On a $\lim\limits_{x\to2} x^2 - 4 = 0$ et $\lim\limits_{x\to2} x^2 + 2x - 8 = 0$; donc on ne peut conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4 ;\ 2\}$;on a : $\dfrac{x^2\text{-}4}{x^2 +2x \text{-}8} = \dfrac{(x\text{-}2)(x\text{+}2)}{(x\text{-}2)(x\text{+}4)} = \dfrac{(x\text{+}2)}{(x\text{+}4)}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{(x+4)}=\dfrac{2}{3}$; donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 4.



L'objectif de cet exercice est d'établir des limites qui seront investies ultérieurement.

1) Soit $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, M son image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et N le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente de $\mathscr{C}$ en I.
Calculer en fonction de x les aires des triangles OIM et OIN,
ainsi que l'aire du secteur circulaire OIM.
En déduire que : $\sin x \le x \le \tan x$.

2) On suppose maintenant que $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

a) Démontrer que $|\sin x| \le |x|$,

en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = 1$, en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

3) On suppose maintenant que $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Démontrer que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$; en déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

b) Vérifier que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 . \dfrac{1}{1+\cos x}$,

en déduire que :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

c) Déterminer la limite en 0 de la fonction

$f(x) = \lim\dfrac{\cos x - 1}{x}$

Solution

1) $\mathscr{A}(\text{OIM}) = \dfrac{B\times h}{2} = \dfrac{1\times \sin x}{2} = \dfrac{1}{2}\sin x$; $\mathscr{A}(\text{OIN}) = \dfrac{B\times h}{2} = \dfrac{1\times \tan x}{2} = \dfrac{1}{2}\tan x$;

$\mathscr{A}(\widehat{\text{OIM}}) = \dfrac{x}{2\pi}\times \pi \times 1^2 = \dfrac{x}{2}$; $\mathscr{A}(\text{OIM}) \le \mathscr{A}(\widehat{\text{OIM}}) \le \mathscr{A}(\text{OIN}) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{2} \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\tan x}{2} \Leftrightarrow \sin x \le x \le \tan x.$

2) a) l'inégalité est évidente pour x = 0; pour $x \neq 0$; deux cas sont envisageables ;

- 1[er] cas : $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; d'après la question 1) ona : $0 \le \sin x \le x$; donc $|\sin x| \le |x|$.
- 2[ème] cas : $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0$; on a : $0 \le -x \le \dfrac{\pi}{2}$; donc ; d'après 1) on a : $|\sin(-x)| \le |-x| \Rightarrow |\sin(x)| \le |x|$;

On a ; $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ et $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$; $|\sin x| \le |x| \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0}\sin x = 0$. (Th. des Gendarmes).

b) On a $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x = \lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x) = 1$.On pose x = 2a ; on a : $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{a\to 0}\cos 2a = 1$

3) a) Deux cas sont à envisager :

- 1[er] cas ; $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; d'après la question 1) on a : $0 < \sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x} \le \dfrac{1}{\cos x}$; on en déduit que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{\cos x} \le 1$.
- 2[ème] cas ; $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$; $\Rightarrow$ $0 < -x < \dfrac{\pi}{2}$; d'après le cas précédent

$\cos(-x) \le \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \le 1$; on en déduit que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{\cos x} \le 1$;

on a : $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$; donc,d'après les théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

De plus ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$; donc, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$;

c) On a : $\dfrac{1-\cos x}{x} = x\dfrac{1-\cos x}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

B. Exercices

1. Soit la fonction $f(x) = x - \sqrt{x}$,
Démontre que $\forall x \in]4\ ;\ \infty[;\ f(x) > \sqrt{x}$.
2)a) Trouver un réel A pour lequel :
$x > A \Rightarrow f(x) > 10^4$
b) B étant un nombre réel strictement positif, trouve un réel A tel que $x > A \Rightarrow f(x) > B$.
c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \left|f(x) - 1\right| < \dfrac{1}{x}$,
2) a) Trouver un réel A pour lequel : $x > A \Rightarrow$
$\left|f(x) - 1\right| < 10^{-4}$.
b) ε étant u réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel $x > A \Rightarrow \left|f(x) - 1\right| < \varepsilon$
c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
1) Démontrer que : $\forall x \in \left]1\ ;+\infty\right[\ ;\ f(x) > \dfrac{x}{2}$
2) a) Comment choisir x pour que $\left|f(x)\right| > 10^6$?
b) Peut-on rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut ?
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

4. Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites des fonctions suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+\cos^2 x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1+\sin^2 x}$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{1+\sin^2 x}$

5. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$
Démontrer que $\forall x \in \left]1\ ;+\infty\right[\ ;\ f(x) > \sqrt{x} + 1$, en déduire la limite de f en $+\infty$.

6. Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$; b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$;
c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$; d) $f(x) = 4x^2 - 3x^2 + 2x$
e) $f(x) = -x^6 - x^2 + 4$; f) $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$;
i) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{1-2x}$; j) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{1-3x^2}$

7. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).
a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$;
b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$; $x_0 = -2$;
c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2}$; $x_0 = -1$;
d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}$; $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 0$;

8. Dans chacun des cas suivants étudier la limite de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).
a) $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $x_0 = 4$;
b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $x_0 = 2$
c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $x_0 = 0$;
d) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $x_0 = 4$;

9. Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}}{3x-1}$;b) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$;d) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$;f) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$.

10 Calculer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\tan x\right)$;
c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$
e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{5x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

g) $f(x)=\dfrac{4x-5}{x+4}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3-1}$;

11 Dans les deux cas suivants calculer la limite de f en 0.

a) $f(x)=\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.

12 Soit $f(x)=\dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$, ou E désigne la partie entière.

1) Démontrer que : $\forall x\in\left]0\,;1\right[\;;f(x)=0$, en déduire $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) Démontrer que : $\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[\;;0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

en déduire la limite de f en $+\infty$.

13 Soit la fonction : $f(x)=\dfrac{x+E(\sqrt{x})}{x}$;

1) Démontrer que :

$\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[\;;2\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x}$,

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

14 Dans chacun des cas, étudier la continuité de f en x_0.

a) $f(x)=3x^2-5x-7$; $x_0=2$

b) $f(x)=\sqrt{4-x}$; $x_0=4$,

c) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-7}{8x^2-5x+3}$; $x_0=1$,

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; $x_0=-2$.

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$; h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$

15 Etudier la continuité des fonctions en x_0.

a) $f(x)\begin{cases}x^2+4\;;x\leq2\\3x+2\;;x>2\end{cases}$; $x_0=2$

b) $f(x)\begin{cases}\dfrac{x+1}{2x+3}\;;x\leq0\\x^2+x+0\;;x>0\end{cases}$; $x_0=0$

16 Donner les prolongements par continuité éventuelle de f en x_0.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$; $x_0=2$

b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$; $x_0=0$

c) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $x_0=0$; d) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$; $x_0=0$

17 Vérifier que la fonction : $g(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Chapitre 4 Barycentre

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I) Barycentre de quatre points dans le plan ou dans l'espace

1) Définition

Soit A ; B ; C ; D quatre points dans le plan ou dans l'espace.
Soit α ; β ; δ ; θ quatre réels tels que : $\alpha+\beta+\delta+\theta \neq 0$.
Le point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}+\theta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ existe et est unique, on l'appelle barycentre du système
$\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\delta);(D;\theta)\}$.
On écrit :
$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$

2) Existence et unicité

- Le point $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$ existe si, et seulement si, $\alpha+\beta+\delta+\theta \neq 0$.
- $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$ si, et seulement si,
- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AC}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BC}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CB}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{DG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DC}$

3) Isobarycentre

Lorsque $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline t & t & t & t\end{array}$; $t \in \mathbb{R}^*$

Alors, G est appelé isobarycentre des points A ; B ; C et D.

4) Conservation du barycentre $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$

- En multipliant ou en divisant les masses α ; β ; δ ; θ par un même réel non nul, alors G est conservé.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2\end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\end{array}$

- Si une seulement des masses de G est nulle, alors G est un barycentre de trois points.

Exemple $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & 0 \end{array} = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array}$

- Si deux seulement des masses de G sont nulles, alors G est un barycentre de deux points.

Exemple $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & 0 & 0 \end{array} = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

- En remplaçant un groupe de points de G par leur barycentre partiel affecté de la somme non nulle de leurs masses, alors G est conservé.

Exemple $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}$; avec $I = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|} A & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ (barycentre partiel de G);

On a : $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|} I & B & D \\ \hline 3 & -1 & 3 \end{array}$; Avec $J = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|} B & D \\ \hline -1 & 3 \end{array}$ (barycentre partiel de G)

On a $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|} I & J \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

- En augmentant les points du barycentre G, sans changer la somme initiale des masses α ; β ; δ ; θ, alors, G est conservé.

Exemple $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} A & B & B & C & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$

$= \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|} A & B & C & D & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} A & B & C & D & E & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}$

5) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A ; B ; C ; D quatre points donnés dans le plan (ou dans l'espace)
Soit α ; β ; δ ; θ quatre réels donnés.
A tout point M du plan (ou de l'espace), on associe le vecteur : $\boldsymbol{f}(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \theta\overrightarrow{MD}$.
La fonction f ainsi définie est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système :
$\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\delta);(D;\theta)\}$.
En plus

Si,	**alors**
$\alpha + \beta + \delta + \theta \neq 0$	$\boldsymbol{f}(M) = (\alpha+\beta+\gamma+\theta)\overrightarrow{MG}$ avec, $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta \end{array}$ Exemple : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}$ avec ; $G = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}$
$\alpha + \beta + \delta + \theta = 0$	$\boldsymbol{f}$(M) est un vecteur constant, indépendant de M. C'est-à -dire : $\forall$ M, N : $\boldsymbol{f}$(M) = $\boldsymbol{f}$(N). Exemple : $\boldsymbol{f}(M) = \boldsymbol{f}(A) = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \theta\overrightarrow{AD}$

II) Barycentre de trois points

Soit A ; B ; C trois points dans le plan ou l'espace, Soit α ; β ; δ trois réels tels que : $\alpha + \beta + \delta \neq 0$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array} \Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \delta\overrightarrow{GC} = 0$$

- Si, l'une seulement des masses de G est nulle, alors G est le barycentre des deux autres points.

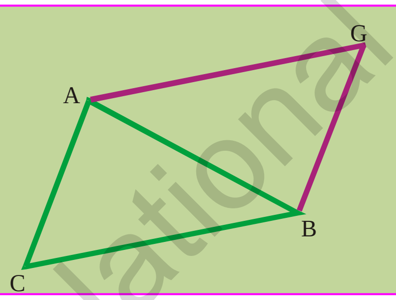
Exemple

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & 0 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$$

- Soit ABC un triangle,

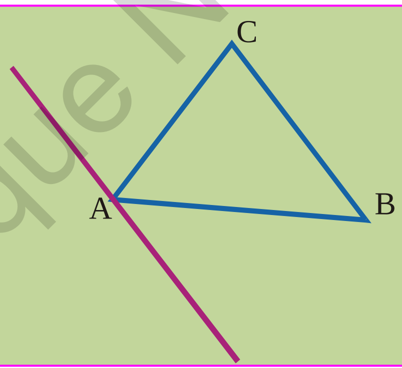
G ; A ; B ; C sont les sommets d'un parallélogramme sur lequel G est opposé à C, si et seulement si,

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$$



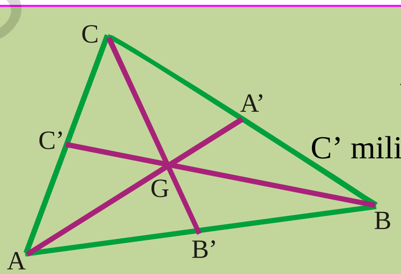
On a : $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & t & -t \end{array}$; $t \in R$

Si et seulement si,
G appartient à la parallèle à (BC) passant par A.



$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

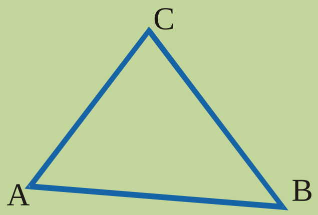
G est le point de concours des médianes (AA') ; 'BB') ; (CC') du triangle ABC ; $\Leftrightarrow$
G est le centre de gravité du triangle ABC.



A' milieu de [BC]
B' milieu de [CA]
C' milieu de [AB]

Soit $\mathscr{P}$ le plan (ABC) dans l'space.

$$\mathscr{P} = \left\{M \in \mathscr{E} \;/\; M = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array} ;\ \alpha + \beta + \gamma \neq 0\right\}$$



III) Barycentre de deux points

Soit A ; B deux points distincts donnés dans le plan ou dans l'espace,
Soit α ; β deux réels donnés tels que : $\alpha + \beta \neq 0$;

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; si, et seulement si ;

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \\ \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} \\ G;A;B \text{ sont alignés} \end{cases}$$

Egalités permettant de construire G.

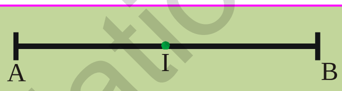
Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

- Un point G est aligné avec deux points A et B si, et seulement si,

$$G = \begin{array}{c|c} A & B \\ \alpha & \beta \end{array} \quad ; \quad \alpha+\beta \neq 0.$$

- [A ; B] est un segment de milieu I.

$\Leftrightarrow I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow B = \text{bar}\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 2 & -1 \end{array} \Leftrightarrow A = \text{bar}\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$



- Soit A et B deux points distincts dans le plan ou dans l'espace

$(AB) = \left\{M \;/\; M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \;;\; \alpha+\beta \neq 0\right\}$

$[AB] = \left\{M \;/\; M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \;:\; \alpha+\beta \neq 0 \text{ et } \alpha\times\beta \geq 0\right\}$

$[AB] = \left\{M \quad M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1-k & k \end{array} \;;\; k \in [0;1]\right\}$

- (AB) et (CD) sont sécantes en G, si et seulement si,

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \end{array} \;; \alpha_1+\beta_1 \neq 0$ **et** $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \end{array} \;;\; \alpha_2+\beta_2 \neq 0$

- (AB) ; (CD) et (EF) sont concourantes en G, si et seulement si,

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \end{array} \;; \alpha_1+\beta_1 \neq 0$ **et** $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \end{array} \;;\; \alpha_2+\beta_2 \neq 0$

et $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline \alpha_3 & \beta_3 \end{array} \;;\; \alpha_3+\beta_3 \neq 0$

IV) Coordonnées d'un barycentre

Soit $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta \end{array} \;;\; \alpha+\beta+\delta+\theta \neq 0,$

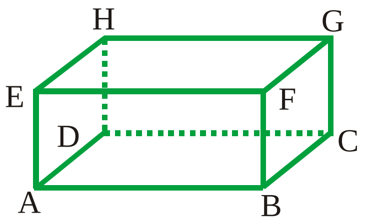
Dans le plan rapporté à un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$	Dans l'espace rapporté à un repère $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
$x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C+\theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C+\theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$	$x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C+\theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C+\theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $z_G = \dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C+\theta z_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$

Savoir-faire

A. Applications

Alignement de points

Exercice 1



ABCDEFGH est un pavé.
I est le centre de gravité du triangle BDE.
Montrer que les points A ; I ; G sont alignés.

Solution

Comme EFGH est un parallélogramme.
Donc,

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} E & F & H \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Or, ABFE et ADHE sont des parallélogrammes, d où

$$F = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & E \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & D & E \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} E & A & B & E & A & D & E \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \; ; \; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & D & E \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Donc

$$\text{Donc, } G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & I \\ \hline -2 & 3 \end{array}$$

Donc, les points A ; I ; G sont alignés.

Concours de droites

Exercice 2

ABCD un tétraèdre. ABPC, ABQD, ACRD sont des parallélogrammes.
1) Montrer que les droites (DP), (CQ) et (BR) sont concourantes.
2) Que peut-on dire des quadrilatères : DCPQ, DBPR, CBQR ?

Solution

Comme ABPC ; ABQD, ACRD sont des parallélogrammes.

$$\text{Donc, } P = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \; ; \; Q = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \; ; \; R = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

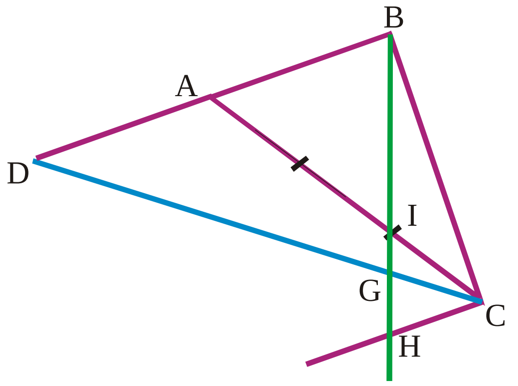
$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} D & P \\ \hline 1 & 1 \end{array} \; ; \; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} C & Q \\ \hline 1 & 1 \end{array} \; ; \; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} B & R \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

D’où $G \in (DP)$; $G \in (CQ)$; $G \in (BR)$.
Donc les droites (DP) ; (CQ) ; (BR) sont concourantes en G.
2) Comme G est le milieu des segments [DP] ; [CQ] et [BR],
Donc, PCQR ; DBPR ; CBQR sont des parallélogrammes.

Détermination des masses d’un barycentre

Exercice 3



ABC un triangle, $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D est le symétrique de B par rapport à A.
Les droites (BI) et (CD) se coupent en G.
La parallèle à (AB) passant par C, coupe (BI) en H.

1) Déterminer des réels α_1 ; β_1 ; γ_1 tels que :

$$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \end{array}$$

2) Déterminer des réels α_2 ; β_2 ; γ_2 tels que : $H = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{array}$

3) Déterminer l’ensemble des points M du plan tels que :

$$2\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) Déterminer l’ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

Solution

1) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, donc, $I = \text{bar} \begin{array}{c|c|} A & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

Comme A milieu de [BD], donc $D = \text{bar} \begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$

Or, G $\in$ (IB), donc $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|} I & B \\ \hline 3 & \beta \end{array}$ donc, $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & \beta & 2 \end{array}$

Or, G$\in$ (CD), donc $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|} C & D \\ \hline \delta & 1 \end{array}$ donc, $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 2 & -1 & \delta \end{array}$

Donc, $\frac{2}{1} = \frac{-1}{\beta} = \frac{\delta}{2}$, donc ; 2β = -1 d’où $\beta = -\frac{1}{2}$.

Donc; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 2 & \frac{-1}{2} & 2 \end{array}$; Donc $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 4 \end{array}$

2) Comme H $\in$ (BI), Donc; $H = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & t & 2 \end{array}$

Or ; H $\in$ la parallèle à, (AB) passant par C.

Donc ; 1 + t = 0 ; d’où t = -1. Donc; $H = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 2 \end{array}$

3) $2\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow$

$2\left\|(2-1+4)\overrightarrow{MG}\right\| = 5\left\|(1-1+2)\overrightarrow{MH}\right\| \Leftrightarrow$

$2 \times 5 \times MG = 5 \times 2 \times MH \Leftrightarrow$
MG = MH
Donc, l’ensemble demandé est la médiatrice du segment [GH].

4) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$

$(2-1+4)\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BB} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$

$5\overrightarrow{MG}$ est colinéaire $(1+2)\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MG}$ est colniéaire $\overrightarrow{BI}$.

Donc l’ensemble demandé est la droite (IB).

B. Exercices

1. (AB) est une droite, I ; J ; K les points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1) Faire une figure.
2) Compléter les tableaux :

$I=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline &\end{array}$; $J=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline &\end{array}$; $K=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline &\end{array}$

2. (AB) une droite, I ; J ; K les points tels que :

$I=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline 2&2\end{array}$; $J=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline 2&-1\end{array}$; $K=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline 1&3\end{array}$

$L=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline -1&2\end{array}$

1) Comment sont les points I ; J ; K ; L.
2) Faire une figure.
3) Montrer que I est le milieu de [JL].

3. [AB] un segment de milieu I.

$C=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline \mathbf{2}&\mathbf{3}\end{array}$; $D=\text{bar}\begin{array}{c|c|}A&B\\ \hline \mathbf{3}&\mathbf{2}\end{array}$

1) Faire une figure.
3) Montrer que I est le milieu de [CD].

4. ABC un triangle. Construire les points :

$G=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{array}$; $H=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{array}$

$E=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{array}$; $F=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline \mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\end{array}$

5. ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{CK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure.
2) Compléter les tableaux :

$I=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline &&\end{array}$; $J=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline &&\end{array}$;

$K=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline &&\end{array}$

6. MED un triangle de centre de gravité G, Z ; A ; H les points tels que :

$\overrightarrow{MZ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{DH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DM}$

1) Faire une figure.
2) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ZAH.

7. MEDOU une pyramide de sommet M, de base un parallélogramme EDOU de centre I, J et K les centres de gravités respectifs des triangles MED et MOU.
Montrer que les droites (MI) et (JK) sont sécantes .

8. ABCD un tétraèdre I ; J ; K ; L ; M sont les milieux respectifs de [AB] ; [BD] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; [CA].
Montrer que les droites (IL) ; (JN) ; (KM) sont concourantes.

9. ABC un triangle. G et H les points tels que:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BH}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A ; G ; H sont alignés.

10 ABCD un carré de centre O, I et J les points tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}$.

E le symétrique de C par rapport au milieu de [AB].

1) Déterminer $\text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A&B&C&D\\ \hline 1&1&1&1\end{array}$

2)Construire $G=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A&B&C&D\\ \hline 2&1&1&5\end{array}$

3) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que :
$9\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|$

4) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}\right\|$

11 ABCD un carré.
E est le symétrique de C par rapport à D.
1) Déterminer des réels α ; β ; γ tels que :

$E=\text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A&B&C\\ \hline \alpha&\beta&\delta\end{array}$

2) Soit F le symétrique de C par rapport à B.
Montrer que A est le milieu de [EF].
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :
$\left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

12 ABC un triangle, I ; J les points tels que

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BL}$.

Les droites (IC) et (JA) se coupent en G.
1) Faire une figure.

2) Déterminer des réels α ; β ; γ tels que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta\end{array}$$

3) La droite (BG) coupe (AC) en K, déterminer la position de K sur la droite (AC).

13 ABCD un carré de centre O.
Dans chacun des cas suivants, simplifier le vecteur proposé.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$; $-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

15 ABCD un carré. I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; G est le centre de gravité du triangle ABC.
Préciser chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

15 ABC un triangle. I un point tel que :

$\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en G.
Faire une figure
Déterminer des réels α ; β ; γ tel que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta\end{array}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| \leq \frac{3}{4}\left\|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$$

Chapitre **5** # Dérivation & primitives

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Dérivation en un point

1) Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I, on dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

On a , alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Remarque

On peut également poser h = x - x_0, lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0.

On a, donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Exemple

Soit la f fonction définie par $f(x) = x^2$, étudions la dérivabilité de f en x_0 = -1.

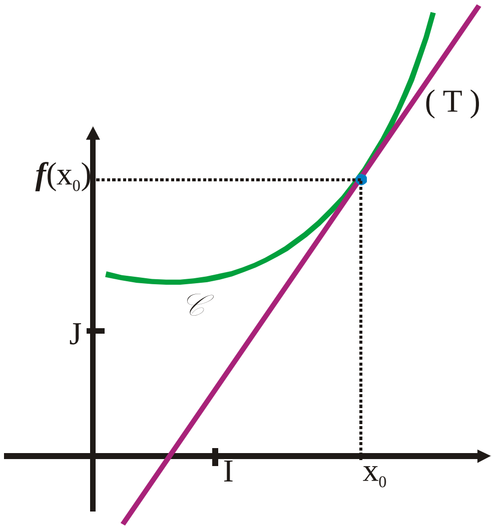
On a : $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = (x-1)$, d'où $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-1) = -2$,

La fonction f est donc, dérivable en -1 et $f'(-1) = -2$.

Interprétation graphique

Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente (T) en A, dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.
Une équation de (T) est donc :

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.
Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse $x_0 = 2$.

On a : $f(2) = 4 + 2 - 3 = 3$;

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+x-3)-4-2+3}{x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$;

d'où $f'(2) = 5$.

Donc, l'équation de la tangente est : $y - 3 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 7$.

2) Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite

Définitions : Soit ***f*** une fonction définie en x_0.

a) On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si ***f*** est définie sur un intervalle de la forme] a ; x_0] et $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de ***f*** à gauche en x_0.

b) On dit que ***f*** est dérivable à droite en x_0, si ***f*** est définie sur un intervalle de la forme] x_0 ;b] et $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0.

Exemple

Soit ***f*** la fonction définie par $f(x)=|x^2-1|$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Etudions la dérivabilité de ***f*** en 1.

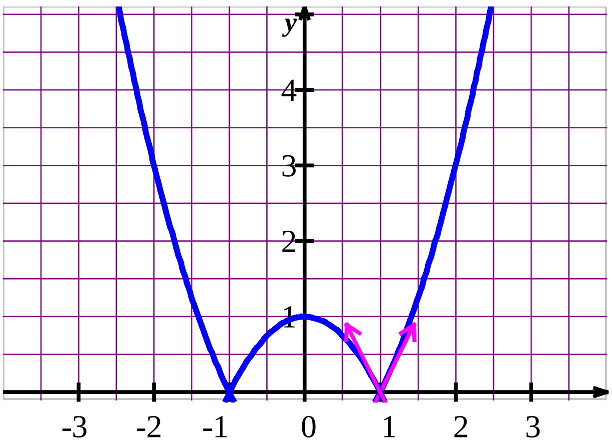
$f(1) = 0$; $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$; ce rapport est égal à : $\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} & ;\ \text{si } x\in\,]-\infty;-1]\cup]1;\infty[\\ -\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} & ;\ \text{si } x\in[-1;1[\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x+1) & ;\ \text{si } x\in\,]-\infty;-1]\cup]1;\infty[\\ -(x+1) & ;\ \text{si } x\in[-1;1[\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2$ d'où $=f_g'(1)=-2$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$, d'où $f_d'(1)=2$.

Donc, ***f*** est dérivable à gauche en 1 et admet -2 pour nombre dérivé à gauche en 1.
Elle est aussi, dérivable à droite en 1 et admet 2 pour nombre dérivé à droite en 1.

$\mathscr{C}$ admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1, de coefficient directeur -2.
Elle admet aussi, une demi-tangente à droite au point d'abscisse 1, de coefficient directeur 2.



Propriété

Une fonction ***f*** est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

Exemple

Soit ***g*** la fonction définie par : $\begin{cases}(x+1) & ;\ \text{si } x\in\,]-\infty;-1]\cup]1;\infty[\\ -(x+1) & ;\ \text{si } x\in[-1;1[\end{cases}$

- A gauche de 1 ; $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$;

  d'où $g_g'(1) = 2$.

- A droite de 1 ; $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{2-\frac{2}{x}}{x-1}=\frac{2x(x-1)}{(x-1)}=2x \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}2x=2$;

  d'où $g_d'(1)=2$;

L'égalité des deux nombres dérivés prouve la dérivabilité de g en 1.

Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;x_0]$ ou $[x_0\,;b[$.

Si , $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse x_0.

Exemple

Le repère (O ; I ; J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative :

On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$; d'où $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

$\mathscr{C}$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

3. Fonction dérivées

Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable, sur un intervalle I, lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

La fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée dérivée de f est notée f '.

Exemples

- Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2$, soit x_0 un nombre réel quelconque.

  Etudions la dérivabilité de f en x_0.

  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)}=(x+x_0)$; $\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$

  Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x)=2x$

- Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$, soit x_0 élément de $]0\,;+\infty[$.

  $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \Rightarrow$

  $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$; donc g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

II. Calculs des dérivées

1. Dérivées des fonctions usuelles

- Fonction : $f \; x \longmapsto k \; (k \in \mathbb{R})$,

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{k-k}{x-x_0} = \dfrac{0}{x-x_0} = 0$; d'où $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$,

- La fonction $f \; x \longmapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f\,'(x) = 0$

- Fonction : $f \; x \longmapsto x$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout réel $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$,

La fonction $f \; x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f\,'(x) = 1$

- Fonction : $f \; x \longmapsto x^2$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout réel $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)} = (x+x_0)$;

$\lim\limits_{x \to x_0}(x+x_0) = 2x_0$

La fonction $f \; x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f\,'(x) = 2x$

- Fonction : $f \; x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ / $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{-(x-x_0)}{(x-x_0)xx_0} = -\dfrac{1}{xx_0}$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-1}{xx_0} = \dfrac{-1}{x_0^2}$

La fonction $f \; x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f\,'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

- Fonction : $f \; x \longmapsto \sqrt{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ / $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} ; \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction $f \; x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Fonctions : $f \; x \longmapsto \sin x$ et $f \; x \longmapsto \cos x$

La fonction $f : x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \cos x$
La fonction $f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\sin x$

II.2 Dérivées et opérations sur les fonctions

Dérivée de la somme de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, $f\,'$ et $g\,'$ leurs dérivées respectives.

La fonction $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ est dérivable sur I et on a : $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$

Exemples

Soit la fonction U définie par : $U(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Posons $\boldsymbol{f}(x) = x^2$; et $\boldsymbol{g}(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $\boldsymbol{f}'(x) = 2x$; $\boldsymbol{g}'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

U est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $U'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$.

Dérivée du produit de deux fonctions

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, $\boldsymbol{f}'$ et $\boldsymbol{g}'$ leurs dérivées respectives.

La fonction $\boldsymbol{f} . \boldsymbol{g}$ est dérivable sur I et on a : $(\boldsymbol{f} . \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{g}'$

Cas particuliers

- Si, $\boldsymbol{g}$ est la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), on $\boldsymbol{g}'(x) = 0$;
  On en déduit que $(k\boldsymbol{f})' = k . \boldsymbol{f}'$
- Si, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ on a : $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{g}'$, on en déduit que $(\boldsymbol{f}^2)' = 2\boldsymbol{f}'.\boldsymbol{f}$.

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies par $\boldsymbol{f}(x) = x^2\cos x$ et $\boldsymbol{g}(x) = 5x^2$.

$\boldsymbol{f}'(x) = (x^2)'.\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$;

$\boldsymbol{g}'(x) = 5(x^2)' = 5 \times 2x = 10x$.

Dérivée de la puissance d'une fonction

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $\boldsymbol{f}^n$ est dérivable sur I et on a $(\boldsymbol{f}^n)' = n.\boldsymbol{f}'.\boldsymbol{f}^{n-1}$.

Exemple

- Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par $f(x) = x^n$ (n entier et $n \geq 2$),
  $\boldsymbol{f}'(x) = (x^n)' = n(x)'.x^{n-1} = n(1)\,x^{n-1}$.
- Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = \cos^3 x$
  $\boldsymbol{g}'(x) = (\cos^3 x)' = 3(\cos x)'(\cos^2 x) \Rightarrow \boldsymbol{g}'(x) = -3\sin x\cos^2 x$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soit $\boldsymbol{g}$ une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour $x \in I$, $\boldsymbol{g}(x) \neq 0$.

La fonction $\dfrac{1}{\boldsymbol{g}}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{g}}\right)' = \dfrac{-\boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^2}$.

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $\boldsymbol{f}'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Dérivée du quotient de deux fonctions

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^2}$.

Exemple

f est une fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{2x^2+1}$,

$$f'(x) = \frac{(1-x)'(2x^2+1)-(1-x)(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2} = \frac{-1(2x^2+1)-(1-x)(4x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^2-4x-1}{(2x^2+1)^2}.$$

Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, tel que, pour $x \in I$, $f(x) > 0$.

> La fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Dérivée de la fonction $f(ax + b)$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $f : x \longmapsto ax + b$ ($a \neq 0$)

Une fonction affine et J l'image réciproque de I par cette fonction.

> La fonction : $x \longmapsto ax + b$; est dérivable sur J et on a $(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$;

$f'(x) = 2 \times (-)\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = -2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

3 .Tableau récapitulatif

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

f	f'
U + V	U' + V'
kU	kU'
UV	U'V + UV'
$\dfrac{1}{V}$	$\dfrac{-V'}{V^2}$
$\dfrac{U}{V}$	$\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$
U^n	$nU'U^{n-1}$
$\sqrt{U}$	$\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$x \longmapsto U(ax+b)$	$x \longmapsto aU'(ax+b)$

III. Applications de la dérivation

1. Sens de variation

Théorème (admis)

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- ***f*** est croissante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est positive sur I,
- ***f*** est décroissante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est négative sur I,
- ***f*** est constante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est nulle sur I,

Exemple

Soit f la fonction définie par : f(x) = x3 -3x -1, ***f*** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

f'(x) = $3x^2$ -3= $3(x^2 -1)$= 3(x – 1) (x +1).

$\forall$ x $\in$]-∞ ; -1[$\cup$]1 ; +∞[, ***f***'(x) > 0, donc ***f*** est croissante, $\forall$ x $\in$[-1 ; 1], donc ***f*** est décroissante, on en déduit le tableau de ***f*** que l'on complète en calculant ***f*** (1)= 1 et ***f*** (-1)= -3

x	-∞		-1		1		+∞
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	1	↘	-3	↗	

2. Extremum relatif d'une fonction

Propriété (admise)

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle] a ; b[et $x_0 \in$] a ; b[, si ***f*** 's'annule et change de signe en x_0, alors ***f*** admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
f '(x)		+		-	
f(x)		↗	M	↘	

x	a		x_0		b
f '(x)		-		+	
f(x)		↘	m	↗	

f admet un maximum relatif M en x_0

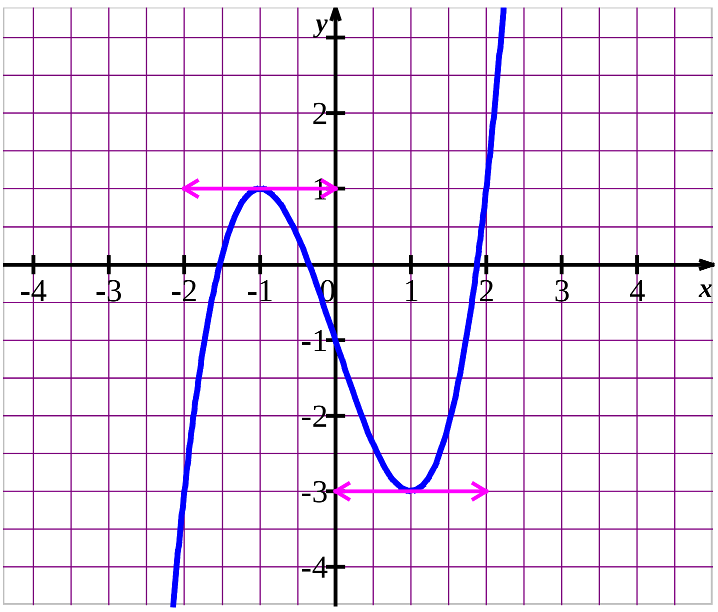
f admet un minimum relatif m en x_0

Exemple

la courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction ***f*** de l'exemple précédent :

f (x) = x^3 -3x -1.

- ***f*** ' s'annule et change de signe en (-1) et en (1).
- ***f*** admet un maximum relatif (1) en (-1) et un minimum relatif (-3) en (1).



VI. Primitive d'une fonction

1. Définition

Soit deux fonctions ***f*** et ***F*** dérivables sur un intervalle I.
La fonction F est une primitive de ***f*** sur I si pour tout x $\in$ I : ***F***'(x) = ***f***(x).

Exemples

- La fonction ***F*** : $x \longmapsto 3x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction ***f*** : $x \longmapsto 3$.
- La fonction ***F*** : $x \longmapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction ***f*** : $x \longmapsto 2x$
- La fonction ***F*** : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une primitive sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ de la fonction ***f*** : $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$
- La fonction ***F*** : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction ***f*** : $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Ensemble de primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit ***F*** une primitive sur l'intervalle I de la fonction ***f***,
pour tout x de I, ***F***'(x) = ***f*** (x).
Si k est un réel, la fonction ***G*** définie sur I par :
G(x) = ***F***(x) + k est dérivable sur I et ***G***'(x) = ***F***'(x) = ***f***(x).
Donc ***G*** est une primitive de f sur I.

Réciproquement,

Si ***F*** et ***G*** sont deux primitives de ***f*** sur I, la fonction ***H*** = ***G*** – ***F*** est dérivable sur I ;
H '(x) = ***G*** '(x) – ***F***'(x) = ***f*** (x) – ***f*** (x) = 0; il existe donc un réel k tel que :
H(x) = k $\Leftrightarrow$ ***G***(x) –***F***(x) = k $\Leftrightarrow$ ***G***(x) = ***F***(x) + k.

D'où le théorème suivant :

Si ***F*** est primitive de ***f*** sur un intervalle I, toute autre primitive ***G*** de ***f*** est telle que pour tout x de I :
G(x) = ***F***(x) + k où k est une constante.
Ainsi, toute les primitives de $x \longmapsto 2x$ sont les fonctions : $x \longmapsto x^2 + k$.

3. Tableau de primitives usuelles

Fonction ***f***	Primitive ***F***	Sur I
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$;	$\tan x + k$	$\cos x \neq 0$
$\sin(ax + b)$; $a \neq 0$; $\cos(ax + b)$; $a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b)$ $\frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{U'(x)}{(U(x))^2}$	$\frac{-1}{U(x)}$	$U(x) \neq 0$

$\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}$	$U(x) > 0$

Savoir-faire

A. Application

Dérivation en un point

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 1$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $x_0 = 2$

Solution

a) $f(1) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$; donc, $f'(1) = 1$, d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$;

b) $f(2) = 3$;

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\frac{x-1}{x-1}-3}{x-2} = \frac{x+1-3x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{(x-1)};$$

$f'(2) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2}{x-1} = -2$; d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y - 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$;

Exercice2.

On considère la fonction f définie par $f(x) = |x-2|$.

a) Donner l'expression de la fonction f sans le signe de la valeur absolue ; b) Etudier la dérivabilité de f en 2.

Solution

a) $\begin{cases} f(x) = -x+2 & ; \text{ si } x < 2 \\ f(x) = x-2 & ; \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$; $f(2) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x+2}{x-2} = -1$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2} = 1$.

f est dérivable à gauche en 2 et $f_g(2) = -1$; f est dérivable à droite en 2 et $f_d(2) = 1$.

Calcul de dérivées

Exercice3.

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants : a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$;

b) $f(x) = x\cos x$; c) $\dfrac{2-3x}{x^2-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x(3-x)}$; e) $f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{2})$;f) $\dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$; **g)** $(2x^2 + 3x)^2$

Solution

Fonction	Dérivée
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$	$f'(x) = 12x^2 - 10x$
$f(x) = x\cos x$	$f'(x) = (x)'.\cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x\sin x$
$f(x) = \dfrac{2-3x}{x^2-1}$	$f'(x) = \dfrac{-3(x^2-1)-2x(2-3x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-3x^2+3-4x+6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$
$f(x) = \sqrt{x(3-x)}$	$f'(x) = \dfrac{(3x-x^2)'}{2\sqrt{3x-x^2}} = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$
$f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{2})$	$f'(x) = 3\cos(3x - \dfrac{\pi}{2})$
$f(x) = \dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$	$f'(x) = \dfrac{(4x+7)(x+3)-1(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2} = \dfrac{4x^2+19x+21-2x^2-7x-4}{(x+3)^2}$

$f(x) = \dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$ $f(x) = (2x^2+3x)^4$	$f'(x) = \dfrac{2x^2+12x+17}{(x+3)^2}$ $f'(x) = 4(4x+3)(2x^2+3x)^3$

Applications de la dérivation

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 - 1$.
Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation, citer les extremums relatifs de f

Solution

$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x-1)(2x+1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

$f(0) = -1$; $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{-9}{8}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{-9}{8}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\frac{-9}{8}$	$\nearrow$	

- f' s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$.
- f admet un maximum relatif (-1) en 0 et en minimum relatif ($\frac{-9}{8}$) en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Primitives d'une fonction

Exercice 5.

Déterminer sur l'intervalle I une primitive F de la fonction f dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = 3x - 4$; I = ; $\mathbb{R}$ b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$; I = $\mathbb{R}$ c) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$; I = $]0; +\infty[$;

d) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$; I = $\mathbb{R}$ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; I = $]1; +\infty[$ f) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$; I = $\mathbb{R}$.

Solution

Fonction	Primitive
$f(x) = 3x - 4$	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$
$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$	$F(x) = \frac{-2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$
$f(x) = \frac{-2}{x^2}$	$F(x) = \frac{2}{x}$
$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x^2+1}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;	$F(x) = 2\sqrt{x-1}$
$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$;	$F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

B. Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction ***f*** en x_0.

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$; $x_0 = \frac{-1}{2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2x+5}$; $x_0 = -\frac{1}{2}$

e) $f(x) = 3 + 2x - 4x^2$; $x_0 = 0$;

f) $f(x) = x^3 + 1$; $x_0 = -1$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ***f*** au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$; $x_0 = \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}$; $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt{2x-3}$; $x_0 = 2$;

e) $f(x) = x^3$; $x_0 = \frac{1}{2}$;

f) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = -2$.

3. Soit ***f*** la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.
$\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
a) Déterminer l'ensemble de définition de ***f*** .
b) Calculer le nombre dérivé de ***f*** en en 2.
c) Calculer le nombre dérivé de ***f*** en 0 et donner une équation de la demi-tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Soit ***f*** la fonction définie par $f(x) = x|x - 3|$
a) Calculer le nombre dérivé de ***f*** à droite et à gauche en 3.
f est-elle dérivable en 3.
b) Etudier la dérivabilité de ***f*** en 0.

5. Soit ***f*** la fonction définie par :

Démontrer que ***f*** est continue en 1.
Etudier la dérivabilité de ***f*** en 1.
Déterminer une équation de la demi-tangente à droite et une équation de la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de ***f*** au point d'abscisse 1.

Dans les exercices 6 à 15, déterminer le (ou les) intervalle(s) :de sur le(s)quel(s) chacune des fonctions suivantes est dérivable, et expliciter la dérivée

6. a) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$; b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$;
c) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$; d) $f(x) = -2x^3 + x^2$;
e) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x}$; f) $f(x) = x - 1 + \sqrt{x}$;

7. a) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$; b) $f(x) = (5x-4)(1-\frac{x}{2})$
c) $f(x) = (2x^2+1)(3x-1)$; d) $f(x) = (2x^2+5)^3$
e) $f(x) = (x^2 + x)\cos^2 x$.

8. a) $f(x) = (x^3-x)(x-9)$; b) $f(x) = \sqrt{x}\,(3 - 4x)$
c) $f(x) = -x + (1-x)(3-x)$; d) $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(3x - 1)$

9. a) $f(x) = (0{,}5 - \frac{x}{10})^2$; b) $f(x) = (3x - 1)^5$
c) $f(x) = x^2(1 - \sqrt{x})$; d) $f(x) = (\frac{1}{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)$

10 a) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$; b) $f(x) = \frac{3x-7}{2-5x}$
c) $f(x)\ \frac{1}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

11 a) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$; b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
c) $f(x)\ 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

12 a) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$; b) $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-3}$
c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; d) $f(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \ ; \text{ si } \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \ ; \text{ si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

14 a) $f(x) = -\cos x + \sin x$; b) $f(x) = \sin^2 x$
c) $f(x) = \cos^2 x$; d) $f(x) = \cos x \sin x$.

15 a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

16 Soit f la fonction définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ / ; a ; b ; c des réels donnés avec $a \neq 0$.
Déterminer a ; b et c sachant que : $f(0) = 4$; $f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.

17 Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{3-x}$.

a) Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$; $f'(2) = 0$.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de f.

18 Dans chacun des cas suivants, préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction f est dérivable et exprimer sa dérivée ;

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

c) $f(x) = \sin 2x$; d) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

e) $f(x) = \sin(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3})$; f) $f(x) = c\cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$.

g) $f(x) = \sin\cos 3x$; h) $f(x) = 2\cos^2(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{4})$.

19 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.
a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2-x}$; d) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 11x - 2}{x-3}$

20 Soit ABCD un rectangle de périmètre P.
on désigne par x la longueur du côté [AB].
1 a) Calculer, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle ABCD.
c) Etudier les variations de la fonction :

13 a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x + \sqrt{x}}$; d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$

21 Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants et préciser sur quel intervalle.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 1$; b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2 - x + 1)^2}$; d) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{3x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 2}{x^2}$; f) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 6}}$.

22 Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = 2x(x^2 + 9)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^5}$

c) $f(x) = x(x^2 + 1)^2$; d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3 - 1)^2}$

e) $f(x) = (3x-1)(\dfrac{3}{2}x^2 - x + 4)^5$;

f) $f(x) = (\dfrac{1}{x} + x)^7(\dfrac{1}{x^2} - 1)$.

23 Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = \sin(2x - \dfrac{\pi}{3})$; b) $f(x) = \cos(\dfrac{\pi}{4} - 3x)$

c) $f(x) = \sin^3 x \cos x$; d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$; f) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$.

24 f est la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

a) Déterminer des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 1\}$; $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

b) Déduisez- en une primitive de f sur. $\in \mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 1\}$

25 Soit $f(x) = (x + 4)\sqrt{x+4}$.
Donner la dérivée de cette fonction, puis déduire une primitive sur] -4 ; $+\infty$[de la fonction :
$x : \longmapsto \sqrt{x+4}$

$x : \mapsto \mathscr{A}(x)$

2) En déduire que l'aire d'un rectangle de périmètre constant est maximale lorsque ce rectangle est un carré.

Chapitre 6 # Produit scalaire

Faire savoir

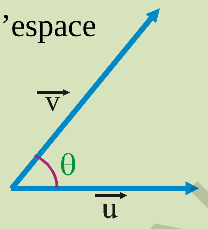
L'essentiel du chapitre

I. Expression dans le plan ou dans l'espace

1) Expression à l'aide des normes et de l'angle géométrique de deux vecteurs

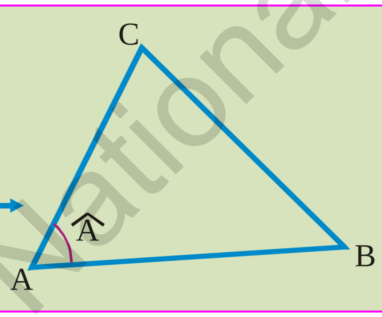
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\widehat{(\vec{u}\,;\,\vec{v})} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$



Avec un triangle du plan ou de l'espace

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{A}$



2) Expression dans un repère orthonormal

Dans le plan	Dans l'espace
Si : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, alors $\vec{u}.\vec{v}$ = x.x' + y.y'	Si : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$, alors $\vec{u}.\vec{v}$ = x.x' + y.y'+ z.z'

II- Propriétés

1) Calcul

Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans le plan ou dans l'espace ;

- $\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace ;

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ du plan ou de l'espace, et pour tout réel α et β

- $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$ **Par exemple** : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta\,(\vec{u}\,\vec{v})$ **Par exemple** : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{AB}\right).\left(-\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}\right)$
- $\vec{u}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) + \beta(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

2) Carré scalaire d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan ou de l'espace,

- $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$ (carré scalaire de $\vec{u}$) ; pour tout point A et B du plan ou de l'espace, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$;

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace,

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ du plan ou de l'espace et pour tout réel α,

- $(\alpha\vec{u})^2 = \alpha^2\|\vec{u}\|^2$; $(-\vec{u})^2 = \vec{u}^2$,

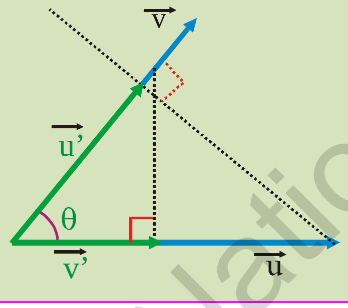
Pour tout point A et B du plan ou de l'espace,

- $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BA}^2 = AB^2 = BA^2$

3) Une opération qui conserve $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans le plan des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

En remplaçant l'un des vecteurs de $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ par son projeté orthogonal sur la droite portant l'autre,

alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est conservé.



- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,\vec{v}'$ (avec $\vec{v}'$ projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite portant $\vec{u}$),
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}'.\,\vec{v}$ (avec $\vec{u}'$ projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite portant $\vec{v}$),

Exemple

ABCD un rectangle dans le plan ou dans l'espace.

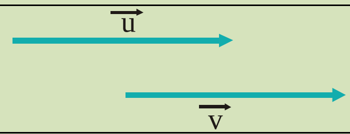
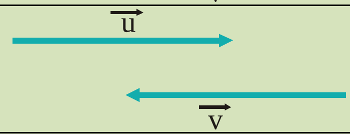
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB}$

$= -AB^2$.

III- Vecteurs colinéaires

Soiti $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace ;

On a	Si, et seulement si ,	Illustration
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\lvert\vec{u}.\vec{v}\rvert = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	

Exemple

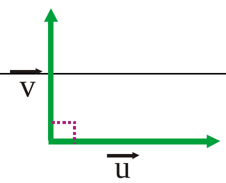
[AB] un segment de milieu I,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AI}\| = AB \times AI = \frac{1}{2}AB^2 = 2AI^2$;

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{IB}\| = -IA \times IB = -IA^2 = -IB^2 = -\frac{AB^2}{4}$.

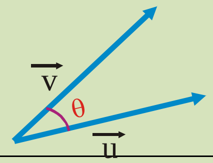
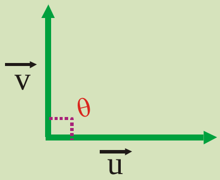
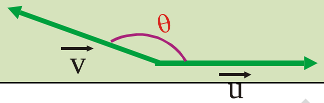
IV- Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan



ou dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
si, et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

En plus

On a	Si, et seulement si ,
$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$	θ est aigu $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ 
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$	θ est droit $\theta = \frac{\pi}{2}$ 
$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$	θ est obtus $\theta \in]\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$ 

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{v} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$$

IV- Des applications analytiques

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère othonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, (l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

1) Droite définie par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux dans le plan

(d) est la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq 0)$ $\Leftrightarrow$
(d) = $\{M \in \mathscr{P} \,/\, \overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}\}$.

(d) est droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(\vec{n} \neq 0)$ $\Leftrightarrow$

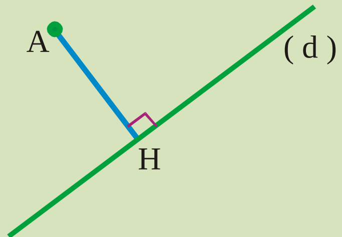
(d) a une équation cartésienne de la forme : ax +by + c = 0 ; avec c $\in \mathbb{R}$.

(d_1) droite de vecteur normal $\vec{n}_1$
(d_2) droite de vecteur normal $\vec{n}_2$
(d_1) // (d_2) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ colinéaire à $\vec{n}_2$.
(d_1) $\perp$ (d_2) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

2) Distance d'un point à une droite dans le plan

Si, (d) est une droite dont l'équation cartésienne est :
ax + by + c = 0 . A un point de coordonnées (x_0 ; y_0),
alors, la distance de A à (d) est AH,
avec H projeté orthogonal de A sur (d).

Cette distance est égale à : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



3) Représentation paramétrique d'un cercle dans le plan

Soit $\mathscr{C}_1$ un cercle de centre O et de rayon R (R< 0),

$\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \; ; \; t \in [0\; ;\; 2\pi[$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathscr{C}_1$.

Soit $\mathscr{C}_2$ un cercle de centre $\Omega(x_0\; ;\; y_0)$ et de rayon R(R> 0).

$\mathscr{C}_2$ est l'ensemble des points M(x ; y) dans le plan tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \; ; \; t \in [0\; ;\; 2\pi[.$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathscr{C}_2$.

4) Plan défini par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux dans l'espace $\mathscr{E}$

$\mathscr{P}$ est le plan contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq 0) \Leftrightarrow$
$\mathscr{P} = \{M \in \mathscr{E} \,/\, \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\}$.

$\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $(\vec{n} \neq 0) \Leftrightarrow$

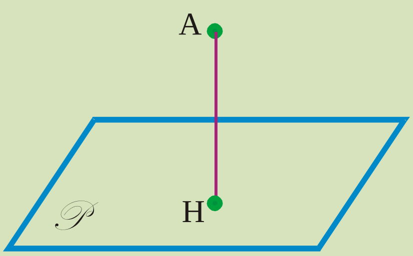
$\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme : ax +by +cz + d = 0, avec $d \in \mathbb{R}$.

$\mathscr{P}_1$ plan dont de vecteur normal $\vec{n}_1$;
$\mathscr{P}_2$ plan dont de vecteur normal $\vec{n}_2$;

- $\mathscr{P}_1 \,//\, \mathscr{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1$ colinéaire à $\vec{n}_2$.
- $\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \,.\, \vec{n}_2 = 0$.

5) Distance d'un point à un plan dans l'espace

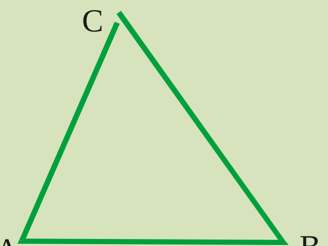
Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation cartésienne
ax +by + cz + d = 0.
A un point de coordonnées $(x_0\; ;\; y_0\; ;\; z_0)$,
alors ; la distance de A à $\mathscr{P}$ est AH
avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$,
et elle est égale à : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



V- Des relations métriques dans un triangle dans le plan ou dans l'espace

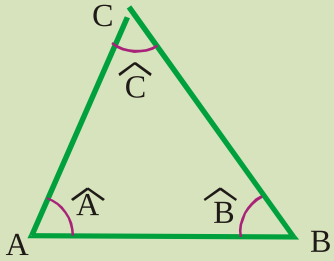
1) Des produits scalaires

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2}$



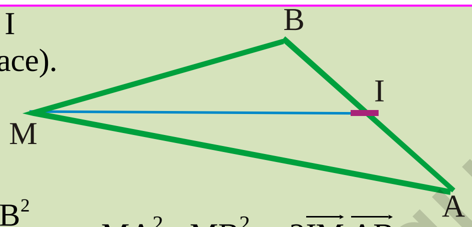
2) Relations généralisées de Pythagore ou d'Alkachy

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{A}$;
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \widehat{B}$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \widehat{C}$



3) Relations de la médiane

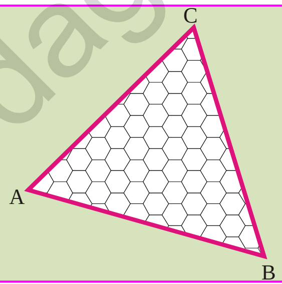
[AB] un segment de milieu I dans le plan (ou dans l'espace). Pour tout point M dans le plan ou dans l'espace :



- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$;
- Aire (MIA) = Aire (MIB) = $\dfrac{1}{2}$ Aire(MAB).

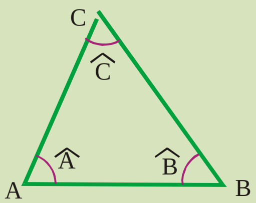
4) Aire d'un triangle

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A}$$
$$= \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \widehat{B}$$
$$= \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin \widehat{C}$$



4) Formule des sinus

$$\frac{\sin \widehat{A}}{BC} = \frac{\sin \widehat{B}}{AC} = \frac{\sin \widehat{C}}{AB}$$



VII- Lignes de niveau dans le plan $\mathscr{P}$ & surface de niveau dans l'espace $\mathscr{E}$

$f \quad \mathscr{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ Ou $f \quad \mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{R}$

$\quad M \longmapsto f(M)$ $\qquad M \longmapsto f(M)$

❖ Soit k un réel donné

- On désigne par L_k l'ensemble des points M du plan tels que :

f (M) = k ; L_k est appelé la ligne de niveau k de la fonction f .

- On désigne par S_k l'ensemble des points M de l'espace tels que : f (M) = k ; S_k est appelé la surface de niveau k de la fonction f .

❖ **<u>Des fonctions usuelles</u>**

1) f (M) = ΩM avec Ω un point donné

Si	alors
$k < 0$	$L_k = \phi$ et $S_k = \phi$
$k = 0$	$L_k = \{\Omega\}$ ϕ et $S_k = \{\Omega\}$
$k > 0$	L_k = est le cercle de centre Ω et de rayon k. S_k = est la sphère de centre Ω et de rayon k.

2) f (M) = $\overrightarrow{AM}.\vec{u}$ avec A un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné non nul

$\forall$ k $\in \mathbb{R}$; L_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$;
S_k est plan de vecteur normal $\vec{u}$;

En plus, avec, $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, L_k est une droite perpendiculaire à (BC).
S_k est plan orthogonal à (BC).

3) f (M) = $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ avec A et B deux points distincts données de milieu I.

- Soit $L_k = \phi$
- Soit $L_k = \{I\}$
- Soit L_k est un cercle de centre I

- Soit $S_k = \phi$
- Soit $S_k = \{I\}$,
- Soit Sk est une sphère de centre I.

En plus : L_0 est le cercle de diamètre [AB].
S_0 est la sphère de diamètre [AB].

4) f (M) = $\dfrac{MA}{MB}$ avec A et B deux points distincts données

Si	alors
$k < 0$	$L_k = \phi$ et Sk $= \phi$
$k = 0$	$L_k = \{A\}$ ϕ et $S_k = \{A\}$
$k = 1$	L_k = est la médiatrice de [AB]. S_k = est le plan médiateur de [AB].
$k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	L_k est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$. S_k est la sphère de diamètre $[G_1G_2]$. Avec $G_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c\|} A & B \\ \hline 1 & k \end{array}$; $G_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c\|} A & B \\ \hline 1 & -k \end{array}$

VIII- Fonction scalaire de Leibniz

- **f (M) =** $\alpha MA^2 + \beta MB^2$; avec A et B deux points donnés et α ; β deux réels donnés, est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$;
- **f (M) =** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ avec A ; B ; C ; trois points donnés et α ; β ; γ ; trois réels donnés est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\ ;\ (C;\delta)\}$.

- $\boldsymbol{f}$ **(M)** $= \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \theta MD^2$; A ; B ; C ; D quatre points donnés et α ; β ; γ ; θ ; quatre réels donnés est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha) \; ; \; (B;\beta) \; ; \; (C;\delta) \; ; \; (D;\theta)\}$.

En plus

Si	alors	
La somme des masses du système est différente de zéro et G est le barycentre du système	• Soit $L_k = \phi$ • Soit $L_k = \{G\}$ • Soit L_k un cercle de centre G	• $S_k = \phi$ • $S_k = \{\Omega\}$ • Soit S_k une sphère de centre G
	En plus, avec (m) somme des masses du système on a : pour tout point M : $\boldsymbol{f}(M) = mMG^2 + \boldsymbol{f}(G)$	
La somme des masses du système est égale à zéro.	$\forall k \in \mathbb{R}$; L_k est une droite et S_k est un plan ; chacun de vecteur normal $\vec{u}$: avec $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$; si $\boldsymbol{f}(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$; $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$; si $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2$ $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} + \theta\overrightarrow{MD}$; si $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2 + \theta MD^2$ En plus, avec I un point donné Pour tout point M : $\boldsymbol{f}(M) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{u} + \boldsymbol{f}(I)$.	

Savoir- faire

A . Applications

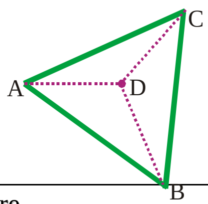
Orthogonalité de droites

Exercice 1

1. ABCD un tétraèdre régulier d'arête a.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$

et donner trois résultats similaires.



2) Montrer que les droites (AC) et (BD).
sont orthogonales, donner deux résultats similaires.

Solution

a) Dans le triangle équilatéral ABC, on a $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$,

<table>
<tr>
<td>

• donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.

Dans le triangle équilatéral ABD, on a $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$,

• donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\frac{\pi}{3}=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.

</td>
<td>

Dans le triangle équilatéral ACD, on a $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$,

• donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AC\times AD\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

d'où ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$.

</td>
</tr>
</table>

Les résultats similaires sont :

- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{-a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

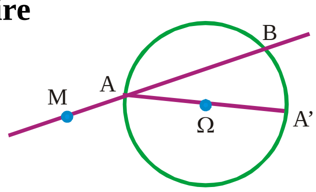
Donc, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
Les résultats similaires sont :

- les droites (AB) et (CD) sont orthogonales,
- les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

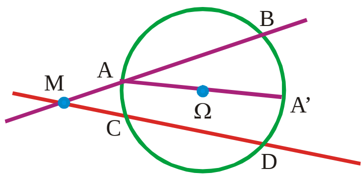
Projection orthogonale et conservation d'un produit scalaire

Exercice 2

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R. Soit M un point
Une droite passant par M coupe $\mathscr{C}$ en A et B.
Soit A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.



1) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
ne dépend pas des points A et B.
(c'est la puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$).
2) En déduire que lorsqu'une autre droite passant par M
coupe $\mathscr{C}$ en C et D, alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD}$.



Solution

Comme [AA'] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et B $\in \mathscr{C}$, donc BAA' est rectangle en B.
Or, M, A , B sont alignés.
Donc le triangle BMA' est rectangle en B.
Donc ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ (car MB est le projeté orthogonal deMA'surladroite(MA) .

Or, Ω est le milieu de [AA'], d'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ = $M\Omega^2$ - $\frac{AA'^2}{4}$ = -$M\Omega^2$ - $\frac{(2R)^2}{4}$ = $\Omega M^2 - R^2$.

Donc, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\Omega M^2-R^2$.
D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est indépendant des points A et B.

b) Comme $\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD} = \Omega M^2 - R^2$ (d'après a), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD}$.

Distance d'un point à un plan dan l'espace

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $((O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

$\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne x + y + 2z +1 = 0,

$\mathscr{P}$ ' le plan d'équation cartésienne x + y - z = 0,

1) Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ' sont orthogonaux.

2) Soit (d) la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ '. Donner une représentation paramétrique de (d). En déduire des éléments caractéristiques de (d).

3) Soit A le point de coordonnées (1 ; 1 ; 1).

a) Vérifier que $A \notin \mathscr{P}$ et $A \notin \mathscr{P}$ ' .

b) Voit H le projeté orthogoonal de A sur $\mathscr{P}$ et H' le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ '. Montrer que le triangle AHA' est rectangle.

c) Calculer AH et Ah', puis en déduire HH'.

Solution

1) Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ ' est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n}.\vec{n}' = (1)$ (1) +(1) (1) + (2) (-1) = 1 + 1 -2 = 0 ; donc, $\vec{n} \perp \vec{n}' = 0$, d'où $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}$ '.

2) M(x ; y ; z) $\in$ (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z+1=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; avec x = t ; $t \in \mathbb{R}$; on a : $\begin{cases} y+2z=-t-1 \\ y-z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z=-1 \\ 3y=-3t-1 \end{cases}$;

donc ; $(d)\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{3}-t \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$; c'est la représentation paramétrique de la droite (d). D'où un point de (d) est $B(0 ; -\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$; un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

3) a) Comme 1 + 1 +2(1) + 1 = 5 $\neq$ 0 ; donc $A \notin \mathscr{P}$; Comme 1 + 1 -1 = 1 $\neq$ 0 ; donc $A \notin \mathscr{P}$ ' ;

b) on a $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$; $\overrightarrow{AH'}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ ' .

Or, $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}$ ' ; donc, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{AH'}$ d'où AHH' est rectangle en A.

c) AH = distance (A ; $\mathscr{P}$) = $\frac{|1+1+2(1)+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} =$

AH' = distance (A ; $\mathscr{P}$ ') = $\frac{|1+1+-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; or, AHH' est rectangle en A,

d'où $HH'^2 = AH^2 + AH'^2 = \frac{25}{6}+\frac{1}{3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$; donc, HH' = $\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lignes de niveau

Exercice 4

ABC un triangle de centre de gravité G. On pose AB = c ; BC = a ; CA = b.

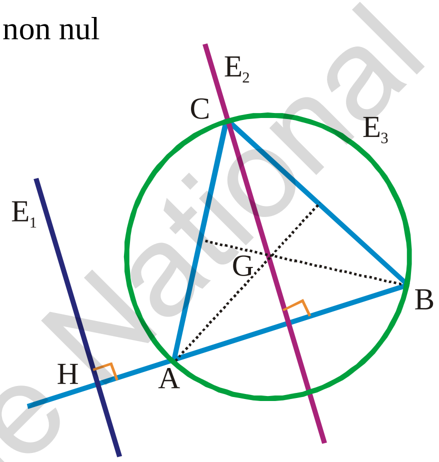
1) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}c^2$.

2) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2$.
Que représente E_2 pour le triangle ABC

3) a) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$.

b) Lorsque E_3 contient les sommets du triangle ABC, quelle est la nature de ce triangle ?

Solution



1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}c^2$ .Comme A est un point donné, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul donné ; $\frac{1}{3}c^2$ est un réel donné. Donc ; E_1 est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$
E_1 est une droite perpendiculaire à (AB). Soit $H = E_1 \cap (AB)$,

On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \frac{1}{3}c^2$ et $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$; $t \in \mathbb{R}$. Donc

$-t\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow -tc^2 = \frac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. D'où, $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

Donc E_1 est la droite perpendiculaire à (AB) en H.

2) On a : $MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2$ · Comme : 1 – 1 = 0 ; Donc E_2 est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AB}$; d'où E_2 est une droite perpendiculaire à (AB). Or, $CA^2 - CB^2 = b^2 - a^2$, d'où $C \in E_2$.

Donc ; E_2 est la perpendiculaire à (AB) passant par C

Donc ; E_2 est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

3) a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$.

On a : $\mathrm{bar}\left|\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = G$. Or ; $CA^2 + CB^2 + CC^2 = b^2 + a^2$; Donc ; $C \in E_3$.

Donc ; E_3 est le cercle de centre G passant parC.

b) Si ; E_3 contient les sommets de ABC, alors GA = GB = GC, d'où G est le centre du cercle circonscrit à (ABC).
Or, G est aussi centre de gravité de (ABC), Donc, ABC est un triangle équilatéral.

B. Exercices

1. **8.**

ABC D est un rectangle de centre O, tel que : AB = 4 ; AD = 3.
Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.

2. ABC un triangle équilatéral de centre O, on pose : AB = a ;
Calculer en fonction de a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.

3. 1) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$

2) ABCD un parallélogramme, on pose :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.

b) En déduire que :
$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

4. ABC un triangle tel que: AB = 3 ; AC = 5 ; $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$.

Calculer BC ;

2) I milieu de [AB] ; D est le symétrique de B par rapport à A. Calculer IC et CD.

5. Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en C, si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AC^2$.

2) soit ABC un triangle rectangle en C. Montrer que : $\cos\widehat{A}=\frac{AC}{AB}$.

6. 1) ABC un triangle tel que :
$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{B}=\frac{\pi}{4}$.

Montrer que : ABC est un triangle rectangle en A.

2) ABC est un triangle tel que :
$\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$ et $\widehat{B}=\frac{\pi}{4}$

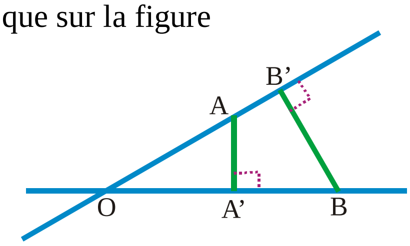
Montrer que : ABC est rectangle en C.

7. ABCD un carré de côté a (a > 0).
I ; J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

12 (AB) et (CD) deux droites distincts passant par un point M, tels que

Montrer que sur la figure ci-contre on a :

$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$



9. [AB] un segment de longueur a.

f : M $\longmapsto$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$

Déterminer et construire L_k (ligne de niveau k de f)
Dans chacun des cas :

1) $k=\frac{1}{2}a^2$; 2) $k=-\frac{1}{3}a^2$; 3) $k=a^2$;4)$k=-a^2$;5) k = 0.

10 L'espace est rapporté au repère orthnormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

1) Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant le point A(1 ; 2 ;-1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

2) Soit $\mathscr{P}$ ' le plan d'équation cartésienne :
x + y + 2z + 3 = 0.

a) Quelle est la position relative des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ '.

b) Déterminer la distance (A ; $\mathscr{P}$ '). Que représente cette distance pour les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ '.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

b) Quelle est la position de (d) par rapport au plan $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ '.

11 L'espace est rapporté au repère orthnormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

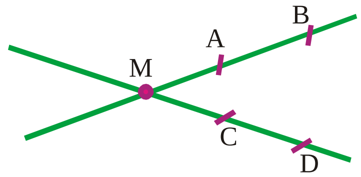
1) Soit (d) la droite définie pa : $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$r

Donner une caractérisation de (d).

2) Soit $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à (d) et contenant le point A(1 ; 0 ; 1).
Donner une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

1) Faire une figure.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$,
et M ≠ C.



Montrer que : les points A ; B ; C ; D sont cocycliques (appartiennent à un même cercle).

13 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Soit (d) la droite d'équation y = $\frac{-1}{4}$ et

F le point de coordonnées (0 ; $\frac{1}{4}$).

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M du plan équidistant de (d) et F.

1) Donner une équation cartésienne simplifiée de $\mathscr{P}$.

2) Etudier et représenter $\mathscr{P}$.

14 ABC un triangle tel que : AB = 2 ; AC = 3 ; BC = 4.

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$

2) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3) Calculer : GA^2 ; GB^2 ; GC^2.

4) Pour tout point P du plan, on pose :
$\boldsymbol{f}(M) = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

a) Calculer $\boldsymbol{f}(G)$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{f}(M) = 41$.

15. ABC un triangle tel que : AB = 2 ; AC = 3 ; BC= 4.

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$

D est le symétrique de B par rapport à C.
I milieu de [AB].

1) Faire une figure.

2) Calculer : $\cos\widehat{A}$; $\cos\widehat{B}$; $\cos\widehat{C}$.

3) Calculer IC ; AD.

4) On pose : $\boldsymbol{f}(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$.
$\boldsymbol{g}(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$.

a) Calculer : $\boldsymbol{f}(A)$; $\boldsymbol{f}(B)$; $\boldsymbol{f}(C)$; $\boldsymbol{f}(D)$; $\boldsymbol{g}(A)$; $\boldsymbol{g}(B)$; $\boldsymbol{g}(C)$; $\boldsymbol{g}(D)$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{f}(M) = 25$.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{g}(M) = 25$.

5) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$.

Chapitre **7** Trigonométrie

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Cercle trigonométrique

Définition

Le cercle trigonométrique est un cercle Γ de rayon 1.
son périmètre est donc égal à 2π.
le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 1).

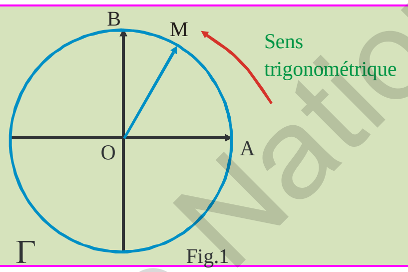


Fig.1

Graduation en radians

A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique Γ de la façon suivante (fig. 1).

- Au réel 0, on associe le point A ;
- A un réel $x > 0$, on associe le point M tel que l'arc $\overset{\frown}{AM}$, parcouru dans le sens trigonométrique, ait pour longueur x ;
- A un réel $x < 0$, on associe le point M tel que l'arc $\overset{\frown}{AM}$, parcouru dans le sens contraire du sens trigonométrique, ait pour longueur $|x|$.

Angle de vecteurs unitaires

Mesures en radians

Soit x un réel et M le point correspondant du cercle trigonométriqueΓ, on dit que x est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$.

L'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$, où ($k \in \mathbb{Z}$).

Notation

L'angle orienté des vecteurs unitaires $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ se note $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})}$ ou plus simplement $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$

- On peut écrire $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = x$ ou $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = x$ rad.
- Ou $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ avec ($k \in \mathbb{Z}$).

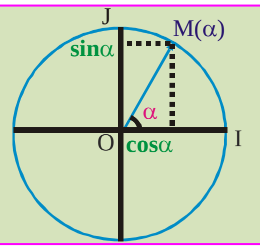
Autres unités d'angles

On peut utiliser les mesures en degrés ou en grades.
On a : π rad = 180° = 200gr.
En mathématiques, on utilise le radian car la longueur de l'arc est mesurée avec la même unité que la longueur OA (fig. 1).

Lignes trigonométriques d'un angle orienté
Cosinus et sinus d'un angle orienté
Définitions

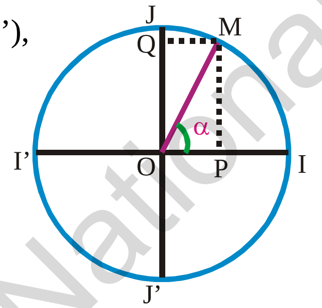
Soit $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur ($\mathscr{C}$) .

- le cosinus de $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.
- le sinus de $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.



Remarques

1) Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (II') et (JJ'),
   - On a : $\cos(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.
2) Dans le plan muni du repère (O ; I ; J),
   - on a : $M\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.
3) Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :
   - $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
   - $-1 \le \cos\alpha \le 1$ et $-1 \le \sin^2\alpha \le 1$;
   - $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$



Tangente d'un angle orienté
Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α .

La tangente de $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ ou de α est le nombre réel, noté tg ou tan, défini par :

$\tan(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Remarques

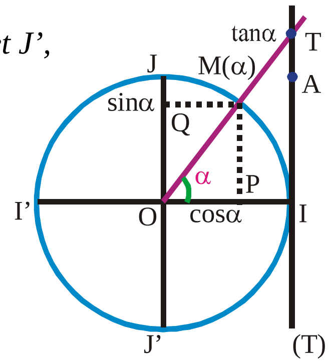
- *tanα n'est pas défini pour les nombres réels associés aux points J et J',*

c'est-à- dire les nombres réels α de la forme : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

- *Soit T le point d'intersection de (OM) et (T),*
  h l'homothétie de centre O qui applique P sur I.

Le rapport de h est $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ *et h(M) = T.*

Donc : $\overrightarrow{IT} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\overrightarrow{PM} = \dfrac{\sin\alpha}{}\overrightarrow{IA}$ *; d'où* $\overline{IT} = \tan\alpha$.



- *Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :*

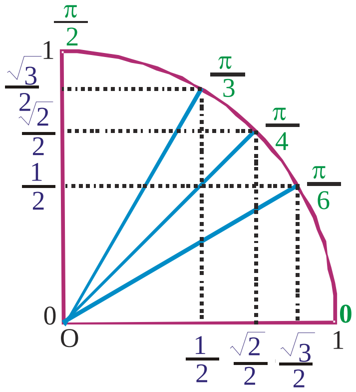
$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ et $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

cosα, sinα et tanα sont appelés « lignes trigonométriques » de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}})$ ou du nombre réel α.

Lignes trigonométriques des angles remarquables

Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	



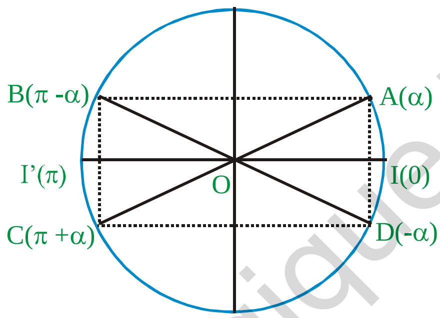
Lignes trigonométriques d'angles associés

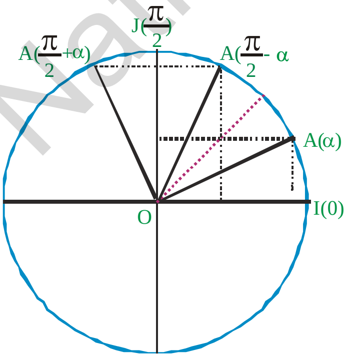
Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α.

Les angles orientés de mesures :

$-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ou $\frac{\pi}{2} - \alpha$

sont habituellement appelés angles associés à $\hat{\alpha}$.





Propriétés

Pour tous nombres réels α, on a :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$;

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$.

Remarques

- $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$, donc on a également les relations suivantes :

  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$.

- Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;

ainsi : $\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$.

Formules de trigonométries

Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b on a :

1) $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$; 3) $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

2) $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$; 4) $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

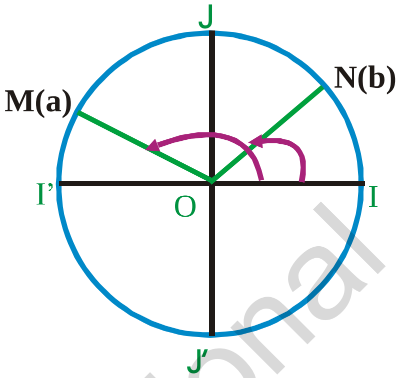
Démonstration

Considérons les points M et N, images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométriques

On a : $M\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

a et b sont des mesures respectives de $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{ON}}\right)$.

Donc : b – a est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}}\right)$.



- Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\left\|\overrightarrow{ON}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) = \cos(b-a) = \cos(a-b);$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_M x_N + y_M y_N = \cos a\cos b + \sin a \sin b.$

D'où cos(a – b) = cosacosb + sinasinb (1)

En remplaçant b par –b dans la formule (1), on obtient la formule (2).

- Etablissons maintenant la formule (3).

$\sin(a-b) = \cos(\frac{\pi}{2}-(a-b)) = \cos((\frac{\pi}{2}+b)-a) = \cos(\frac{\pi}{2}+b)\cos a + \sin(\frac{\pi}{2}+b)\sin a.$

Or, $\cos(\frac{\pi}{2}+b) = -\sin b$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+b) = \cos b$.

D'où sin (a - b) = sinacosb –cosasinb (3)

En remplaçant b par –b dans la formule (3), on obtient la formule (4).

Formules de duplication et de linéarisation

Propriétés

Pour tout réel a, on a :

Formules de duplication

(5) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; (6) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

Formules de linéarisation

(7) $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; (8) $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Démonstration

En prenant b = a dans la formule (2) et (4), on obtient :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (5) ; $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ (6)

En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on en déduit :

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - \sin^2 a$.

D'où : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ (7) et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ (8)

Expressions de cosα , sinα et tanα en fonction de tan $\frac{\alpha}{2}$

Propriétés

Pour tout nombre réel α tel que $\tan\frac{\alpha}{2}$ soit défini, en posant $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, on a :

(9) $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; (10) $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

Si, de plus, tanα est défini : (11) $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

Démonstration

On sait que : $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

On en déduit que : $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

$\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$;

si, de plus, $\tan\alpha$ est défini, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

4. Equations trigonométriques

4.1 Equations de types : cosx = a ; sinx = a ; tanx =a

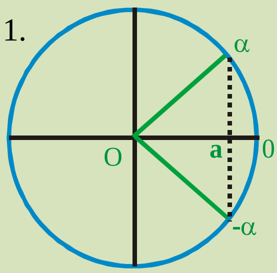
Equation du type cosα = a

On distingue les cas suivants :

- $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \le \cos x \le 1$.
- Si $a \in [-1 ; 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\cos\alpha = a$.

$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow$

$x \equiv \alpha\ [2\alpha]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\alpha]$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$



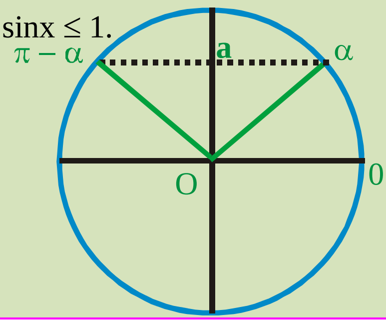
Equation du type sinx = a

On distingue les cas suivants :

- $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \le \sin x \le 1$.
- Si $a \in [-1 ; 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\sin\alpha = a$.

$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\alpha \quad \Leftrightarrow$

$x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi-\alpha\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$



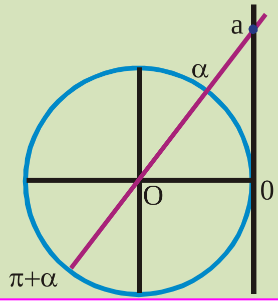
Equation du type tanx = a

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel a, il existe un nombre réel α tel que : $\tan\alpha = a$.

$\tan x = a \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow$

$x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$.

C'est-à-dire $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha + 2k\pi \ ;\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi \ ;\ k \in \mathbb{Z}$.



4.2 Equations du types : acosx + bsinx + c = 0

- Si a = 0 ou b = 0, on se ramène à une équation du type : cosx = a ou sinx = a.
- Si a ≠ 0 et b ≠ 0, alors $a^2 + b^2 = \neq 0$ et on a :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) ;$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel ϕ tel que :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On en déduit que : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$;

On est ainsi ramené à résoudre l'équation : $\cos(x-\phi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Inéquations trigonométriques

On se limitera aux inéquations simples de type : cosx ≤ b ou cosax ≤b (ou sin ou tan).

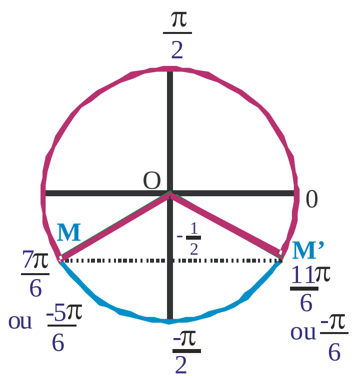
Exemple

Résoudre l'inéquation (I) : sinx > $-\frac{1}{2}$ sur les intervalles suivants : a)] -π ; π] , b) [0 ; 2π[, c) $\mathbb{R}$.

Solution

Soit M et M' deux points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

Les points images des solutions cherchées sont les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieure à $-\frac{1}{2}$, ils sont donc, les points de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$, M et M' étant exclus.



a)] -π ; π], M et M' sont les images respectives de $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$,

donc l'ensemble des solutions de (I) est $]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}] \cup]-\frac{\pi}{6} ; \pi]$.

b) dans [0 ; 2π[, M et M' sont les images respectives de $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$,

donc l'ensemble des solutions de (I) est $[0 ; \frac{7\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6} ; 2\pi[$.

c) dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (I) est la réunion des intervalles de la forme :

$$\left]-\frac{\pi}{6}+k2\pi ; \frac{7\pi}{6}+k2\pi\right[, k \in \mathbb{Z}.$$

Savoir-faire

A. Applications

Formules d'addition

Exercice .1

Calcule $\cos\frac{5\pi}{12}$; $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$, en remarquant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

Solution

- $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1);$
- $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-(\frac{-1}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);$
- $\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\sin(\frac{5\pi}{12})}{\cos(\frac{5\pi}{12})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$

Formules de transformation

Démontrer que : pour tous réels p et q on a :

1) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$; $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

2) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$; $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Solution

D'après, les formules d'addition:

1) cos(a – b) = cosacosb + sinasinb ; 2) sin(a – b) = sinsacosb -cosasinb

3) cos(a + b) = cosacosb - sinasinb ; 4) sin(a +b) = sinsacosb + cosasinb

En posant : $\begin{cases} p=a+b \\ q=a-b \end{cases} \Rightarrow a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$; on en déduit que :

- $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Exercice .2

1) Démontrer que 2sinacosb = sin(a +b) + sin(a – b), tels que a et b des réels quelconques.

2) En déduire que : $2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})=\sin\frac{6\pi}{7}$.

3) Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

Solution

1) D'après les formules d'addition on a :
sin(a + b) + sin(a – b) = sinacosb + sinbcosa + sinacosb - sinbcosa = 2sinacosb.

2) On pose: $A = 2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})$.

$A = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$, en appliquant le résultat précèdent, on obtient:

$A = \sin\frac{2\pi}{7}+\sin 0+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{6\pi}{7}$.

3) On a : $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=\sin\frac{\pi}{7}$. ; Donc : $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\ \frac{1}{2}$.

Or, $\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})=-\cos\frac{2\pi}{7}$. D'où : $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

Formules de Duplication et Linéarisation

Exercice .3

En utilisant les formules de linéarisation, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

- $\cos^2\frac{\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$;
- $\sin^2\frac{\pi}{12}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$;
- de plus, l'image de $\frac{\pi}{12}$ sur ($\mathscr{C}$) nous indique que $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sont des nombres réels positifs.

  Donc : $\cos\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice. 4

Calculer les expressions suivantes :

$A = \cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$; $B = \sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$.

(Tu peux calculer A + B et A – B).

Solution

- $A+B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

  $= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
- $A-B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\right)+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\left(\cos^2\frac{5\pi}{8}-1\right)+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\left(\cos^2\frac{7\pi}{8}-1\right)$

  $=2\cos^2\frac{\pi}{8}\text{-1} + 2\cos^2\frac{3\pi}{8}\text{-1} +2\cos^2\frac{5\pi}{8}-1+2\cos^2\frac{7\pi}{8}\text{ -1}$
- D'après les formules de duplication, on en déduit que :

  $A-B=\cos\frac{2\pi}{8}+\cos\frac{6\pi}{8}+\cos\frac{10\pi}{8}+\cos\frac{14\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}$

  En utilisant les formules des angles associés, on trouve :

  $A-B = \cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

  $=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=0$

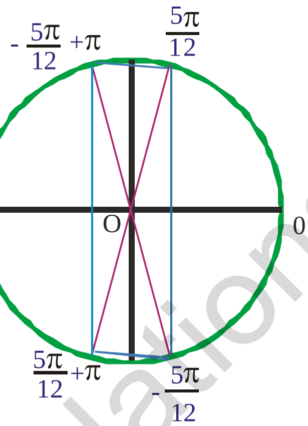
  Donc, $\begin{cases} A+B=4 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \end{cases}$

Résolution des équations trigonométriques

Exercice. 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution



(E) $\Leftrightarrow$ $\cos 2x = \cos\frac{5\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme :

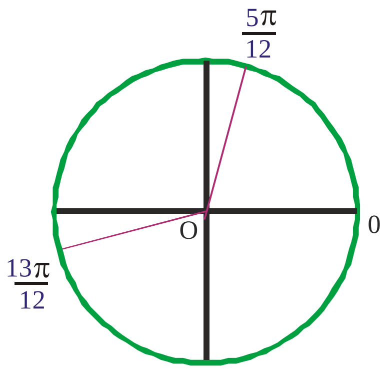
$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice. 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Solution



(E) $\Leftrightarrow$ $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad ; \ k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

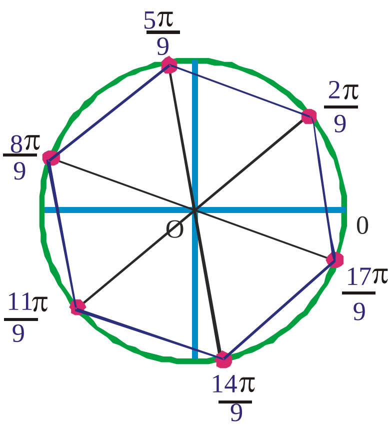
Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice. 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\tan 3x = -\sqrt{3}$.

Solution



(E) $\Leftrightarrow$ $\tan 3x = \tan\frac{2\pi}{3}$.

$\Leftrightarrow$ $3x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice. 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) (E) : $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) (H) : $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = -1$.

Solution

a) Dans l'équation (E), on remarque que $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement égaux à $\cos(\frac{-\pi}{3})$ et $\sin(\frac{-\pi}{3})$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow \cos(\frac{-\pi}{3})\cos x + \sin(\frac{-\pi}{3})\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{-\pi}{3} - x) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{-\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ ; \ k \in Z \\ \frac{-\pi}{3} - x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \ ; \ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Pour l'équation (H), il suffit de diviser les deux membres de l'équation par 2.

On a : (H) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos\frac{2\pi}{3},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ ; \ k \in Z \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \ ; \ k \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv -\frac{5\pi}{12} \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{11\pi}{12} \ [2\pi].$$

Les solutions de (H) sont les réels x tels que: $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Autres types d'équations trigonométriques

Exercice. 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = \sin\frac{\pi}{7}$.

Solution

On sait que $\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{14}$, car $\frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}$, on a donc : (E) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{14}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{14} + k2\pi \ ; \ k \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{14} + k2\pi \ ; \ k \in Z \end{cases}$$

B. Exercices

1. Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$\frac{-5\pi}{2}$; $-\frac{121\pi}{6}$; $-\frac{1999\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{4}$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel α, on a :

a) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$;

b) $\sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$;

3. Calculer en fonction de cosx et sinx, les expressions suivantes :

$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$;

$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$;

$C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \text{cosn}(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{3\pi}{2})$;

$D = \sin(\frac{\pi}{2} + x) + 2\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + \frac{5\pi}{2})$.

4. Démontrer que pour tout nombre réel x :

$\sin x = \sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$;

$\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} + x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)$;

5. En remarquant que: $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$, démontrer que :

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

En remarquant que : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$, calculer

$\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

6. 1) Ecrire cos3x en fonction de cosx, sin3x en fonction de sinx.

2) en déduire que : $\tan 3x = \tan x\,\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$.

7. 1) Calculer :

$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

$B = \frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$.

2) En déduire que :

$\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

8. En remarquant que l'on a : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$,

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

9. Démontrer que, pour tous réels a, b et c, on a :

1) sinasin(b-c) +sinbsin(c-a) + sincsin(a-b) = 0

2) cosasin(b-c) +cosbsin(c-a) + coscsin(a-b) = 0

3) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

10 Démontrer que : $16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$

11 Résoudre les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$;

b) $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})$;

c) $\sin(-x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$;

12 1) Quels sont les réels x de $[0 ; 2\pi[$ vérifiant $\cos x = \frac{1}{2}$?

2) Même question pour x de$]-\pi ; \pi]$.

3) Quels sont les réels x vérifiant $\cos x = \frac{1}{2}$?

13 1) Quels sont les réels x de $[0 ; 2\pi[$ vérifiant $\sin x = -\frac{1}{2}$?

2) Même question pour x de$]-\pi ; \pi]$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$;

b) cos2x – sin2x + = -1;

c) $4\sin^2 x - 3 = 0$;

d) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$;

15 Dans chacun des cas suivants, représenter les réels x qui satisfont les conditions proposées.

1) $\sin x \geq 0$; 2) $\cos x \geq 0$

3) $\sin x \leq \frac{1}{3}$; 4) $\cos x < \frac{1}{4}$

5) $\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$; 6) sinxcosx

16 Résoudre dans D les équations suivantes :

1) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(2x + \frac{\pi}{8}) = 0$; $D = \mathbb{R}$;

2) $3\tan^2 x - 1 = 0$; $D = [-\pi ; \pi[$;

3) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$; $D = [0 ; 2\pi[$.

17 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$.
2) Représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.
3) Donner les solutions de (E) appartenant à l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$\tan 2x + \tan(x - \frac{3\pi}{4}) = 0$

Chapitre 8 Etude de fonctions

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les fonctions

Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J).

1) Domaine de définition

On appelle domaine de définition de f l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$ noté D_f.

Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{4}{x(x-1)}$; $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$.

2) Parité

On dit que la fonction f est paire si , • D_f est symétrique par rapport à zéro • Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = f(x)$ **Exemple** $f : x \mapsto x^2$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$; $\forall x \in D_f$; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$; Donc; f est paire	On dit que la fonction f est impaire si • D_f est symétrique par rapport à zéro • Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = -f(x)$ **Exemple** $f : x \mapsto x^3$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$; $\forall x \in D_f$; $(-x)^3 = -x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$; Donc; f est impaire

3) Eléments de symétries

Axe de symétrie

Soit f une fonction numérique ; D_f son domaine de définition $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J). Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 Démontrer que : $\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à a} \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$ **Exemple** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; La droite d'équation $\Delta : x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f, car $f(4-x) = \dfrac{4}{(4-x)(4-x-4)}$ $= \dfrac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \dfrac{4}{-x(4-x)} = f(x)$	***Méthode 2*** Démontrer que f est paire dans le repère (O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; 0).** **Exemple** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; On a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$; soit : $X = x - 2$ et $Y = y$. Donc ; $Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $X \mapsto \dfrac{4}{(X+2)(X-2)}$ La fonction f est paire..

Centre de symétrie

Pour démontrer que le point Ω(a ; b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1

Démontrer que :

$$\begin{cases} \mathbf{D_f \text{ est symétrique par rapport à a}} \\ \boldsymbol{f(2a - x) = 2b - f(x)} \end{cases}$$

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$;

Le point Ω (1 ; 2) est centre de symétrie, car

$$\left.\begin{array}{l} f(2-x) = 2 + \dfrac{3}{2-x-1} = 2 - \dfrac{3}{x-1} \\ 4 - f(x) = 4 - (2 + \dfrac{3}{x-1}) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \end{array}\right\} f(2-x) = 4 - f(x)$$

Méthode 2

Démontrer que $\boldsymbol{f}$ est impaire dans le repère (O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; b).**

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$

Soit : X = x – 1 ; Y = y -2 ;

Donc l'expression de $\boldsymbol{f}$ dans ce nouveau repère est :

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $X \mapsto \dfrac{3}{X}$; c'est une fonction impaire.

3) Asymptotes

Asymptotes parallèles aux axes de repères :

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite x = x_0 est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Oy),

Exemple

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; donc x = 0 est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à (Oy),

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite y = l est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Ox).

Exemple

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x}$;

- On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (2 - \dfrac{1}{x}) = 2$; donc y = 2 est une asymptote à $\mathscr{C}$, c'est une droite parallèle à (Ox).

Asymptotes obliques

Lorsqu'il existe une fonction affine : $x \mapsto ax + b$; telle que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$,

on dit que la droite d'équation : y = ax + b est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

Exemple

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x + 1 - \dfrac{1}{x-3}$;

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$; donc la droite d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

II. Plan d'étude d'une fonction donnée

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction à étudier, s'il n'est pas précisé,
- Etudier la parité de la fonction donnée,
- Etudier la dérivabilité sur D_f , calculer $\boldsymbol{f}$ '(x) pour tout x de D_f,
- A partir du signe de $\boldsymbol{f}$ '(x), déduire le sens de variation de la fonction,
- Etudier les limites aux bornes de D_f,
- Dresser le tableau de variation,
- Représenter, les asymptotes s'ils existent et les tangentes pour une représentation nette et soigneuse.

Exemples d'études de fonctions

Etude d'une fonction polynôme Soit $f : x \mapsto -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

- Domaine de définition : la fonction f est un polynôme ; donc $D_f = \mathbb{R}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = -\infty$
- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée $f' : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9$.
- Sens de variation de $f(x)$; soit $f'(x) = 0$; $-3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -3(x-3)(x-1) = 0$

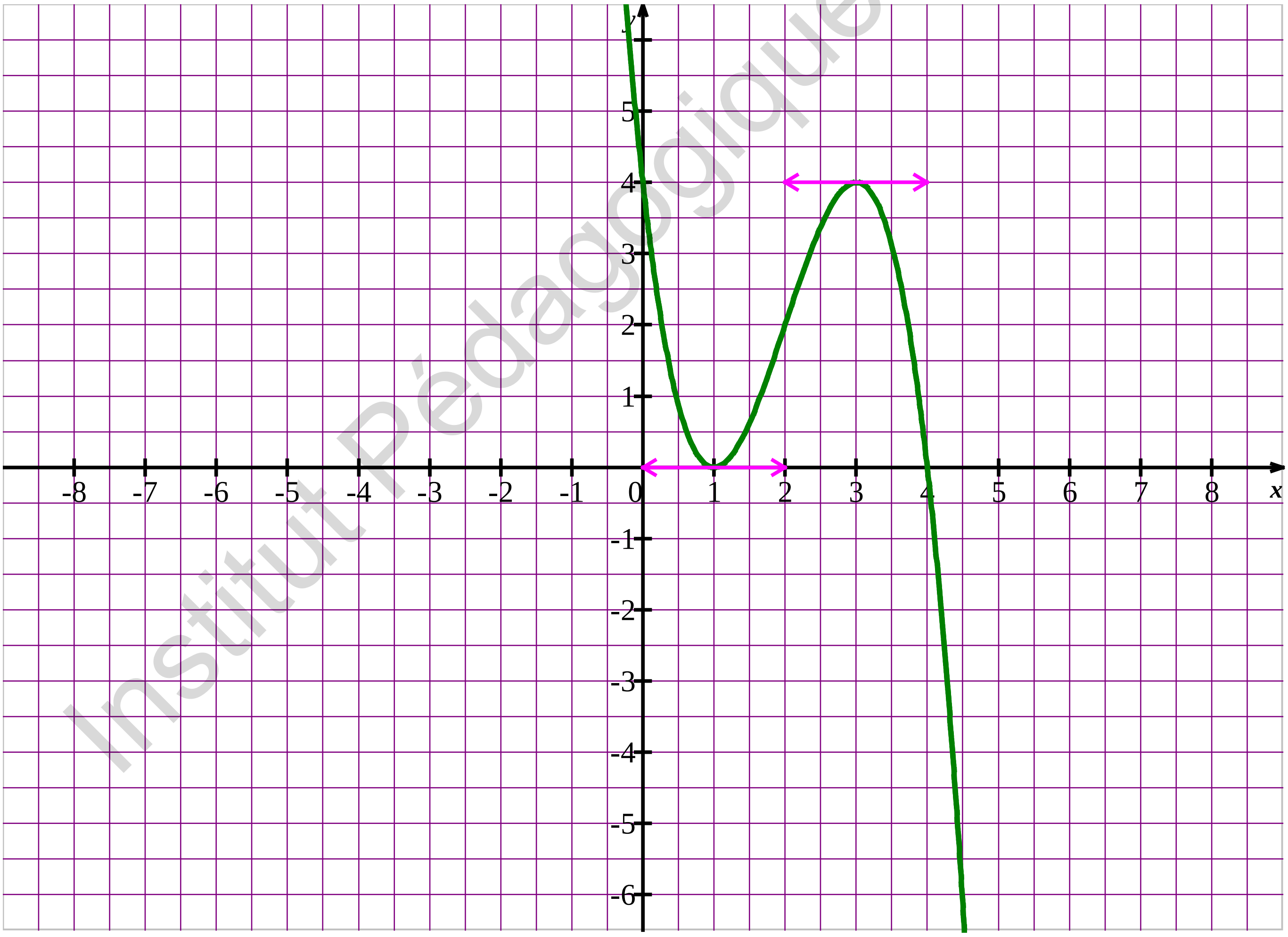
  $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

  $\forall x \in\ ]-\infty\ ; 1] \cup [3\ ; +\infty[$; : $f'(x) \leq 0$; d'où f est décroissante sur cet intervalle,

  $\forall x \in [1\ ; 3]$; $f'(x) \geq 0$; d'où f est croissante sur cet intervalle.
- Calcul de l'image de certains points : $f(1) = -1^3 + 6 \times 1^2 - 9 \times 1 + 4 = 10 - 10 = 0$; $f(3) = 4$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$



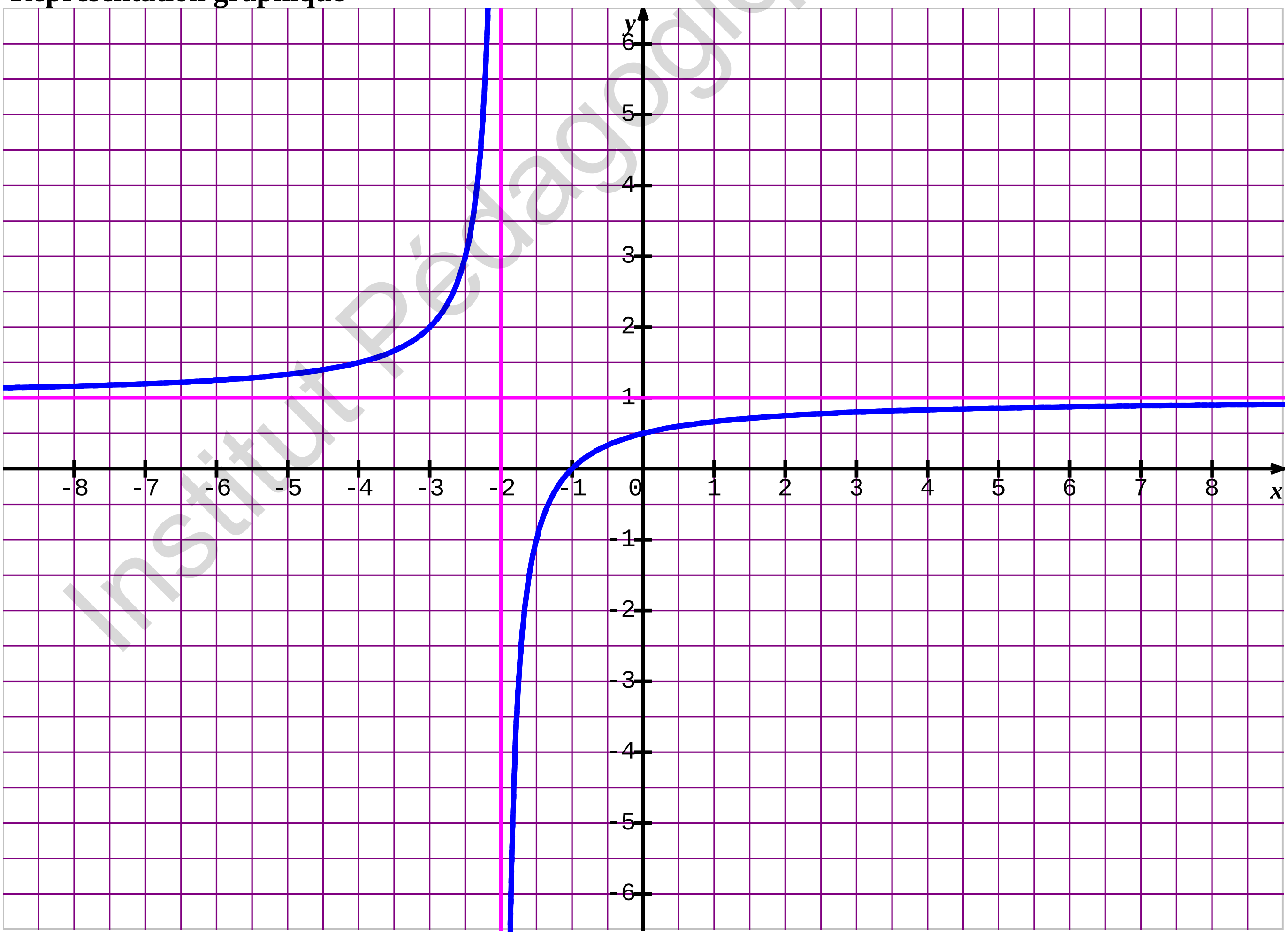
Etude d'une fonction homographique : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

- Domaine de définition : la fonction f est une fonction homographique (rationnelle) ;
  donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$;
- Asymptotes : il y a deux asymptotes : x= -2 (A.V) ; y = 1 (A.H)
- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
- Sens de variation de $f(x)$; $\forall\ x \in D_f$; $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur D_f.
- Calcul de l'image de certains points : $f(0)$ = $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f '(x)		+	‖	+	
f (x)	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Représentation graphique



Etude de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

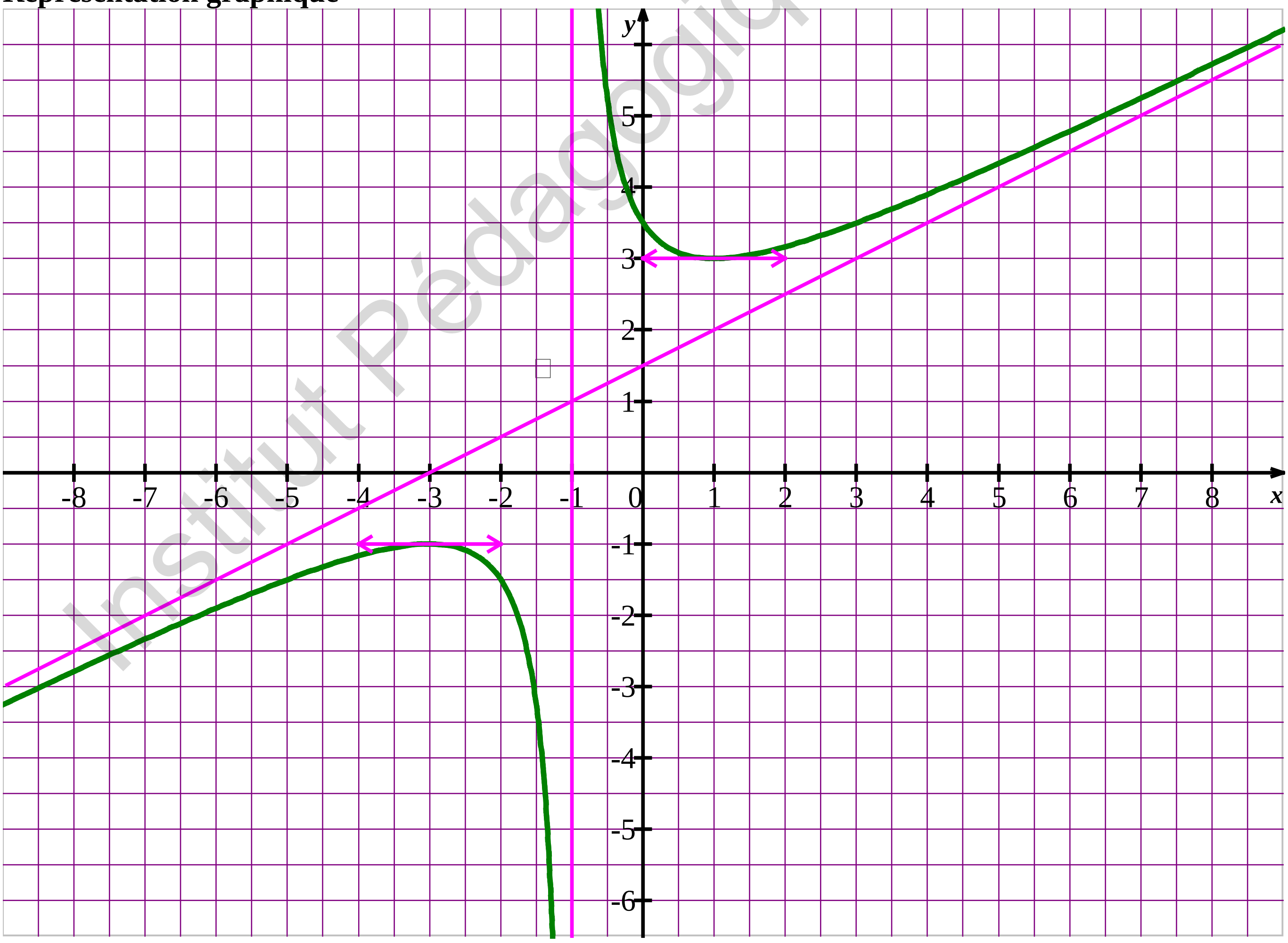
- Domaine de définition : D_g= $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- Asymptotes : il y a deux asymptotes : x = -1 et y = $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$(asymptote oblique), (car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$)
- Dérivabilité : comme g est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

  La dérivée est la fonction : $g' : x \mapsto \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$;
- Sens de variation : Soit $g'(x) = 0$; donc x = -3 ou x = 1, d'où $\forall$ x $\in$]- ∞ ; -3 [∪ [1 ; +∞[; $g'(x) \geq 0$; donc g est croissante sur cet intervalle ; $\forall$ x $\in$ [-3 ; 1] ; $g'(x) \leq 0$; d'où g est décroissante sur cet intervalle.
- Calcul de l'image de certains points : g(-3) = $\frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -1$; g(1) = 3.

Tableau de variation

x	-∞		-3		-1		1		+∞
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-1	↘ -∞	‖	+∞ ↘	3	↗	+∞

Représentation graphique



III. Fonctions associées

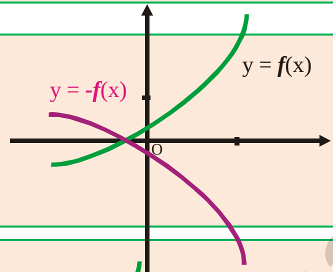
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction ***f***, a et b deux réels.

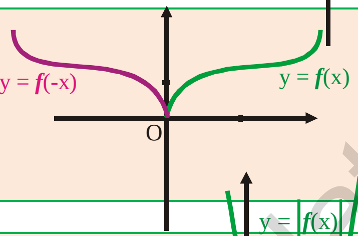
Les fonctions : $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$; $x \mapsto |f(x)|$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$.
sont dites fonctions associées à ***f*** .

- **Fonction :** $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$ et $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$

La courbe de la fonction $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

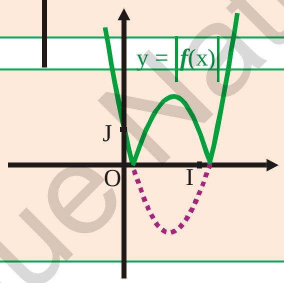


La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



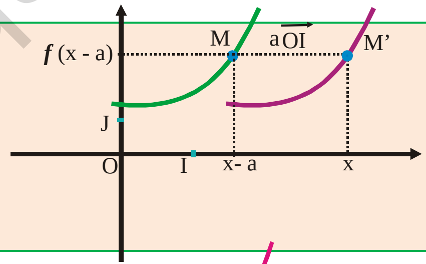
- **Fonction :** $x \mapsto |\boldsymbol{f}(x)|$

La courbe de cette fonction est la réunion des deux parties des courbes d'équations respectives y = ***f***(x) et y = -***f***(x).



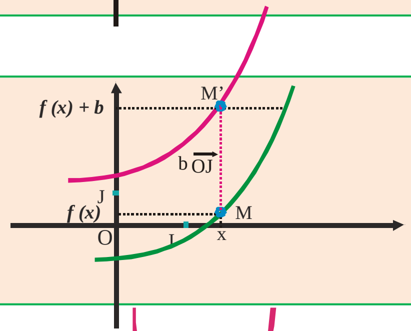
- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$.

La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.



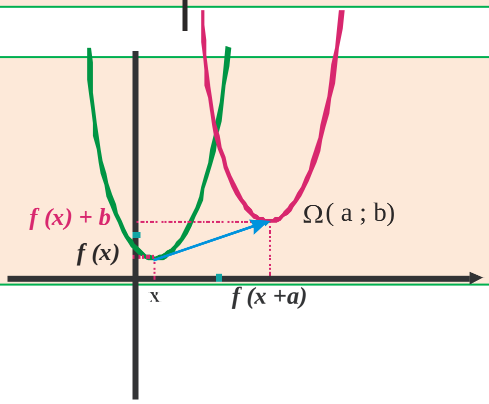
- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$

La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$



- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)+b$

La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)+b$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



IV. Fonctions trigonométriques

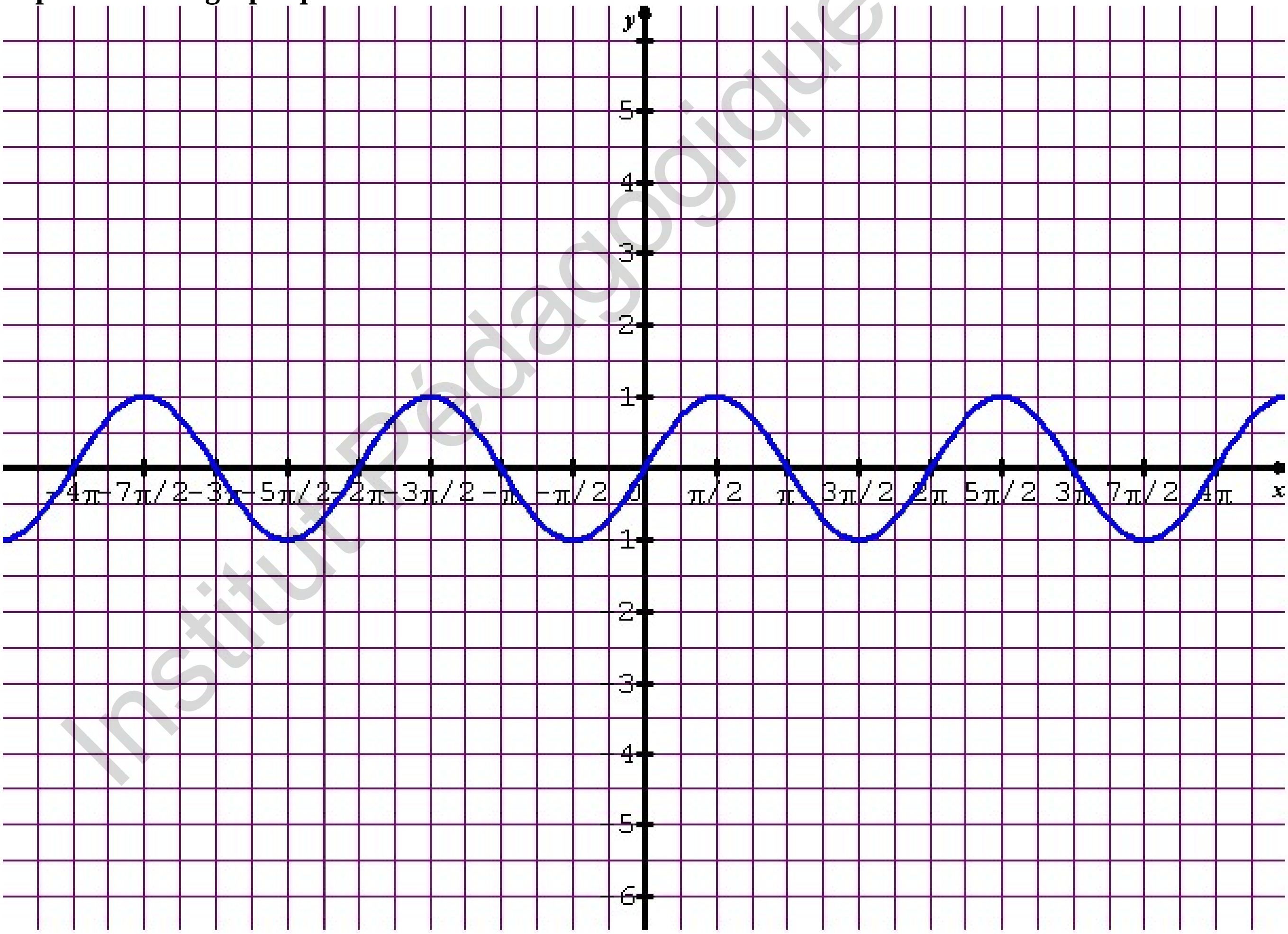
Etude de la fonction $f : x \mapsto \sin x$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est impaire.
  Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0\ ;\ \pi]$.
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet ensemble.
  Sa dérivée est la fonction $f\,' : x \mapsto \cos x$
- Sens de variation ; $\forall\ x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$; $\cos x \geq 0$; d'où $f\,'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur cet intervalle ; $\forall\ x \in [\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi]$; $\cos x \leq 0$; d'où $f\,'(x) \geq 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f\,'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

Représentation graphique



Etude de la fonction $f : x \mapsto \cos x$

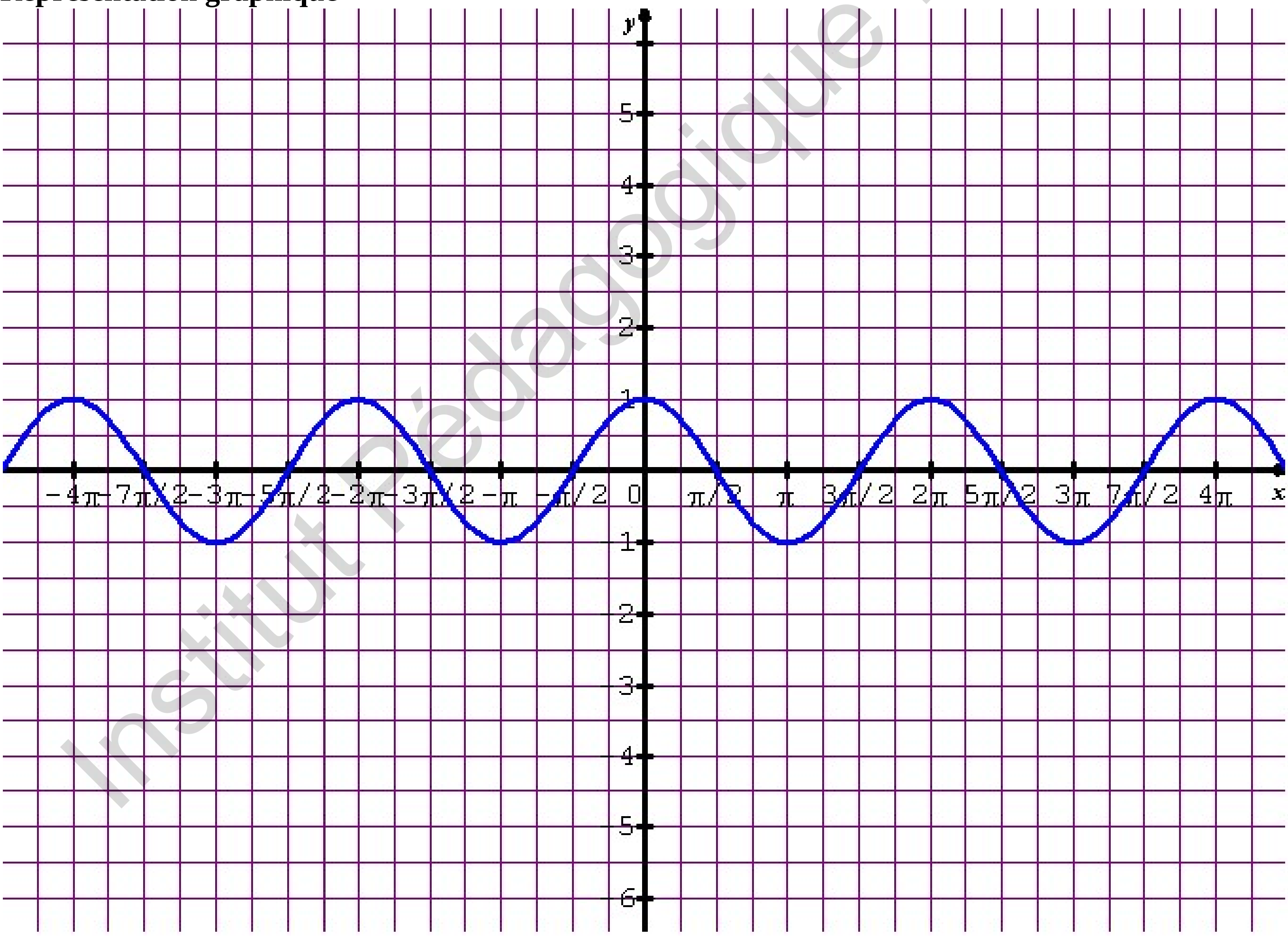
- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est paire.
  Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.

- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle .
  Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\sin x$
- Sens de variation ; $\forall$ x $\in$ $[0 ; \pi]$; $-\sin x \leq 0$; d'où $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
- sinx	-	1	-
cosx	1 ↘	0	↘ -1

Représentation graphique



Etude de la fonction tanx

- Domaine de définition est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{R}\right\}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période π ;
- Parité : elle est impaire.

Donc il suffit de réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle : $[0 \ ; \ \frac{\pi}{2}[$.

- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle. Sa dérivée est la fonction $1 + \tan^2 x$.
- Sens de variation ; $\forall \ x \ \in \ [0 \ ; \ \frac{\pi}{2}[$; $1 + \tan^2 x \geq 0$; d'où $f\,'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$1 + \tan^2 x$	+	‖
tanx	$0 \nearrow +\infty$	‖

Représentation graphique

Etude de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car $f(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2}+2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$;
- On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$
- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

  Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

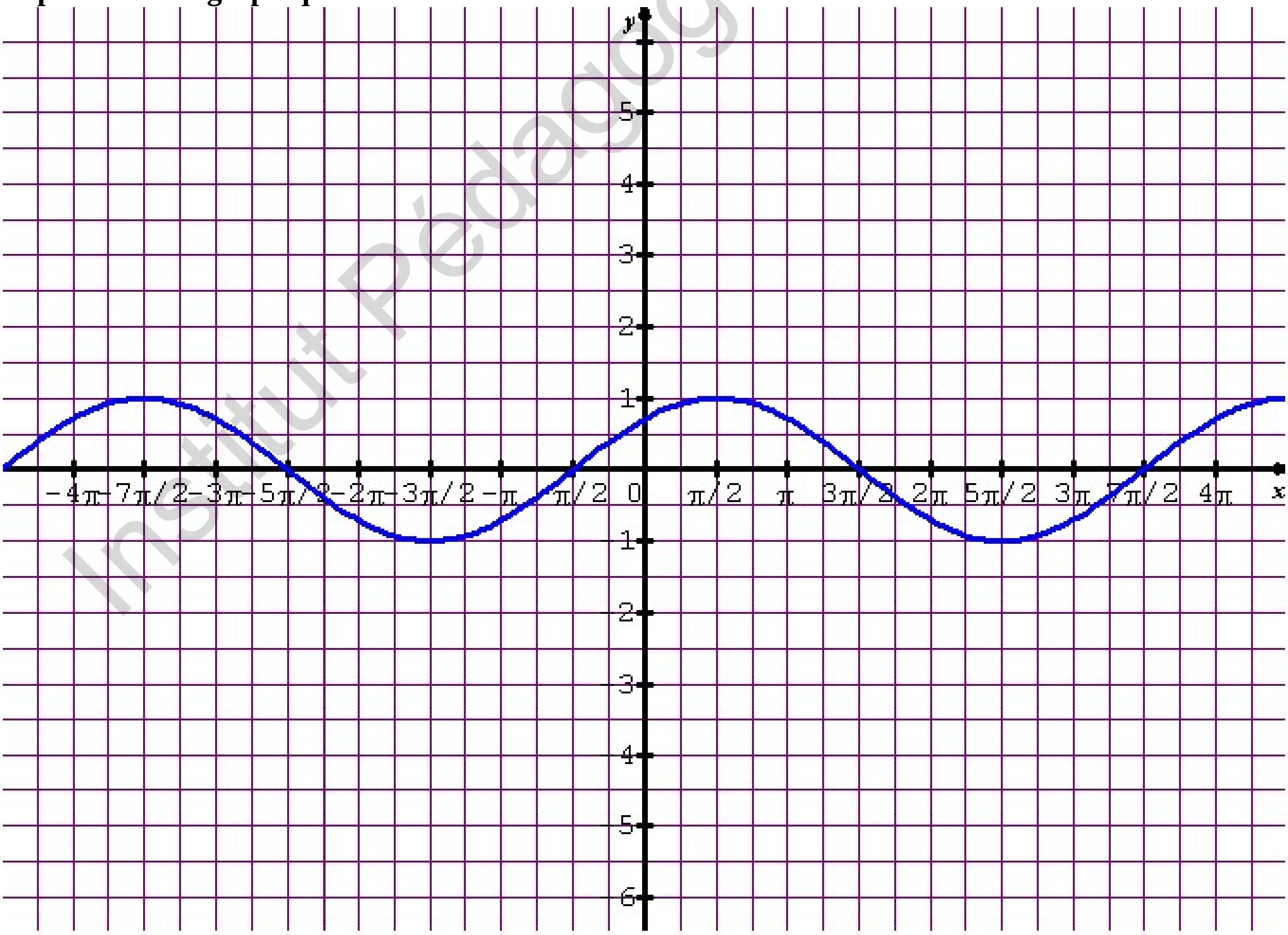
  Soit $f'(x) = 0 \iff \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$; ou $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \iff x = -\frac{3\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

  La fonction f est croissante sur $[\frac{-3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$; décroissante sur $[-2\pi ; \frac{-3\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2} ; 2\pi]$.

Tableau de variation

x	-2π		$\frac{-3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représentation graphique



Etude de la fonction $f : x \mapsto 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car $f(x + 4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$;

  On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$

- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

  Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

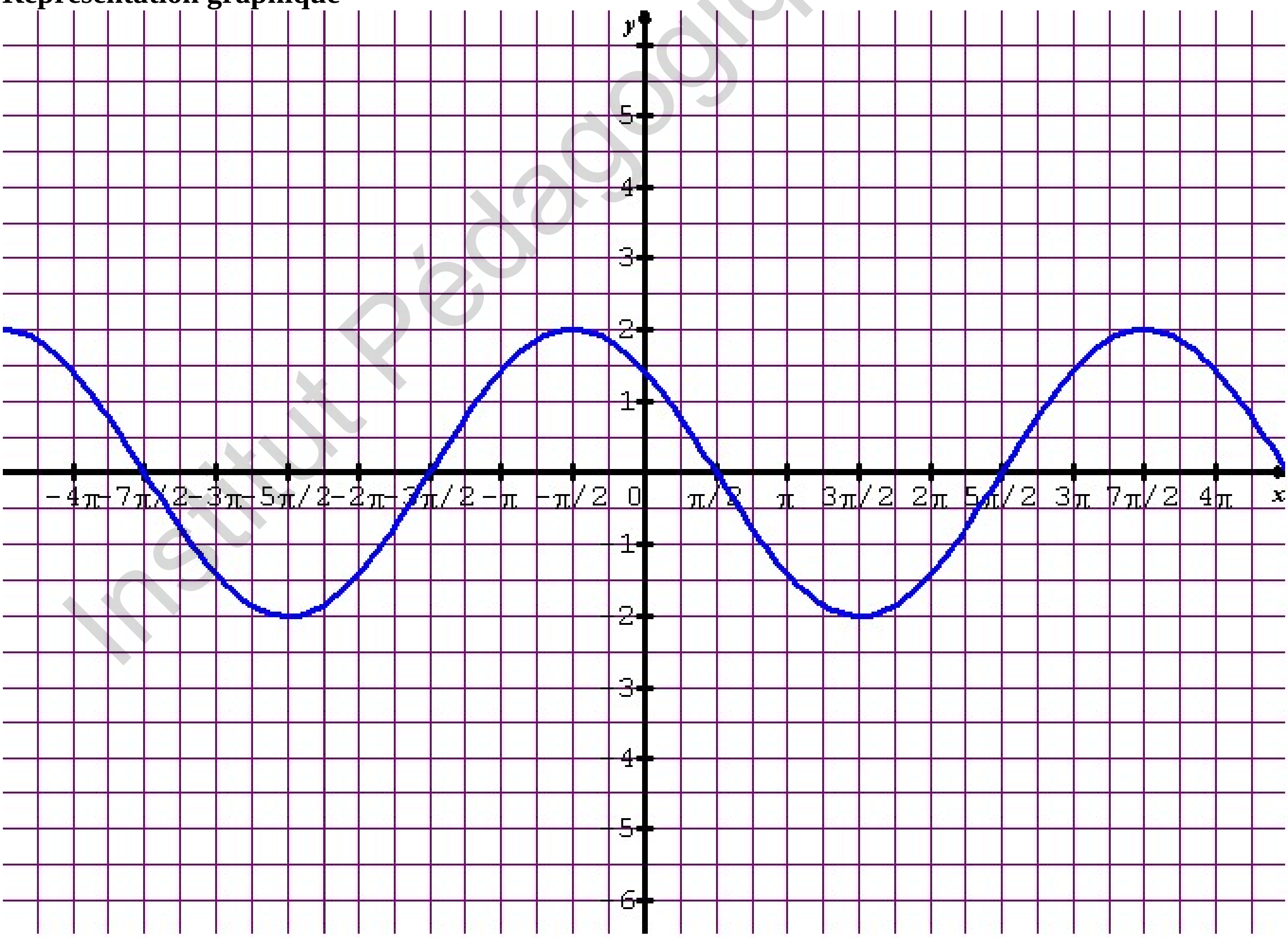
  $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=0$ ou $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi$; donc ; les valeurs de x dans l'intervalle d'étude sont : $\left\{-\frac{\pi}{2} \ ; \ \frac{3\pi}{2}\right\}$.

  La fonction f est donc, croissante sur $[-2\pi ; \frac{-\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$; décroissante sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$;

Tableau de variation

x	-2π		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	↗	2	↘	-2	↗	$\sqrt{2}$

Représentation graphique



Savoir-faire

Eléments de symétrie d'une courbe

Exercice .1

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par $\boldsymbol{f}:\ x \mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$. Démontrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de cette fonction.

Solution

Il suffit de démontrer que : $\boldsymbol{f}(1-x) = \boldsymbol{f}(x)$. On a : $\boldsymbol{f}(1-x) = \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{1-x}+\frac{1}{x} = \boldsymbol{f}(x)$;

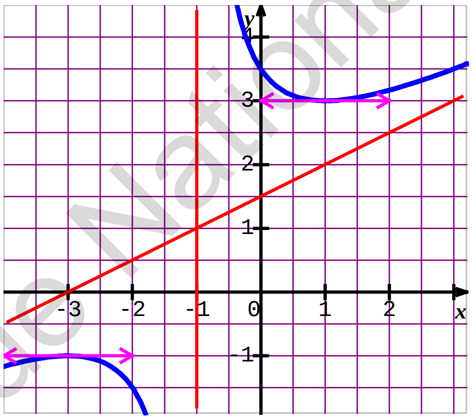
donc la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction

$\boldsymbol{f}:\ x \mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$.

Exercice .2

Voici une partie de la courbe représentative de la fonction

$\boldsymbol{g}: x \mapsto \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{2}{x+1}$ .Cette courbe admet-elle un centre de symétrie ? si oui, lequel ?, démontrer.



Solution

D'après la courbe, le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour cette courbe, il s'agit du point de coordonnées (-1 ; 1).Il suffit de démontrer que : $\boldsymbol{g}(-2-x) = 2 - \boldsymbol{g}(x)$. On a :

$\forall x \in D_{\boldsymbol{g}}; \boldsymbol{g}(-2-x) = \frac{-2-x}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{-2-x+1} = \frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{2}{x+1} = 2-(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{x+1}) = 2-\boldsymbol{g}(x).$, d'où le point de coordonnées (-1 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe donnée.

Etude de fonctions

Exercice .2

Etudier la fonction $\boldsymbol{f}: x \mapsto 2x^2-3x+1$.

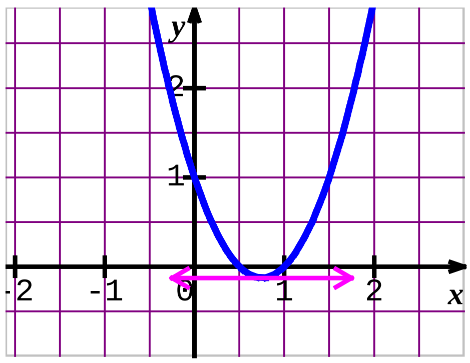
Solution

- Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$; limites bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$;
- Dérivabilité : comme $\boldsymbol{f}$ est une fonction polynôme ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $\boldsymbol{f}' : x \mapsto 4x-3$; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$
- Sens de variation: $\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;\ \frac{3}{4}\ ]$; $f'(x) \leq 0$ d'où f **est** décroissante ; $\forall\ x \in [\ \frac{3}{4}\ ; +\infty\ [$; $f'(x) \geq 0$ d'où f est croissante ;
- Calcul de l'image de certains points : $\boldsymbol{f}(\frac{3}{4}) = 2(\frac{3}{4})^2 - 3\frac{3}{4}+1 = \frac{-1}{8} = -0{,}125$

Tableau de variation

x	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$\boldsymbol{f}'(x)$	-	0	+
$\boldsymbol{f}(x)$	$+\infty$ ↘	-0,125	↗ $+\infty$

Représentation graphique



Exercice .3

Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x-1}$; a) Déterminer les nombres réels a' ; b' et c' tels que :

$\forall\ x \in \mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; $\boldsymbol{g}(x)$ = a'x + b' + $\dfrac{c'}{2x-1}$. b) Etudier la fonction $\boldsymbol{g}$ et tracer sa courbe représentative.

Solution

$$\boldsymbol{g}(x) = a'x + b' = \frac{c'}{2x-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{g}(x) = \frac{(a'x+b')(2x-1)+c'}{(2x-1)} = \frac{2a'x^2 - a'x + 2b'x - b' + c'}{(2x-1)} = \frac{2a'x^2 - (a'-2b')x - (b'-c')}{(2x-1)}$$

Par identification des deux écritures, on trouve : $\begin{cases} 2a' = 2 \\ 2b' - a' = 2 \\ c' - b' = -1 \end{cases}$; l'équation (1) donne a' = 1 ; l'équation (2) donne b' = $\dfrac{3}{2}$; l'équation (3) donne c = $\dfrac{1}{2}$. Donc, les réels cherchés sont : a' = 1; b' = $\dfrac{3}{2}$; c' = $\dfrac{1}{2}$, et par conséquent, $\boldsymbol{g}(x)$ = x + $\dfrac{3}{2}$ + $\dfrac{1}{2(2x-1)}$.

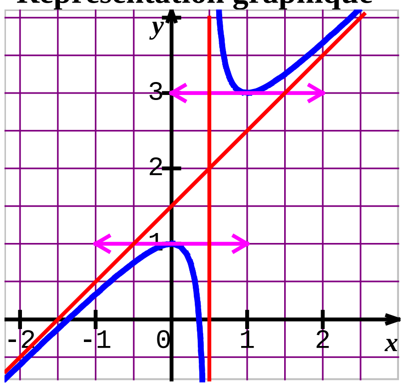
- Domaine de définition : $D_{\boldsymbol{g}} = \mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$.
- Il y a deux asymptotes : x= $\dfrac{1}{2}$ (A.V) ; y = x + $\dfrac{3}{2}$ (A.O) (car $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \dfrac{1}{2(2x-1)} = 0$).
- Dérivabilité : comme $\boldsymbol{g}$ est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $\boldsymbol{g'} : x \mapsto 1+\dfrac{-2}{2(2x-1)^2}$ d'où $\boldsymbol{g'} : x \mapsto \dfrac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$;

  Soit g '(x) = 0 ⇔ x = 0 ou x = 1.
- Sens de variation : ∀ x ∈]- ∞ ; 0] ∪[1 ; +∞[; $\boldsymbol{g}$ '(x) ≥ 0 d'où $\boldsymbol{g}$ est croissante ;
  ∀ x ∈ [0 ; 1] ; $\boldsymbol{g}$'(x) ≤ 0 d'où $\boldsymbol{g}$ est décroissante.
- Calcul de l'image de certains points : $\boldsymbol{g}(0) = 0 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2(-1)} = 1$; $\boldsymbol{g}(1) = 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2(+1)} = 3$

Tableau de variation

x	+∞		0		$\frac{1}{2}$		1		+∞
$\boldsymbol{g}$ '(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
$\boldsymbol{g}$(x)	-∞	↗	1	↘ -∞	‖	+∞ ↘	3	↗	+∞

Représentation graphique



Fonction associées

Exercice .4

Déduire de la courbe représentative de la fonction sinus, la courbe représentative des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin(x+\dfrac{5\pi}{3})$; b) $x \mapsto \cos(-x+\dfrac{5\pi}{6})$.

Solution

a) $x \mapsto \sin(x+\dfrac{5\pi}{3})$; la courbe cherchée est l'image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$; par : $t_{-\frac{5\pi}{3}\vec{i}}$.

b) $x \mapsto \cos(-x+\dfrac{5\pi}{6})$; la courbe cherchée est l'image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$; par : $t_{\frac{\pi}{3}\vec{i}}$.

B. Exercices

1. Le repère (O ; I ; J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 6x + 5$.
b) En déduire la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto |x^2 - 6x + 5|$

2. Etudier et représenter les fonctions suivantes
a) $\boldsymbol{f}(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$; b) $\boldsymbol{f}(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$;
c) $\boldsymbol{f}(x) = x - 2 - \frac{2}{x+3}$

3. Le repère (O ; I ; J) est orthonormé.
Soit la fonction $\boldsymbol{f} : x \mapsto \cos 2x$.
Etudier ***f*** et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
b) Déduire de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative des fonctions suivantes :
$\boldsymbol{f}_1 : x \mapsto \cos(2x + \frac{\pi}{4})$; b) $\boldsymbol{f}_2 : x \mapsto \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$

4. Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe d'équation $y = \frac{ax+b}{x+c}$.
ait le point Ω(-1 ; 2) comme centre de symétrie ;
admet , au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation y = -x.
Construire cette courbe.

5. Soit ***f*** la fonction définie sur [1 ; +∞[par ;
$\boldsymbol{f}(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}$.
$\mathscr{C}_f$ désignera la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) a) Déterminer la limite de ***f*** en + ∞ .
b) Etudier le sens de variation de ***f*** .
c) Dresser le tableau de variation de ***f***.
2) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.
3) Tracer $_f$ et Δ

6. Soit ***f*** la fonction définie sur [-3 ; 4[par ;
$\boldsymbol{f}(x) = \frac{x(2x-1)}{2x2 - 2x + 5}$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de ***f*** dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Déterminer le sens de variation de

2) Montrer que le point $A(\frac{1}{2};0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
3)Tracer $\mathscr{C}_f$.

8. Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0 ; 4\}$ par
$\boldsymbol{f}(x) = \frac{4}{x(x-4)}$.
Etudier, puis tracer la coure représentative de ***f***.

9. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par
$h(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$.
On pose $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
Préciser les asymptotes à $\mathscr{H}$.
2) Etudier les variations de h et faire le tableau de variation.
3) Représenter ($\mathscr{H}$) et ses asymptotes
Démontrer que le point A(1 ;-3) est centre de symétrie pour ($\mathscr{H}$).

10 Soit ***f*** la fonction définie sur par $\mathbb{R}^*$ par
$\boldsymbol{f}(x) = x + \frac{1}{x}$.
On note Γ sa courbe représentative dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Démontrer que *f* est impaire.
2) a) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter, graphiquement le résultat.
b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, démontrer que la droite Δ : d'équation y = x est asymptote à Γ au voisinage de +∞.
3) Etudier les variations de ***f*** sur]0 ; +∞[et faire son tableau de variation. Représenter Δ et Γ .

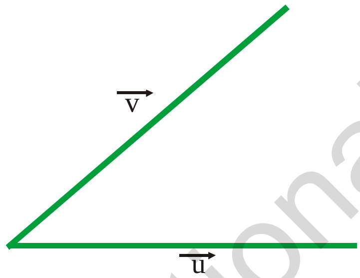
11 Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par
$\boldsymbol{f}(x) = \frac{4}{x^2+3}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Démontrer que l'axe des abscisses est asymptote à ($\mathscr{C}$), étudier les variations de ***f*** et faire son tableau de variation.

Angles orientés de vecteurs dans le plan orienté

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Angles orientés de deux vecteurs



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan orienté.
$(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$ désignent les deux angles définis par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Les angles orientés $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et $(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$ sont opposés.

$-(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{v}\ ;\ \vec{u})$ et $-(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- Un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ existe, si et seulement si, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- Soit A ; B ; C ; D des points dans le plan orienté,

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})$ existe, si et seulement si, A $\neq$ B et C $\neq$ D.

Mesure d'un angle orienté

- Un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est mesuré modulo 2π :

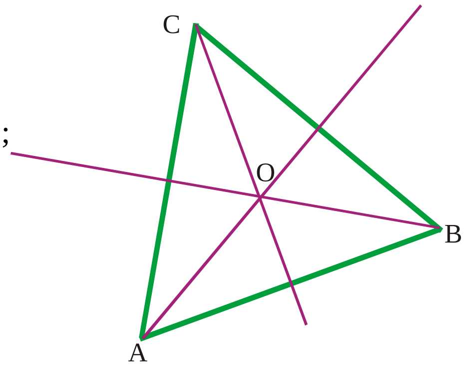
$$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha \iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ [2\pi]$$
$$\iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2\pi$$
$$\iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$$

- La mesure principale de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est celle des mesures de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ modulo $[2\pi]$, qui appartient à l'intervalle$]-\pi\ ;\ \pi[$.

Des exemples de la lecture et de la mesure principale sur des configurations de base

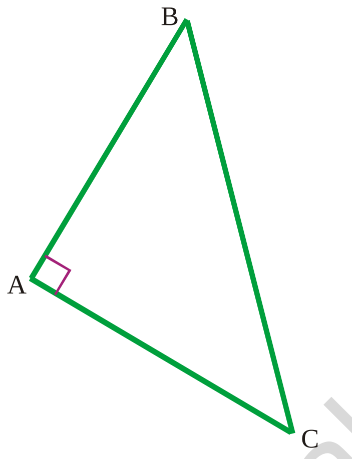
a) ABC un triangle équilatéral direct de centre O.

- $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$
- $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{6}$;
- $(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = -\frac{2\pi}{3}$;
- $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BO}) = -\frac{\pi}{6}$



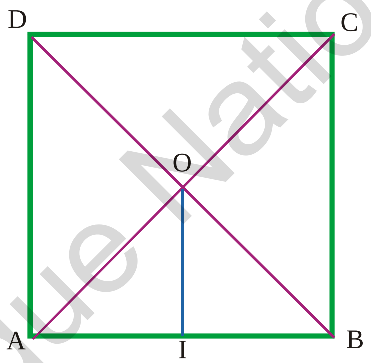
b) ABC un triangle isocèle rectangle en A <u>indirect</u>.

- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.



c) ABCD un carré <u>direct</u> de centre O

- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\left(\overrightarrow{DO}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$;
- $\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
- $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \pi$.



Avec I milieu de [AB], on a $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$; $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2) Modulo π

Un angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ peut être mesuré modulo π

$$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha\ ,\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha + \pi\ ;\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha - \pi\ ;\ [\pi];$$
$$\Leftrightarrow \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha + k\pi\ \ ;\ \ k \in \mathbb{Z}$$

- **Relation entre le modulo π et le modulo 2π**

$$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha\ [\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha & ;\ [2\pi] \\ \text{ou} & \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha + \pi & ;\ [2\pi] \end{cases} ;\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha \\ \text{ou} \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \alpha + \pi \end{cases}$$

Propriétés

- $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 0\ ;[\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \pi \end{cases}$
- $-\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \left(\vec{v}\ ;\ \vec{u}\right)\ ;[\pi]$
- $-\left(\vec{v}\ ;\ \vec{u}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)\ ;[\pi]$
- $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ ;[\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} - 2\pi\ ;\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Double d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- $2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est toujours mesuré modulo 2π,
- $-2(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 2(\vec{v}\ ;\vec{u})$;
- $-2(\vec{v}\ ;\vec{u})=2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

4) Colinéarité - Orthogonalité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

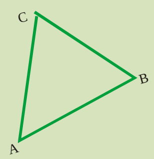
On a	Si, et seulement si
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0\ ;\ [\ \pi\ ]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires	$2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0\ ;$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}\ ;\vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux	$2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi$

Soit A ; B ; C trois points distincts deux à deux	Soit (AB) et (CD) deux droites
• A ; B ; C sont alignés $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \pi \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ • ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}\ ; \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]\ ; \Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = \pi$	• (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = 0$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \pi\ ; \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = 0;\ [\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) = 0$ • (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \pi$

5) Somme des angles d'un triangle

- ABC un triangle, on a

$$(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}) = \pi$$
$$2(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}) + 2(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}) = 2\pi$$



- ABC est un triangle rectangle en A si, et seulement si, $2(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}) = \pi$.

6) Relation angulaire de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$, on a :

$\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\vec{u};\vec{w}\right)+\left(\vec{w};\vec{v}\right)$; $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\vec{u};\vec{w}\right)+\left(\vec{w};\vec{v}\right)$; $[\pi]$; $2\left(\vec{u};\vec{v}\right)=2\left(\vec{u};\vec{w}\right)+2\left(\vec{w};\vec{v}\right)$.

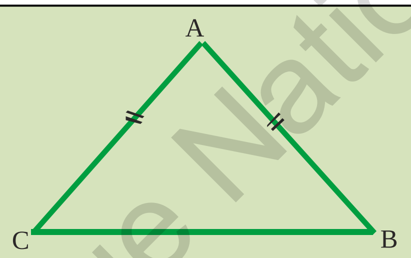
7) Effet d'une réflexion sur un angle orienté

Une réflexion transforme un angle orienté en son opposé.
Si, A' ; B' ; C' sont les images respectives des trois points A ; B ; C par une réflexion, alors :

- $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'B'})$;
  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$; $[\pi]$
  $= (\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'B'})$; $[\pi]$
- $2(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-2(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=2(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'B'})$

ABC est un triangle isocèle en A, si et seulement si,
La réflexion d'axe la médiatrice de [BC] transforme
A en A ; B en C ; C en B, si, et seulement si,

- $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=-(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$;
- $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=-(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$; $[\pi]$;
  $=(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$; $[\pi]$;
- $2(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=-2(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$.



8) Remplacement de l'un quelconque des vecteurs de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ par un vecteur qui lui est colinéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ;

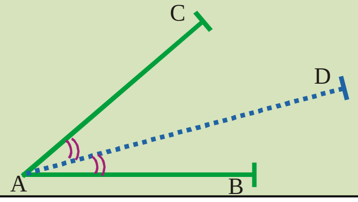
- $\forall k\in\mathbb{R}_+^*$: $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\vec{u};k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u};\vec{v}\right)$; $\forall k\in\mathbb{R}_-^*$: $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\vec{u};k\vec{v}\right)+\pi=\left(k\vec{u};\vec{v}\right)+\pi$,
- $\forall k\in\mathbb{R}^*$: : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\vec{u};k\vec{v}\right)$; $[\pi]$,
  $=\left(k\vec{u};\vec{v}\right)$; $[\pi]$
- $\forall k\in\mathbb{R}^*$: : $2\left(\vec{u};\vec{v}\right)=2\left(\vec{u};k\vec{v}\right)=2\left(k\vec{u};\vec{v}\right)$,

Exemple

• $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\pi$	• $2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
• $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+2\pi$ $=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	• $2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)=2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
• $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $[\pi]$	• $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $[\pi]$

9) Bissectrice intérieure d'un angle orienté

La droite (AD) est la bissectrice intérieure
de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, si et seulement si,
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$



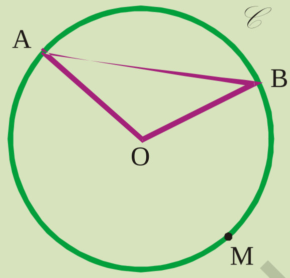
10) Théorème de l'angle inscrit et de la tangente

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soit [AB] une corde sur $\mathscr{C}$.

- Pour tout point M appartenant à $\mathscr{C}$ privé de A et B, on a $2\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

  C'est le théorème de l'angle inscrit.

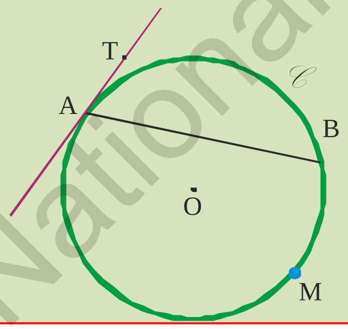
  L'angle $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)$ est un angle inscrit et $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$ est l'angle au centre relativement à la corde [AB].



- Pour tout point T distinct de A de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, on a : $2\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

  C'est le théorème de la tangente.

- Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O ; [AB] une corde sur $\mathscr{C}$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ privé de A et B.
  La droite (AT) est tangente à $\mathscr{C}$ en A, si et seulement si,
  $2\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.



11) Cocyclicité

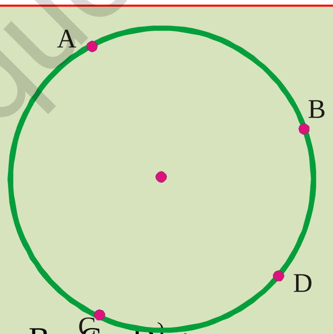
Quatre points A ; B ; C ; D non alignés trois à trois et distincts deux à deux sont : cocycliques (appartiennent à un même cercle c'est-à-dire que chacun appartient au cercle circonscrit au triangle formé par les trois autres), si et seulement si,

$\forall\ M\ ;N\ \in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}$

$2\left(\overrightarrow{PM}\ ;\ \overrightarrow{PN}\right)=2\left(\overrightarrow{QM}\ ;\ \overrightarrow{QN}\right)$;

avec $\{P\ ;\ Q\}\in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}\Leftrightarrow\forall\ M\ ;N\ \in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}$;

$\left(\overrightarrow{PM}\ ;\ \overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{QM}\ ;\ \overrightarrow{QN}\right)\ ;\ [\pi]$; avec $\{P\ ;\ Q\}\in\{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}-\{M\ ;\ N\}$



Exemple

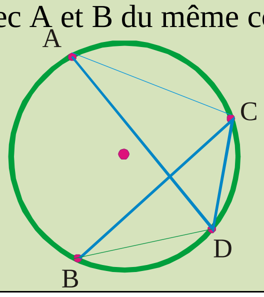
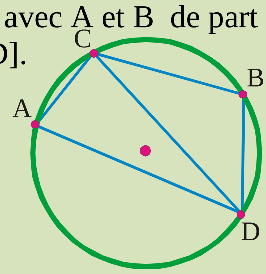
A ; B ; C ; D sont cocycliques si, et seulement si,

$2\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)[\ \pi\ ]\ \Leftrightarrow\ 2\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)=2\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow$

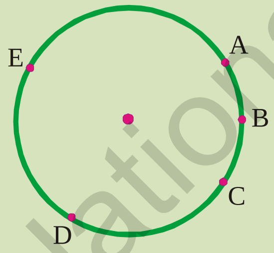
$2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$.

- Soit A ; B ; C ; D quatre points distincts deux à deux,
  $2\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=2\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\ [\ \pi\ ]\ \Leftrightarrow$
  Les quatre points A ; B ; C ; D sont cocycliques ou alignés.

Soit A ; B ; C ; D quatre points non alignés trois à trois et distincts deux à deux.

$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\Leftrightarrow$ Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques avec A et B du même côté de la corde [CD]. 	$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}+\pi\right)\Leftrightarrow$ Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques avec A et B de part et d'autre de la corde [CD]. 

- Des points appartenant à un même cercle sont cocycliques ! (cocyclicité donnée), et alors, par

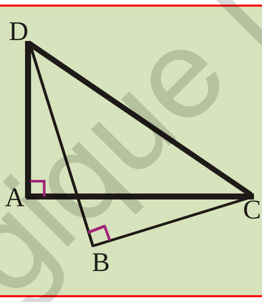


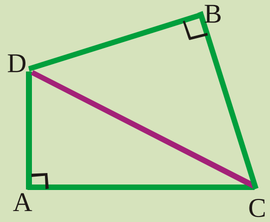
Exemple

$\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{EC}\ ;\ \overrightarrow{ED}\right)\ ;\ [\pi]\ ;$

$2\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=2\left(\overrightarrow{DE}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right)=2\left(\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right).$

- Les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse sont cocycliques. Cocyclicité remarquable), et alors, par





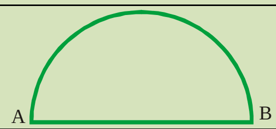
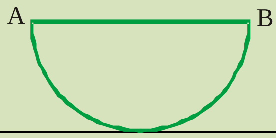
Exemple

$2\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)=2\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}\right)\ ;$

$\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\ ;\ [\pi]$

12) Ensemble de points

Soit A et B deux points distincts dans le plan orienté.

L'ensemble des points M du plan tels que	**est**
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=0\ ;\ [\pi]$	La droite (AB) privée de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\pi$	Le segment [AB] privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=0$	La droite (AB) privée du segment [AB].
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\ ;\ [\pi]$	Le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$	Un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B. 
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}$	Un demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B. 
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha\ ;\ [\pi]$; avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$	Le cercle Γ passant par A et B, tangent à la droite (AT) tel que : $\left(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=\alpha$, et privé de A et B.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha$;avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$	Le grand arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B du cercle Γ cité en haut.
$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\alpha+\pi$;avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$	Le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B du cercle Γcité en haut.

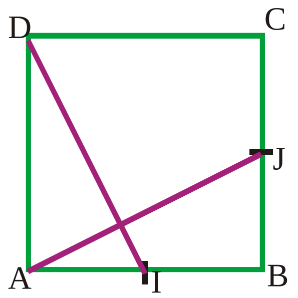
Savoir-faire

A. Applications

Orthogonalité de droites

Exercice 1

ABCD un carré. I et J milieux respectifs de [AB] ; [BC] ;.
Montrer que les droites (AJ) et (ID) sont perpendiculaires.



Solution

On a : $2(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = 2(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{ID})$(Chasles)

Or, $2(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \pi$ (car (AB) $\perp$ (AD)).

$$2(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -2(\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{CB})\ \ (\text{reflexion d'axe (BD)})\ ;$$
$$= 2(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CI})\ ;$$
$$= -2(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DI})\ ;\ (\text{réflexion d'axe la médiatrice de } [AB]),$$
$$= 2(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DA})\ ;$$

Donc : $2(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = 2(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DA}) + \pi + 2(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DI})$;

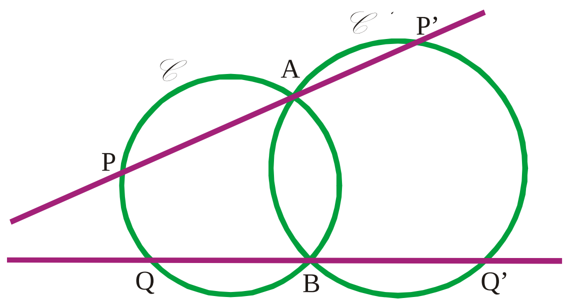
$$= \pi + 2(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DI})\ ;\ (\text{Chasles})$$
$$= \pi + 0 \qquad (\overrightarrow{DI} \text{ est colinéaire avec } \overrightarrow{DI})$$
$$= \pi$$

Donc ; $\boxed{2(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = \pi}$; d'où $\boxed{(AJ) \perp (ID)}$.

Parallélisme de droites

Exercice 2

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles sécants en A et B.
Une droite passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en P et en P'.
Une droite passant par B recoupe $\mathscr{C}$' en Q et en Q'.
Montrer que les droites (PQ) et (P'Q') sont parallèles.



Solution

$$2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'}) = 2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PP'}) + 2(\overrightarrow{PP'}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'});(\text{Chasles})$$
$$= 2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PA}) = 2(\overrightarrow{P'A}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'})\ ;\ (\text{remplacement par vecteur colinéaire})\ ;$$
$$= 2(\overrightarrow{BQ'}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BQ'})\ ;\ (\text{cocyclicité données sur } \mathscr{C} \text{ et } \mathscr{C}')\ ;$$
$$= 2(\overrightarrow{BQ}\ ;\ \overrightarrow{BQ'})\ ;\ (\text{Chasles})\ ;$$
$$= 0\ ;\ (\text{car } \overrightarrow{BQ} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BQ'}).$$

Donc ; $\boxed{2(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'}) = 0}$; d'où $\overrightarrow{PQ} \,/\!/\, \overrightarrow{P'Q'}$

Cocyclicité et ensemble de points

Exercice 3

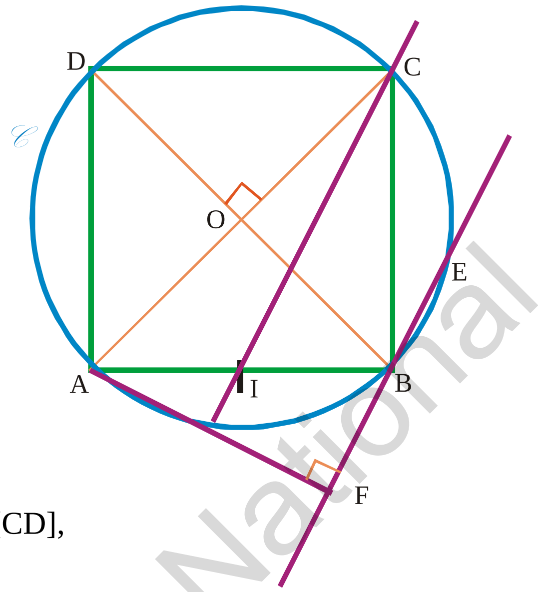
ABCD un carré direct de centre O, de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ I milieu de [AB].
La parallèle à (IC) passant par B recoupe $\mathscr{C}$ en E.
F est le projeté orthogonal de A sur (BE).
Donner la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)$.

2) Montrer que les points O ; A ; B ; F sont cocycliques.

Donner la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}\right)$

3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{4}[\pi]$.



Solution

1) Comme les points A ; B ; C ; E sont cocycliques
(cocyclicité donnée), A et E de part et d'autre de la corde [CD],
Alors, $\left(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)+\pi$

$=\frac{\pi}{4}+\pi\ =\frac{5\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}-2\pi\ ;[2\pi]$;

Donc $\boxed{\left(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)=-\frac{3\pi}{4}}$

2) Comme les triangles AOB et AFB sont rectangles de même hypoténuse [AB].
Donc ; les points O ; A ; B ; F sont cocycliques avec B et F de même côté de la corde [OA].

Donc ; $\left(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}\right)=\left(\overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{4}$;

Donc ; $\boxed{\left(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}\right)=\frac{\pi}{4}}$

3) $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{4}\ [\pi]\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right);\ [\pi]\Leftrightarrow$

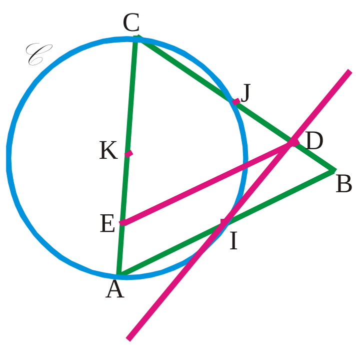
Les points M ; A ; B ; C sont cocycliques ; avec M $\neq$A et M $\neq$ B.

Donc ; l'ensemble demandé est le cercle $\mathscr{C}$ privé des points A ; B.

Cocyclicité et ensemble de points

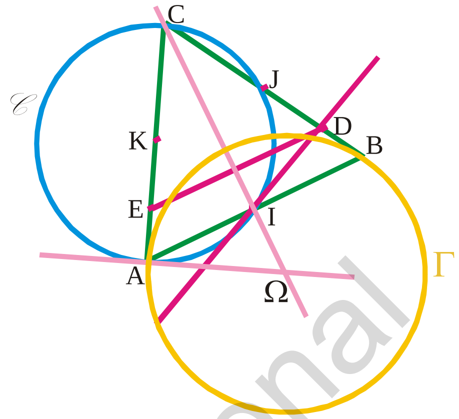
Exercice 4

ABC un triangle équilatéral direct. I ; J ; K les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA].
$\mathscr{C}$ un cercle circonscrit au triangle AIC.
La tangente à $\mathscr{C}$ en I coupe (BC) en D.
Le triangle DCE est équilatéral direct.
1) Montrer que J appartient à $\mathscr{C}$.
2) Montrer que les points I ; D ; C ; E sont cocycliques.
3) Déterminer et construire Γ l'ensemble des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{6}\ ;\ [\pi]$.



Solution

Comme : les triangles IAJ et JAL sont rectangles de même hypoténuse [AC].
Donc ; les points I ; J ; A ; L sont cocycliques.
Donc ; J appartient au cercle circonscrit au triangle (IAC) qui est $\mathscr{C}$.
Donc ; J $\in$ $\mathscr{C}$.



2) EDC est équilatéral direct.

Donc ; $2\left(\overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

Or ; $2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right)=2\left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; (angle inscrit et tangente)

$2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right)=2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; (remplacement par vecteur colinéaire)

Or; ABC est équilatéral direct ;

Donc, $2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $2\left(\overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{EC}\right)=2\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}\right)$;

D'où ; les points I ; D ; C ; E sont cocycliques.

3) $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{3}\ ;\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)\ ;\ [\pi]$;

Donc ; Γ est le cercle privé de A et B, tangent à (AC) et passant par A et B, de centre Ω intersection de la médiatrice de [AB] avec la perpendiculaire à (AC) en A.

B. Exercices

1. ABC un triangle isocèle rectangle en A direct, I, milieu de [BC].
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$;$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI})$;$(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AI})$;
$(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})$;$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BI})$; $(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IB})$;
$(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IC})$;$(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IC})$.

2. ABC un triangle équilatéral direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC})$;$(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{CO})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{BA})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{BC})$

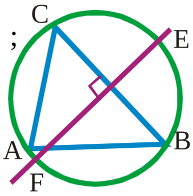
3. ABCD est un pentagone régulier direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC})$;$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{OA})$
$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{OA})$

4. ABC un triangle équilatéral direct de centre O.
I ; J ; K les milieux respectifs de [AB]; [BC] ; [CA]
1) Justifier que les points A ; I ; O K sont cocycliques ainsi que les points A ; B ; J ; K.
2) Donner tous les groupes de points de la figure, qui sont cocycliques pour la même raison que les deux groupes de points de la 1ère question.

5. ABC un triangle d'angles aigus, d'orthocentre H ; α ; β ; γ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. les points H_1 ; H_2 ; H_3 sont les symétriques de H respectivement par rapport à (AB) ; (BC) ; (CA).
1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A ; B ; C ; H sont cocycliques et donner deux autres points appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Montrer que $\left(\overrightarrow{\alpha\beta}\ ;\ \overrightarrow{\alpha A}\right)=\left(\overrightarrow{\alpha A}\ ;\ \overrightarrow{\alpha\delta}\right)$
Quelle est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{\alpha\beta}\ ;\ \overrightarrow{\alpha\delta}\right)$? Que représente H pour le triangle $\alpha\beta\,\gamma$?

6. ABCD un quadrilatère de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ tel que les droites (AD) et (BC) se coupent en E et les droites (AC)et (BD) se coupent en F. D'est le symétrique de D par rapport à la droite (EF).
Montrer que les points E ; F ; C ; D' sont cocycliques.

7. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$. la médiatrice de [BC] coupe $\mathscr{C}$ en E et F.
1) Montrer que $\left(\overrightarrow{FB}\ ;\ \overrightarrow{FE}\right)=\left(\overrightarrow{FE}\ ;\ \overrightarrow{FC}\right)$;
Montrer que : (AE) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$.



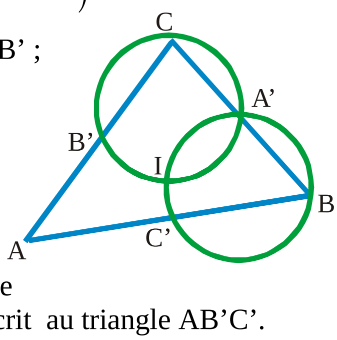
8. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$.
1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$.
2) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$.

9. ABC un triangle équilatéral direct de centre O. 1) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{3}$.
2) Déterminer et construire l'ensemble Γ ' des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{6};[\pi]$.

10 ABC un triangle isocèle en A, de cercle circonscrit $\mathscr{C}$. P un point du segment [BC] privé de B et C. La droit (AP) recoupe $\mathscr{C}$ en M.
1) Montrer que la droite (AB) est tangente au cercle $\mathscr{C}_1$ circonscrit au triangle BPM.
2) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au triangle CPM.

11 1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\alpha$ Soit k et k' deux réels non nuls.
Exprimer en fonction de α, l'angle $\left(k\vec{u}\ ;k'\vec{v}\right)$
Dans chacun des cas suivants :
a) kk'> 0 ; b) kk'< 0
2) Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\frac{2\pi}{3}$
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :
$\left(2\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$; $\left(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$; $\left(-\vec{u}\ ;-\vec{v}\right)$;$\left(-\vec{u}\ ;-3\vec{v}\right)$;
$\left(\vec{u}\ ;\frac{1}{2}\vec{v}\right)$;$\left(3\vec{u}\ ;5\vec{v}\right)$;$\left(2\vec{u}\ ;-7\vec{v}\right)$

12 ABC un triangle. A' ; B' ; C' des points des segments [BC] ; [CA] ; [AB] respectivement tels que : les cercles circonscrits aux triangles A'BC' et A'B'C se recoupent en I. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle AB'C'.



Chapitre **10** Suites numériques

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les suites

1) Définitions relatives aux suites

a) Définition d'une suite

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Notion et vocabulaire

Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique (U_n), on a les notations suivantes ;
Notation fonctionnelle : $U : E \to \mathbb{R}$
$n \mapsto U(n)$

Notation indicielle : $(U_n)_{n\in E}$; ou plus simplement (U_n).
- $U(n)$ ou U_n est appelé terme d'indice n ou terme général.
- le $n^{ième}$ terme est appelé terme de rang n.

b) Détermination d'une suite numérique

En général, une suite numérique (U_n) est déterminé par :
- Ou bien une formule explicite permettant de calculer U_n en fonction de n.
- Ou bien le premier terme et une formule de récurrence exprimant U_n en fonction de U_{n-1}.
- Ou bien les deux premiers terme et une formule de récurrence entre U_n ; U_{n+1} ; U_{n+2}.

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $U_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

  Cette suite est déterminée par une formule explicite, le terme général de cette suite est : $\dfrac{2n+1}{n+2}$, le premier terme est $U_0 = \dfrac{1}{2}$, le $15^{ème}$ terme ou terme de rang 15 est $U_{14} = \dfrac{2\times 14+1}{14+2} = \dfrac{29}{16}$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $V_n = \sqrt{n^2-1}$.
  Cette suite est déterminée par une formule explicite,
  Le premier terme est $V_1 = 0$; le $3^{ème}$ terme est $V_3 = \sqrt{3^2-1} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- Soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :
- $\begin{cases} W0 = 0 \\ W_n = \dfrac{1}{2}W_{n-1} + 3 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Cette suite est définie par son premier terme et une formule de récurrence.

On a : $W_1 = 3$; $W_2 = \dfrac{1}{2}W_1 + 3 = \dfrac{1}{2}\times 3 + 3 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{9}{2}$; $W_3 = \dfrac{1}{2}W_2 + 3 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2} + 3 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{12}{4} = \dfrac{21}{4}$; …

2) Représentations graphiques d'une suite numérique

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée dans le plan muni d'un repère, il est également possible de représenter les termes d'une suite sur un axe.

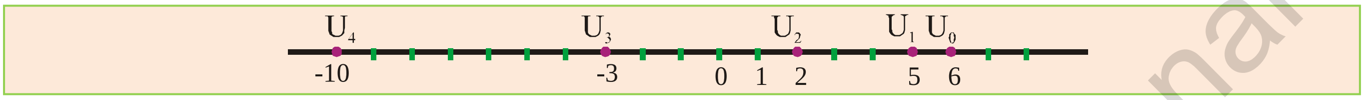
a) Représentation graphique d'une suite définie par une formule explicite

Exemple

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $U_n = 6 - n^2$.

Représentation de cette suite sur un axe :

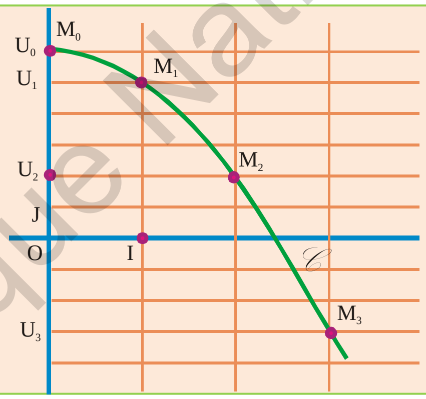
On a : $U_0 = 6$; $U_1 = 5$; $U_2 = 2$; $U_3 = -3$; $U_4 = -10$.



Représentation dans le plan

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto 6 - x^2$. Pour tout entier naturel n, on désigne par M_n le point de coordonnées (n ; f(n)).
L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (U_n) dans le plan.
Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des points de la suite sur l'axe (OJ).

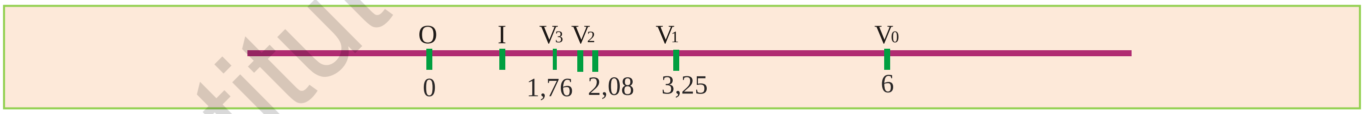


b) Représentation graphique d'une suite définie par une formule de récurrence

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} V_0 = 6 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(V_n + \dfrac{3}{V_n}\right) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

- Représentation de cette suite sur un axe :

On a : $V_0 = 6$; $V_1 = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$; $V_2 = \dfrac{217}{104} = 2{,}08$; $V_3 = 1{,}76$



Représentation de cette suite dans le plan

Le plan est muni du repère orthonormé (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction

$g : \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$

et Δ la droite d'équation y = x.

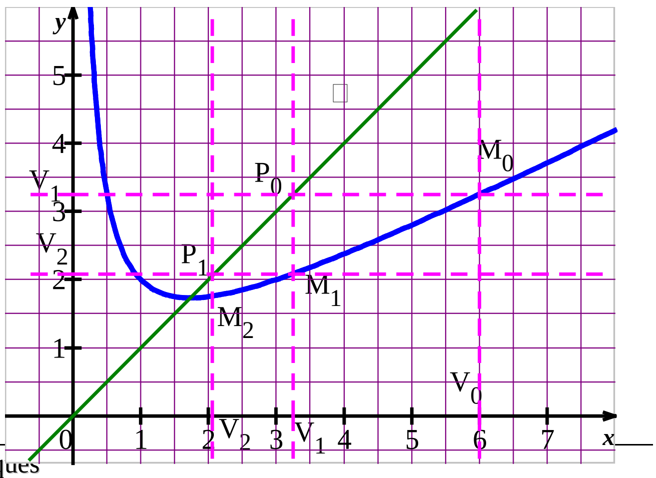
Construction de V_1

Soit M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $V_0 = 6$;
l'ordonnée de M_0 est $V_1 = g(V_0)$.

Soit P_0 le point de Δ d'ordonnée V_1 ; l'abscisse de P_0 est V_1.

Construction de V_2

Soit M_1 le point d'abscisse V_1 ; l'ordonnée de



M_1 est $V_2 = \boldsymbol{g}(V_1)$,

Soit P_1 le point de Δ d'ordonnée V_2 ; l'abscisse de P_1 est V_2.
Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe (OI) des termes d'une suite définie par une formule de récurrence .

3) Propriétés d'une suite numérique

a) Suite majorée, Suite minorée ; Suite bornée

- Dire qu'une suite U est majorée signifie qu'il existe un réel M, tel que pour tout naturel n, $U_n \leq M$
- Dire qu'une suite U est minorée signifie qu'il existe un réel m, tel que pour tout naturel n, $U_n \geq m$
- Dire qu'une suite U est bornée signifie que U est majorée et minorée.

Exemples

- U(n) est la suite des naturels, c'est-à-dire que pour tout naturel n ; $U_n = n$; (U_n) est une suite minorée par 0, car pour tout n, $U_n \geq 0$; (U_n) n'est pas majorée.
- (V_n) est la suite telle que pour tout naturels n ; $V_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

  (V_n) est une suite majorée par 1, car pour tout naturel n , $0 < n+1 < n+2$, donc $\dfrac{n+1}{n+2} < 1$, d'où $V_n < 1$.
  (V_n) est minorée par 0, car pour tout naturel n , on a : $V_n > 0$.
  Donc (V_n) est une suite bornée : pour tout naturel n, on a : $0 < V_n < 1$.

Remarques

- Une suite est positive si elle est minorée par 0.
- Une suite est négative si elle est majorée par 0.

b) Sens de variation d'une suite

- Dire qu'une suite (U_n) est croissante signifie que pour tout n, $U_n \leq U_{n+1}$
- Dire qu'une suite(U_n) est décroissante signifie que pour tout n, $U_n \geq U_{n+1}$
- Dire qu'une suite (U_n) est constante signifie que pour tout n, $U_n = U_{n+1}$
- Dire qu'une suite (U_n) est monotone signifie que (U_n) est décroissante ou décroissante.

Remarques

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n), il y a trois méthodes principales :

- On étudie directement le signe de $U_{n+1} - U_n$:
- Si pour tout naturel n, on a $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors $U_{n+1} \geq U_n$ et la suite (U_n) est croissante.
- Si pour tout naturel n, on a $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors $U_{n+1} \leq U_n$ et la suite (U_n) est décroissante.
- Si le signe de $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constant, alors la suite (U_n) n'est ni, croissante, ni décroissante.

- Lorsque la suite (U_n) est définie explicitement par $U_n = \boldsymbol{f}(n)$, il suffit que la fonction numérique $\boldsymbol{f}$ à variable réelle soit croissante sur $[0 ; +\infty[$ pour que (U_n) soit croissante et il suffit que $\boldsymbol{f}$ soit décroissante sur $[0 ; +\infty[$ pour que (U_n) soit décroissante.

En effet, pour tout naturel n, on a évidement : $n + 1 \geq n \geq 0$ et par conséquent dans le cas où $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$: $\boldsymbol{f}(n+1) \geq \boldsymbol{f}(n)$ c'est-à-dire $U_{n+1} \geq U_n$, donc (U_n) est croissante et dans le cas où $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, $\boldsymbol{f}(n+1) \leq \boldsymbol{f}(n)$ c'est-à-dire $U_{n+1} \leq U_n$, donc (U_n) est décroissante.

Lorsque la suite (U_n) est à termes strictement positifs, on compare le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

- Si $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors $U_{n+1} \geq U_n$, donc (U_n) est croissante;

- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors $U_{n+1} \leq U_n$, donc (U_n) est décroissante.

Exemples

- (U_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = n^2$.
  Pour tout naturel n : $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \geq 0$.
  Donc, (U_n) est une suite croissante.
  Mais on peut dire aussi que l'on a : $U_n = \boldsymbol{f}(n)$ où $\boldsymbol{f}$ est la fonction : $x \longmapsto x^2$
  Or, $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
  Donc, la suite (Un) est croissante.

- (W_n) est la suite telle que pour tout entier naturel n : $W_n = (-1)^n$; $W_0 = 1$; $W_1 = -1$; $W_2 = 1$, $W_3 = -1$…
  (W_n) est une suite qui n'est pas croissante car $W_2 > W_3$; et (W_n) n'est pas décroissante car $W_1 < W_2$.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$.
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$.
  Donc ; $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n < 0$; la suite (U_n) est décroissante.

II. Suites arithmétiques, suites géométriques

1) Suites arithmétiques

a) définition

Dire qu'une suite (U_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r, tel que, pour tout naturel n ;
$U_{n+1} = U_n + r$,
r est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemples

- La suite (Un) des naturels est une suite arithmétique de raison 1.
  $U_0 = 0$; $U_1 = 1$; $U_2 = 2$; …
- La suite (Vn) des naturels pairs est une suite arithmétique de raison 2.
  $V_0 = 0$; $V_1 = 2$; $V_2 = 4$; …
- La suite (Wn) des naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.
  $W_0 = 1$; $W_1 = 3$; $W_2 = 5$; …
- La suite (x) telle que : pour tout naturel n :
  $x_n = 4 - 3n$ est une suite arithmétique de raison -3. En effet, pour tout naturel n,
  $x_{n+1} - x_n = (4 - 3(n+1)) - (4 - 3n)$
  $= -3$, et par conséquent, $x_{n+1} = x_n - 3$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite donnée est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout naturel n, le réel : $U_{n+1} - U_n$ est constant (c'est-à-dire ne dépend pas de n).

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.
  - Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante
  - Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.
  - Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

b) Expression explicite d'une suite arithmétique

On admet la Propriété suivante :

Si (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r, alors pour tout naturel n, on a :
$U_n = U_0 + nr$

Remarque

On déduit de cette propriété que pour tous naturels, n et k, on a : $U_n = U_k + (n-k)r$.
En particulier, si (U_n) a pour premier terme U_1, le terme général est : $U_n = U_1 + (n-1)r$.

Exemples

- Soit (U_n) la suite des entiers naturels impairs, le premier terme de cette suite est $U_1 = 1$;
  la raison r = 2 ; On a : $U_n = U_1 + (n-1)r$
  $U_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$.
- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -3, tel que $U_3 = 7$.

En appliquant : $U_n = U_k + (n-k)r$; on a, $U_{100} = U_3 + (100-3)(-3) = 7 + (97)(-3) = -284$.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

On admet la propriété suivante :

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (U_n), alors :

- $S = \dfrac{\text{Nombre de termes} \times (1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$
- Cas particuliers $\begin{cases} S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2};\ \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_0 \\ S = U_1 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2};\ \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_1 \end{cases}$

Exemples

- La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \times (1+n)}{2}$.
- La somme des n premiers nombres impairs est : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \dfrac{n \times (1 + (2n-1))}{2} = n^2$.
- La somme des n premiers nombres pairs non nuls est : $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \dfrac{n \times (2+2n)}{2} = n(n+1)$.

2) Suites géométriques

a) Définition

Dire qu'une suite (Un) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que :
pour tout naturel n, $U_{n+1} = qU_n$.
Le réel q est la raison de la suite U.

Exemple

- La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2.
  $U_0 = 2^0 = 1$; $U_1 = 2^1 = 2$; $U_2 = 2^2 = 4$; $U_3 = 2^3 = 8$; …
- Une suite constante est une suite géométrique de raison 1 ; $U_0 = k$; $U_1 = k$; $U_2 = k$;…
- La suite (V_n) telle que pour tout naturel n, $V_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)$.

En effet, pour tout naturel n, on a : $V_{n+1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left[3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}V_n$

Remarque

Pour démontrer qu'une suite donnée de termes non nuls est géométrique, il suffit de démontrer que le réel $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ est une constante indépendante de n, alors si $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$
On a évidement $U_{n+1} = qU_n$ et q est la raison de cette suite géométrique.

b) Expression explicite d'une suite géométrique

On admet la Propriété suivante :

Si (U_n) est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison non nulle q, alors pour tout naturel n, $U_n = U_0q^n$.

Remarques

On déduit de cette propriété que pour tous nombres entiers naturels n et k, on a :

$U_n = U_kq^{n-k}$.

En particulier, si une suite (U_n) a pour premier terme U_1, le terme général est : $U_n = U_1q^{n-1}$.

Exemples

- Soit la suite géométrique (U_n) de premier terme $U_1 = 3$ et de raison q = 2, on a : $U_{10} = U_1\, q^{10-1} = 3\times(2)^9$.
- Soit la suite géométrique (U_n) de raison $q = \frac{-1}{2}$, et telle que $U_5 = 9$; On a $U_{100} = U_5\, q^{100-5} = 3\times\left(\frac{-1}{2}\right)^{95}$.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

On admet la Propriété suivante :

Si S une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (Un) de raison q différent de 1, alors :

- $S = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{(1-q^{\text{nombre de terme}})}{1-q}$
- Cas particuliers ; $\begin{cases} S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q};\ \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_0 \\ S = U_1 + U_1 + \ldots + U_n = ;\ U_1\frac{1-q^n}{1-q}\text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_1 \end{cases}$;

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n\ ;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  (U_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $U_0 = 2$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2\times\frac{1}{3^n}$.

  La somme des 20 premiers termes de cette suite est :

  $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{19} = U_0 \times\frac{(1-q^{20})}{1-q}$; $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{19}} = 2\times\frac{(1-(\frac{1}{3})^{20})}{1-\frac{1}{3}}$.

- Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_1 = 3$ et de raison q = 2.

  La somme des n premiers termes de cette suite est : $S = U_1 \times\frac{(1-q^n)}{1-q} = 3\times\frac{(1-2^n)}{1-2} = 3(2^n-1)$.

III. Limite d'une suite

1) Convergence d'une suite

Définition

Dire qu'une suite (Un) converge vers un réel ℓ, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang,

On note alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

On admet la Propriété suivante :

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_n = \boldsymbol{f}(n)$où $\boldsymbol{f}$ est une fonction numérique.
Si $\boldsymbol{f}$ a une limite en $+\infty$, alors (U_n) à une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{f}(n)$.

Remarques

- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.
- Si la fonction $\boldsymbol{f}$ n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de (U_n).

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\dfrac{-2n+1}{n+2}$ et f la fonction définie par $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{-2x+1}{x+2}$.
  On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x) = -2$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(x) = -2$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\sin(\pi n)$ et $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = \sin(\pi x)$.
  la fonction $\boldsymbol{g}$ n' a pas de limite en $+\infty$, par contre la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante , dont tous les termes sont nuls ; elle a pour limite 0.
- Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\sqrt{n^4+3n^2+1}$ et hl a fonction définie par : $\mathbf{h}(x) = \sqrt{x^4+3x^2+1}$.

On a, $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{h}(x) = +\infty$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$.

2) Suites de références convergeant vers 0

- Les suites : $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$; $(\dfrac{1}{n})$; $(\dfrac{1}{n^2})$; $(\dfrac{1}{n^3})$;… sont des suites de limites 0.
- Les suites géométriques de raison strictement comprise entre -1 et 1 sont des suites de limite 0.

3) Suites de références divergeant vers $+\infty$

- Les suites : $(\sqrt{n})$; (n) ; (n^2) ; (n^3) ;… sont des suites de limites $+\infty$.
- Les suites géométriques (q^n) , avec q un réel strictement positif supérieur à 1 sont des suites de limite $+\infty$.

4) Opérations et limites

(U_n) ; (V_n) sont des suites réelles ; ℓ et ℓ' sont des réels :

Somme

Si (U_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (V_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(U_n + V_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Produit

Si (U_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si (V_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(U_n \times V_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Quotient

Si (U_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
Si (V_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $(\dfrac{U_n}{V_n})$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

5) Théorèmes de comparaison

(U_n) ; (V_n) et (W_n) sont des suites ; ℓ est un réels.

- Si, à partir d'un certain rang : $U_n \geq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang : $U_n \leq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

- Si, à partir d'un certain rang : $|U_n - \ell| \leq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Théorème de gendarmes

Si, à partir d'un certain rang : : $V_n \leq U_n \leq W_n$ et si (Vn) et (Wn) convergent vers un même réel ℓ, alors (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Savoir-faire

A. Applications

Calcul de termes d'une suite

Exercice. 1

Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 dans chacun des cas suivants :

1. (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n : 5 \times 10^n + 2$.
2. (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n}$.
3. (U_n) est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

Solution

1. $U_n : 5 \times 10^n + 2$;
   On a : $U_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 50 + 2 = 52$; $U_2 = 502$;
   $U_3 = 5002$; $U_4 = 50002$ et $U_5 = 500002$

2. $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n}$;

   On obtient successivement ;

   $U_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$; $U_2 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$; $U_3 = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$; $U_4 = \dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{8}$ et $U_5 = \dfrac{1}{1+\frac{5}{8}} = \dfrac{8}{13}$.

3. Un est la somme des inverses des n premiers termes naturels non nuls.

   On a : $U_1 = \dfrac{1}{1} = 1$; $U_2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$; $U_3 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$;

   $U_4 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$; $U_4 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{5} = \dfrac{25}{12} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{137}{60}$

Remarque

on peut noter que pour tout naturel non nul : $U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{n+1}$

Représentation d'une suite

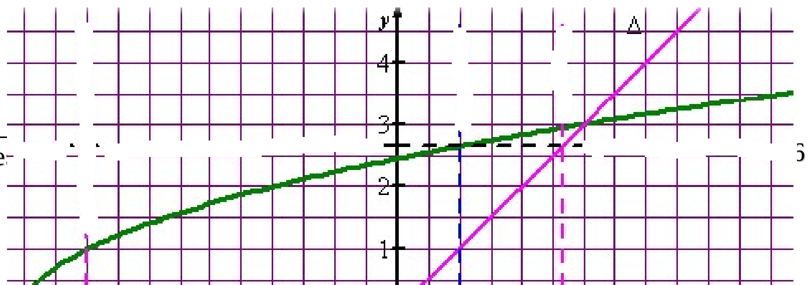
Exercice. 2

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -5$ et $U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}$

1. Représenter dans un même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$
2. Utiliser $\mathscr{C}$ et Δ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. Faire une conjecture sur le sens de variation de (U_n), ses bornes éventuelles.
4. De quel nombre semble se rapprocher quand n devient grand ?

Solution

Il semble que la suite (U_n) soit croissante, donc minorée par son premier terme U_0



qui vaut -5.
De plus, il est raisonnable de penser qu'elle est majorée par 3 et que (U_n) ne cesse de se rapprocher de 3 quand n grandit ; plus précisément :
U_n est aussi proche de 3 que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

Suite majorée, minorée, bornée

Exercice. 3

Les suites proposées sont-elles bornées :

$U: n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$; $V: n \mapsto (-1)^n$; $W: n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solution

- $U: n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$; U est définie sur $\mathbb{N}^*$; pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$; c'est-à-dire $2 \leq U_n \leq 3$,

  donc la suite est bornée par 2 et 3.

Remarque.

La valeur 3 est atteinte pour n = 1 et Un est aussi proche de 2 que l'on veut (sans jamais l'atteindre), pour que n soit suffisamment grand.

- $V: n \mapsto (-1)^n$ est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} V_n = -1 \text{ ; si } n \text{ est impair} \\ V_n = 1 \text{ ; si } n \text{ est pair} \end{cases}$

  Donc, la suite V est bornée par -1 et 1.

- $W: n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$; pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq 0$; c'est-à-dire $W_n \geq 0$; de plus $\sqrt{n} \leq n+1$; donc ; $W_n \leq 1$, Donc, la suite W est bornée par 0 et 1.

Exercice. 4

Sens de variation d'une suite

Etudier le sens de variation de la suite U proposée :

$U: n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$; $U: n \mapsto (-5)^n$; $U: n \mapsto \frac{3^n}{n+1}$; $U_0 = 4$ et $U_{n+1}: n \mapsto U_n - 0{,}71$

$U: n \mapsto n^2 + n - 5$

Solution

- $U: n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$; pour tout naturel n ;

  $U_{n+1} - U_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 5(n+1) - 1 - n^3 + 4n^2 + 5n + 1$;

  Or, $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; donc ; $U_{n+1} - U_n = 3n^2 - 5n - 8$.

  -1 est une racine du polynôme du second degré $x \mapsto 3x^2 - 5x - 8$, l'autre racine est donc $\frac{8}{3}$, d'où

  $U_{n+1} - U_n = 3(n+1)(n - \frac{8}{3}) = =(n+1)(3n-8)$;

  $U_{n+1} - U_n$ est donc du signe de $3n - 8$, il vient

  Si, $n \leq 2$, alors $U_{n+1} - U_n < 0$;

  Si, $n \geq 3$, alors $U_{n+1} - U_n > 0$;

  La suite U est strictement croissante à partir du rang 3.

- $U : n \mapsto (-5)^n$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel n,
  - Si n est pair, alors $U_n > 0$
  - Si n est impair, alors $U_n < 0$

  U n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

- $U : n \mapsto \dfrac{3^n}{n+1}$; la suite est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

  Pour tout naturel n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3^{n+1}}{n+2} \times \dfrac{n+1}{3^n} = \dfrac{3(n+1)}{n+2} = \dfrac{3n+3}{n+2}$;

  Or, $\dfrac{3n+3}{n+2} > 1$, donc pour tout naturel n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, $U_{n+1} > U_n$ (car $U_n > 0$), cela prouve que U est strictement croissante.

- $U_0 = 4$ et $U_{n+1} : n \mapsto U_n - 0{,}71$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel n,
  $U_{n+1} - U_n = - 0{,}71$; donc $U_{n+1} - U_n < 0$. Par conséquent, U est strictement décroissante.

- $U : n \mapsto n^2 + n - 5$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$, d'autre par, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc il est de même de leur somme : $x \mapsto x^2 + x - 5$.
  Il en résulte qu U est strictement croissante.

Suite arithmétique

Exercice. 5

a) U est une suite arithmétique $U_{10} = 9$ et $U_{17} = 17{,}4$.
- Calculer U_{21}.
- Calculer la somme S telle que $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{21}$.

b) Soit U la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que : $U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = -8$, et $U_1 + U_4 = -3$.
Déterminer, sa raison r et son premier terme U_0.

Solution

a) Soit r la raison de la suite arithmétique ; $U_{17} = U_{10} + 7r$; or $U_{10} = 9$ et $U_{17} = 17{,}4$, donc $r = \dfrac{8{,}4}{7} = 1{,}2$

- $U_{21} = U_{17} + 4r = 17{,}4 + 4 \times 1{,}2 = 17{,}4 + 4{,}8$; donc $U_{21} = 22{,}2$.
- $S = U_{10} + U_{11} + \ldots + U_{21}$; S est donc la somme des onze termes consécutifs de la suite arithmétique U de U_{10} à U_{21}.
- On en déduit S = $12 \times \dfrac{U_0 + U_{21}}{2} = 6 \times (9 + 22{,}2)$ d'où S = 187,2.

b) U est la suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0, donc pour tout naturel n ;
$U_n = U_0 + nr$. On en déduit :
$U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = 4 U_0 + (4 + 6 + 8 + 10)r = 4 U_0 + 28r$.
$U_1 + U_{11} = 2U_0 + (1 + 11)r = 2U_0 + 12r$.
Or ; $U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = -8$ et $U_1 + U_{11} = -3$

Donc, $\begin{cases} 4U_0 + 28r = -8 \\ 2U_0 + 12r = -3 \end{cases}$ la résolution du système donne $U_0 = \dfrac{3}{2}$ et $r = -\dfrac{1}{2}$.

Suite Géométrique

Exercice. 6

a) Soit U la suite géométrique de raison $\frac{-2}{3}$ et de premier terme U_0 tel que $U_0 = 9$.

Calculer S où $S = U_3 + U_4 + \ldots + U_{10}$.

b) U est une suite géométrique de raison positive, telle que $U_4 = 44$ et $U_{10} = 352$; calculer U_{13}.

Solution

a) S est la somme des huit termes consécutifs de la suite géométrique U, de U_3 à U_{10} ; la raison de cette suite est $\frac{-2}{3}$, donc $S = U_3 \dfrac{1-(\frac{-2}{3})^8}{1-(-\frac{2}{3})}$; Or $U_0 = 9$; donc $U_3 = 9 \times (\frac{-2}{3})^3$;

$$\text{Donc, } S = 9 \times (\frac{-2}{3})^3 \times \frac{1-(\frac{-2}{3})^8}{1-(-\frac{2}{3})} = -9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1-\frac{2^8}{3^8}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$= -9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{3^7} \times \frac{3^8-2^8}{3+2} = -\frac{2^3}{3^8} \times \frac{3^8-2^8}{5} = \frac{-10088}{6561}$$

b) Soit q la raison de la suite géométrique U : $U_{10} = U_4 q^6$; donc $q^6 = \frac{U_{10}}{U_4}$

Or ; $U_4 = 44$ et $U_{10} = 352$, donc $q^6 = \frac{352}{44} = 8$

D'autre part, $U_{13} = U_{10} q^3 = 352 q^3$; on a :

- $q^6 = 8$, soit $(q^3)^2 = 8$;
- $q \geq 0$, donc $q^3 \geq 0$

On en déduit : $q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

Finalement : $U_{13} = 352 \times 2\sqrt{2}$; soit $704\sqrt{2}$.

Remarque : $q^3 = \sqrt{8} = (\sqrt{2})^3$; la fonction $x \mapsto x^3$ étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit : $q = \sqrt{2}$.

Limite d'une suite

Exercice. 7

A l'aide des opérations sur les suites, déterminer, la limite de la suite U proposée :

a) $U : n \mapsto -2+\sqrt{n}$; b) $U : n \mapsto \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$; c) $U : n \mapsto -5n^2 - n$; d) $U : n \mapsto 3^n + (\frac{-1}{3})^n$;

e) $U : n \mapsto \frac{(-0,5)^n}{7^n+6}$; f) $U : n \mapsto \frac{n^3}{(0,7)^n}$

Solution

a) $U : n \mapsto -2+\sqrt{n}$; cette suite est définie sur $\mathbb{N}$; c'est la somme de la suite constante $n \mapsto -2$ et la suite de référence : $n \mapsto \sqrt{n}$ qui diverge vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

b) $U : n \mapsto \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$; U est définie seulement su r $\mathbb{N}^*$, on sait que , $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, Donc , $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

L'inverse d'une suite de limite $+\infty$, étant une suite de limite nulle, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

c) $U : n \mapsto -5n^2 - n$; U est définie sur $\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (-5n^2) = -\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$;

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ (la somme de deux suites de limite $-\infty$ a pour limite $-\infty$).

d) $U : n \mapsto 3^n + (\frac{-1}{3})^n$; U est définie sur $\mathbb{N}$, comme $\left| \frac{-1}{3} \right| < 1$; la suite géométrique $n \mapsto (\frac{-1}{3})^n$ a pour limite 0 ; d'autre part ; 3 > 1, donc la suite géométrique $n \mapsto 3^n$ a pour limite $+\infty$, on peut conclure $\lim\limits_{n \to \pm} = \pm\infty$

e) $U : n \mapsto \frac{(-0,5)^n}{7^n + 6}$; U est définie sur $\mathbb{N}$, -1 < -0,5 < 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,5)^n = 0$;

7 > 1 ; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (7^n + 6) = +\infty$.

De plus, on sait que le quotient d'une suite de limite 0 par une suite de limite $+\infty$ est une suite de limite 0.
On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} U = 0$

f) U : $U : n \mapsto \frac{3^n}{(0,7)^n}$ est définie sur $\mathbb{N}$, on sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$.

d'autre part, comme , 0 < 0,7 < 1, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,7)^n = 0$

la suite U est donc le quotient d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0.
Pour conclure il suffit, de remarquer que l'on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $(0,7)^n > 0$,
On peut alors affirmer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} U = +\infty$.

B. Exercices

1. Le plan est muni du repère (O ; I ; J) dans chacun des cas suivants, représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (U_n)

a) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 2\sqrt{U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n^2 - 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Soit (V_n) la suite de terme général
$V_n = 2 + n(-1)^n$
Calculer les 5 premiers termes de cette suite et représenter ces termes sur un axe.

3. Minorer et majorer aux mieux la suite
$U : n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

4. U est la suite définie pour tout naturel n par :
$U_n = n^2 - 2n + 4$.
Montrer que U est minorée par -5.

5. Montrer que la suite U définie pour tout naturel

n par : $Un = \dfrac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

6. Montrer que la suite U définie pour tout naturel n par : $Un = \dfrac{2n+1}{n+3}$ est strictement croissante.

7. Etudier la monotonie de chaque suite U et V définie ci-dessous

possible de choisir U_0 de telle sorte que U soit une suite constante.

a) $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 8$; b) $U_{n+1} = -U_n^2 + 2U_n + 1$

c) $U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{1 - U_n}$

9. Etudier la monotonie de la suite U telle que, pour tout $n \geq 1$; $U_n = \dfrac{2^n}{n}$.

10 Dans chacun des cas suivants, démontrer que (Un) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 4 - 3(n-1)$;

b) $\begin{cases} U_5 = -1 \\ 5U_{n+1} = 5U_n - 2 \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

11 Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite (U_n) est arithmétique, géométriques ou ni l'une ni l'autre.

a) $U_n = (-1)^n$; b) $U_n = 2^n - 3^n$; c) $U_n = -3(n+2)$

d) $U_n = (-3)^{n+2}$; e) $U_n = (-3)^n + 2$; f) $U_n = 10^{-n}$

12 U est la suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout naturel n par $U_n = U_{n+1} - 5$.

1. Démontrer que U est une suite arithmétique et préciser sa raison.
2. Déterminer U_n explicitement en fonction de n .
3. Calculer $S_n = U_3 + U_4 + \ldots + U_n$ et déterminer n pour que $S_n = 6456$.

13 U est la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$.

1. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U4 ; U_5.

Si $U_n \neq 0$, on pose $t_n = \dfrac{1}{U_n}$, calculer : t_0 ; t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5.

2. Montrer que la suite est une suite arithmétique.
3. Déduisez une expression de U_n en fonction de n.

14

a) $U_n = \frac{2n+5}{n+1}$; b) $V_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

a) $U_n = 2^n 3^{n+1}$; b) $V_n = (n-3)^2$;

a) $U_n = \frac{n^2+1}{2n}$; b) $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = V_n - 3 \end{cases}$

8. U est la suite définie par U_0 et pour tout naturel n par la récurrence ci-dessous. Est-il

15 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 10U_n ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Calculer U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5.

Démontrer que pour tout naturel n non nul, U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique que l'on déterminera.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

16 a ; b ; c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de plus :

$\begin{cases} a+b+c = 19 \\ 2a+b-c = 5 \end{cases}$; Calculer a ; b ; c.

Dans chacun des cas suivants, démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = (2)^{n+3}$; b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4^{n-1}$;

c) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{3^n}{24^n}$; d) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^n}$

17 En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer la limite de la suite U proposée.

a) $n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$; b) $n \mapsto \frac{1}{n^2}$; c) $n \mapsto \sqrt{n^4+3}$

d) $n \mapsto \sqrt{4n^2+1} - n$; e) $n \mapsto 2n + \cos n^2$;

f) $n \mapsto \frac{-n5}{n^2 - \pi}$

18 U est la suite définie sur par $U_n = (\frac{n}{10} - 1)^n$

1. Calculer les onze premiers termes de la suite U. Quelle conjecture est-on incité à formuler ?

Démontrer que U a pour limite $+\infty$.

Chapitre 11 Transformations

Faire savoir

L’essentiel du chapitre

A - Isométries du plan

A-1) Définitions et propriétés

On appelle isométrie toute transformation du plan telle que pour tous les points M et N d’images M’et N’ on a : MN = M’N’.

Propriétés

P1 Toute isométrie conserve

- l’alignement des points
- le parallélisme des droites
- l’orthogonalité des droites
- la mesure des angles
- le barycentre des points pondérés
- les longueurs
- les aires

Théorème

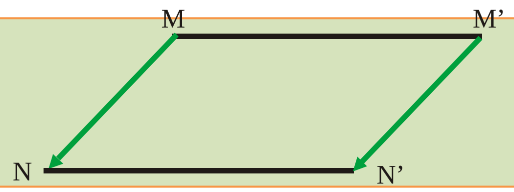
Soient ABC et A’B’C’ deux triangles tels que : AB = A’B’ ; BC = B’C’ ; AC = A’C’.
Il existe une isométrie et une seule qui applique A sur A’, B sur B’ et C sur C’.

A-2) Rappel

2-1) Translation

a) Propriétés caractéristiques d’une translation

Soit ***f*** une application du plan dans lui-même, ***f*** est une translation si est seulement si, pour tous M et N d’images respectives M’ ; N’ ; on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$;



Démonstration

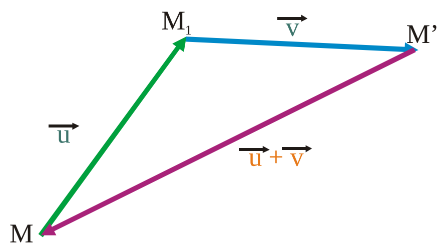
Si ***f*** est une translation pour tous points M, N d’images respectives M’ etN’ on a **:** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.
Réciproquement, on suppose que pour tous points M ; N d’images respectives M’ et N’, on a :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, démontrons que f est une translation .
Soit A un point et A’ son image par ***f***.
Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ et ***f*** est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b) Composée de deux translations

Propriété : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Démonstration

Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M’ ; l’image de M_1 par $t_{\vec{v}}$.
On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} + \vec{v}$.
Ainsi, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est l’application qui à tout point



M associe le point M’ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$.,

$t_{\vec{u}} \text{ o } t_{\vec{v}}$ est donc la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Remarque

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, donc $t_{\vec{u}} \text{ o } t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \text{ o } t_{\vec{u}}$.
  On dit que la composée des translations est commutative (Fig. 1)

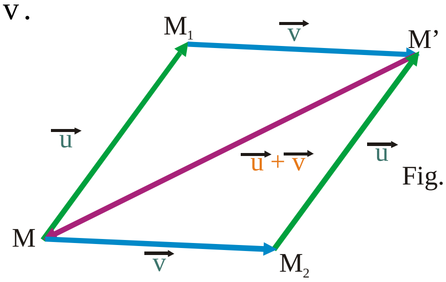


Fig.1

- Si $\vec{v} = -\vec{u}$ on obtient : $t_{\vec{u}} \text{ o } t_{-\vec{u}} = \text{Id}$.
  Cette relation caractérise les bijections réciproques.
- Toute translation est une transformation du plan, la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

Exemple

Sur la figure.2 :

$t_{\overrightarrow{AB}} \text{ o } t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$;

$t_{\overrightarrow{BC}} \text{ o } t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \text{ o } t_{\overrightarrow{AD}}$;

$(t_{\overrightarrow{AD}})^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

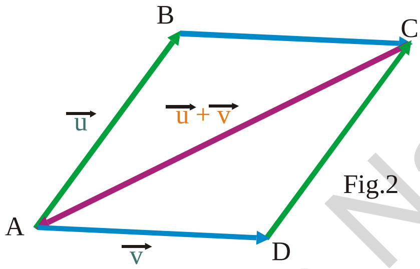


Fig.2

Expression analytique d’une translation

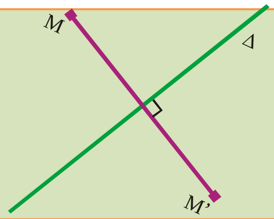
Le plan est muni du repère $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$; soit t la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; M(x ; y) un point du plan et M’(x’ ; y’) son image par t ; on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow x' - x = a$ et $y' - y = b$.

L’expression analytique de la translation du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est telle que : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2.2) Symétries orthogonales

Propriétés caractéristiques d’une symétrie orthogonale

M’ est le est le symétrique de M par rapport à (Δ), si et seulement, si Δ = Med(M ; M’).



Composée de deux symétries orthogonales d’axe parallèles

Propriété

Soit (Δ) et (Δ’) deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O’ projeté orthogonal de O sur (Δ’) ; la composée S_1 o S_2 des symétries orthogonales d’axes respectifs (Δ) et (Δ’) est la translation t de vecteurs $2\overrightarrow{OO'}$.

Démonstration

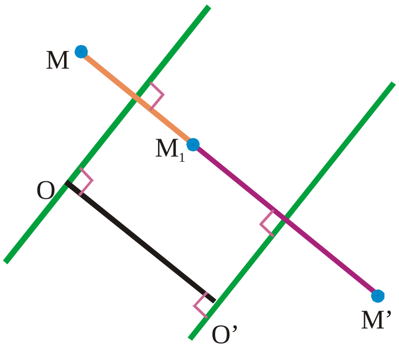
Soit M un point M_1 son symétrique par rapport à (Δ), M’ est le symétrique de M_1 par rapport à (Δ’).
H et H’ sont les projetés orthogonaux de M sur (Δ) et (Δ’).

Ona : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

$= 2\overrightarrow{MM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'}$

$= 2\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{OO'}$

Donc ; $S_{(\Delta)} \text{ o } S_{(\Delta')} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$



Remarques

- Lorsque les axes (Δ) et (Δ’) sont confondus on obtient $S_{(\Delta)}$ o $S_{(\Delta')} = I_d$.
- La transformation réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta')}$.
- Les transformations $S_{(\Delta)}$ o $S_{(\Delta')}$ et $S_{(\Delta')}$ o $S_{(\Delta)}$ sont réciproques l’une de l’autre.

Décomposition d’une translation

Propriété

Soit une t translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

Pour toute droite de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite et une seule telle que : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta}$ o $S_{\Delta'}$.

Démonstration

- Existence : soit Δ’ l’image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

  D’après l’étude précédente Δ vérifie : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'}$ o S_{Δ}
- Unicité : soit Δ’’ une droite telle que : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta''}$ o S_{Δ} ; montrons que Δ’’ et Δ’ sont confondues.

  On a = $S_{\Delta''}$ o S_{Δ} = $S_{\Delta'}$ o S_{Δ} $\Rightarrow$ ($S_{\Delta''}$ o S_{Δ}) o ($S_{\Delta'}$ o S_{Δ}) $\Rightarrow$ $S_{\Delta''} = S_{\Delta'}$ $\Rightarrow$ $_{\Delta''} = _{\Delta'}$.
  Donc, les droites (Δ’) et (Δ’’) sont confondues.

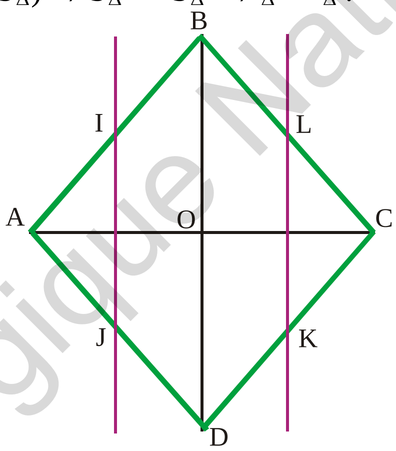
Exemples

Soit ABCD un losange, de centre O.
I ; J ; K et L les milieux respectifs des côtés [AB] ; [AD] ; [CD] et [CB].
On a :

$t_{\overline{AD}}$ = $S_{(BD)}$ o $S_{(IJ)}$;

$t_{\overline{AO}}$ = $S_{(KL)}$ o $S_{(BD)}$;

$t_{\overline{AC}}$ = $S_{(KL)}$ o $S_{(IJ)}$.

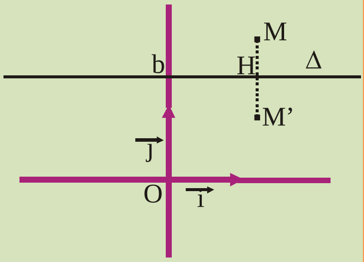


Expression analytique des symétries orthogonales particulières

Le plan est muni d’un repère (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$) , soit S une symétrie orthogonale d’axe (Δ). M(x ; y) un point du plan, M’(x’ ; y’) son image par s. On propose de déterminer l’expression analytique de s dans trois cas particuliers :

1) **(Δ) parallèle au axe des abscisses**

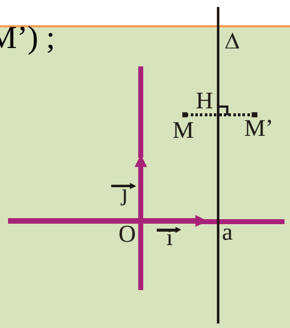
Soit (Δ) la droite d’équation : y = b et M
le point d’intersection de la droite (Δ) avec (MM’) ; les points M et M’ ont même abscisse et H le milieu de [MM’]. Donc,
x = x’ et y + y’ = 2b.
L’expression analytique de la symétrie orthogonale d’axe (Δ) : y = b est telle que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$



2) **(Δ) parallèle à l’axe des ordonnés** : Soit (Δ) la droite

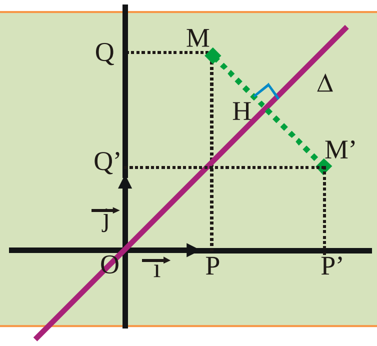
Soit (Δ) la droite d’équation x = a, et H le point d’intersection de (Δ) et (MM’) ;
les points M et M’ont même ordonnée et H est le milieu de [MM’].Donc,
l’expression analytique de la symétrie orthogonale d’axe (Δ)
d’équation : x = a est telle que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$



3) **(Δ) est la première bissectrice du repère.**

(Δ) est la droite d'équation y = x ; soient P ; Q ; P' ; Q' les projetés orthogonaux des points M et M' sur les axes du repère.
Les images respectives par s des points P et Q sont les points P' et Q'. Donc, x' = y et y' = x.
L'expression analytique de la symétrie orthogonale autour de 1^{ere} bissectrice est telle que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



2.3) Rotations

Composée de symétries d'axes sécants

Propriété

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}$.

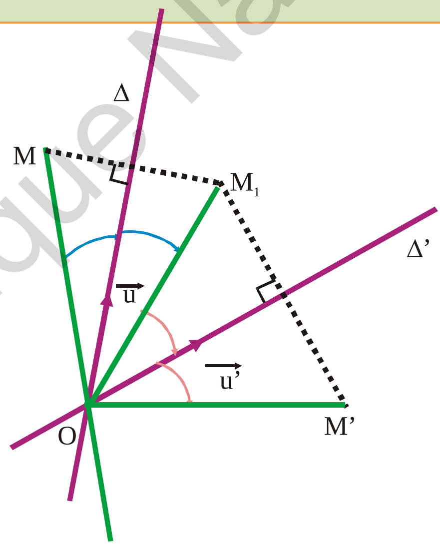
Démonstration

Le point O est invariant par $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$,
Soit M un point distinct de O. M1 son symétrique par rapport à (Δ').

Démontrons que : $\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'})} = 2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})} \end{cases}$

On a : $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$; donc OM = OM'.

$$\widehat{(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'})} = \widehat{(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM_1})} + \widehat{(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM'})}$$
$$= 2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})} + 2\widehat{(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \vec{u'})}$$
$$= 2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})}$$



Remarque

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})}$.

- Les transformations $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ sont donc réciproques l'une de l'autre.
- Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires $2\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})} = \pi$ et $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la symétrie de centre O.
- On déduit la décomposition d'une rotation que les rotations conservent les distances et les angles orientés.

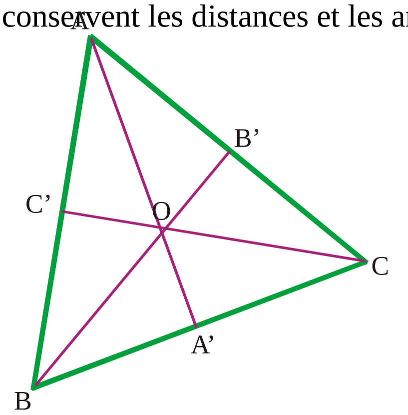
Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O ; soient A' ; B' C' les milieux respectifs des côtés [BC] ; [CA] ; [AB].

On a : $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = r_{(A;\ \frac{-2\pi}{3})}$; $S_{(CB)} \circ S_{(CC')} = r_{(C;\ \frac{\pi}{3})}$;

$S_{(CC')} \circ S_{(AA')} = S_{(BB')} \circ S_{(CC')} = r\,(O;\ \frac{2\pi}{3})$.

$S_{(BB')} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_{(BB')} = r\,(B;\ \frac{-\pi}{3})$.



Propriétés caractéristiques

Soit f une application du plan dans lui même et α un angle non nul.
f est une rotation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N'
On a : MN = M'N' et $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'}\right)} = \alpha$.

Démonstration guidée

On suppose que f est une rotation d'angle α. Démontrons que pour tous points M ; N d'images respectives M' et N'.

On a : $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'}\right)} = \hat{\alpha}$. Soit O le centre de la rotation f ;

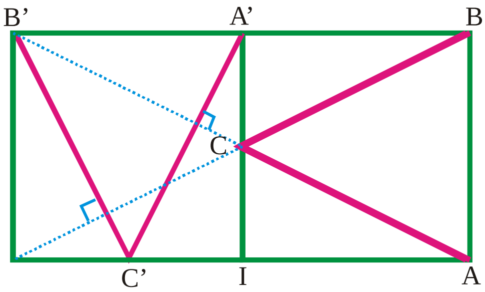
- Vérifier que $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{MN}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{MN'}\right)}$
- Justifier que : $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{M'N'}\right)}$ sont opposés.

  (On pourra utiliser la conservation des angles par une rotation). Conclure

Réciproquement, On suppose que f est une application telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : MN = M'N' et $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'}\right)} = \hat{\alpha}$;

- Démontrons que f est une rotation d'angle α.
- Démontrons maintenant que f admet un point invariant. Soit M un point et M' son image par f. O le point tel que le triangle OMM' soit isocèle en O et $\widehat{\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)} = 0$. Soit O' l'image de O par f.
- Démontrons que O'M' = OM' et $\widehat{\left(\overrightarrow{O'M'}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)} = 0$ (on pourra introduire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de la relation de Chasles sur les angles orientés).

Exemple



Sur la figure ci-contre les images des points A ; B et C par la rotation $r_{(I\ ;\ \frac{\pi}{2})}$ sont respectivement A' ; B' et C' , si $\hat{\gamma}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On a donc ; $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'B'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{B'C'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CA'}\right)} = \hat{\gamma}$.

A-3) Exemples de composées d'isométries

a) Composition de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angles $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ est une rotation r_3 de centre O et d'angle orienté $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$.

$r_{1(O;\hat{\alpha}1)} \circ r_{1(O;\hat{\alpha}2)} = r_{3(O;\hat{\alpha}1+\hat{\alpha}2)}$

b) Composition d'une rotation et d'une translation

P_2 : La composée d'une rotation r d'angle orienté non nul $\hat{\alpha}$ et d'une translation est une rotation r' d'angle orienté $\hat{\alpha}$.

c) Composée de deux rotations de centres différents (distincts)

P_3 La composée de deux rotations r et r' de centres distincts et d'angles respectifs $\hat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ est :

- une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \hat{0}$;
- une translation si $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \hat{0}$;

d) Décomposition d'une rotation

P$_4$: Soit r une rotation de centre K et d'angle $\hat{\alpha}$; O un point distinct de K. Il existe deux translations t_1 et t_2 et une rotation r' de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$ telles que :

$r = t_1 \circ r'$; $r = r' \circ t_2$

B – Similitudes

B-1) Définitions et propriétés

Définition

K étant un nombre strictement positif, on appelle similitude de rapport K, toute transformation du plan telle que :
Pour tous les points M et N d'image M' et N' on a M'N' = kMN.

P$_1$ Toute similitude est une composée d'une isométrie et d'une homothétie.

Toute similitude conserve :

- l'alignement des points
- le parallélisme des droites
- l'orthogonalité des droites
- la mesure des angles
- le barycentre des points pondérés

Toute similitude multiplie

- Les longueurs par le rapport
- Les aires par le carré du rapport

Théorème

Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.
Il existe une similitude et une seul qui applique A sur A, B sur B' et C sur C'.

B-2) Exemples de composition de similitudes

a) Composition de deux similitudes de même centre

La composée de deux homothéties de même centre Ω et de rapport respectifs k1 et k2 est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$.

b) Composition d'une homothétie et d'une translation

P3 La composée de deux homothéties de rapport k et d'une translation est une homothétie de rapport k.

c) Composition de deux homothéties de centres distincts

La composée de deux homothéties de centre distincts et de rapport k respectifs k_1 et k_2 est :

- une homothétie de rapport $k_1 \times k_2$ si $k_1 \times k_2 \neq 1$
- une translation si $k_1 \times k_2 = 1$

d) Décomposition d'une homothétie

P4 Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 1$; soit O un point distinct de
Il existe deux translations t_1 et t_2 et une homothétie h' de centre O et de rapport k telles que :
$h = t_1 \circ h'$ $h = h' \circ t_2$

Savoir-faire

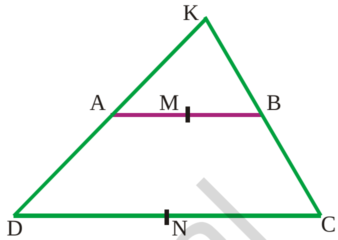
A. Applications

Démonstration des propriétés

Exercice 1

On considère un trapèze ABCD tel que (AB) / / (CD). On désigne par K le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

Montrer que le milieu M de [AB], le milieu N de [CD] et K sont alignés.



Hypothèse :

ABCD un trapèze ; K = (AD) $\cap$ (BC) ; M milieu de [AB] et N milieu de [CD].

Conclusion

K, M et N sont alignés

Solution

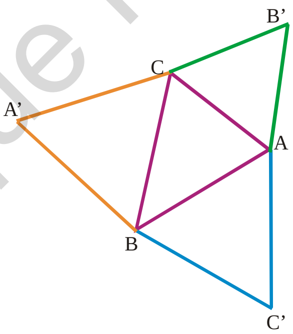
A ; B ; C et D sont quatre points tels que (AB) / / (DC) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, Il existe une homothétie h et une seule qui transforme A en D et B en C. le centre de cette homothétie est K, l'image par h du milieu M de [AB] et le milieu N de [DC].

Et puisque un point et son image par h et le centre de h sont alignés, alors, K, M et N sont alignés.

Exercice 2

On considère un triangle quelconque ABC sur les côtés (AB) ; (BC) et (AC) extérieurement, on construit les triangles équilatéraux ABC' et BCA' et CAB'.

Montrer que : AA' = BB' = CC'.



Hypothèse :

ABC un triangle ; ABC' un triangle équilatéral ; BCA' un triangle équilatéral ; CAB' un triangle équilatéral

Conclusion :

AA' = BB' = CC'

Solution

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC'};\overrightarrow{AB}}\right)$.

Par r B est l'image de C', B' est l'image de C ; [BB'] est donc l'image de [CC'], on en déduit que : BB' = CC'.

La rotation r' de centre B et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{BA}}\right)$, permet de montrer que CC' = AA'.

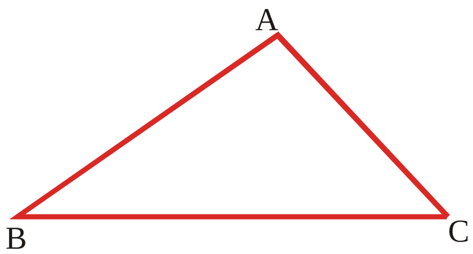
Construction des figures

Exercice 1

Figure auxiliaire satisfaisant à toutes les conditions sauf une.

On donne le triangle ABC. Construire un carré MNPQ tel que :

1) M$\in$[AB] ; 2) N$\in$[AC] ; 3) (PQ) = (BC)



Solution

Recherche d'une démarche ;

- Construire un carré qui satisfait à 2 des 3 conditions est simple, on peut trouver une infinité de solutions.
  Le problème consiste alors, à trouver parmi ces constructions celle ou celles qui satisfait à la 3ème condition.
- Construisons d'abord un carré EFGH qui satisfait au condition (1) et (2) : E $\in$[AB] et (GH) = (BC).
- Soit ***f*** une homothétie de centre B ;
  f(E) = E'$\in$[AB] ; ***f***(GH) = (G'H') = (BC).
  Toutes les homothéties de centre B transforment EFGH en un carré E'F'G'H' qui satisfait aux conditions (1) et (3) .
  Il suffit d'en choisir celles qui transforment le carré EFGH en un carré qui satisfait à la 2ème condition.

Construction

- Sur la droite (AB) marquer un point $E \neq B$; tracer la perpendiculaire à (BC) passant par E ; elle coupe (BC) en (H). Sur (BC) placer un point G tel que GH = EH ;
- On désigne par N le point d'intersection de (BF) et (AC) ; Construire le carré MNPQ image de EFGH par l'homothétie de centre B qui applique F en N.

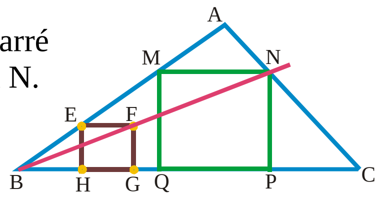


Image des supports

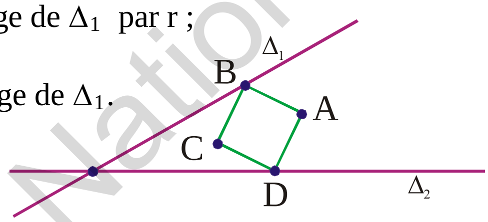
Exercice 2

On donne deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2, au point qui n'appartient ni à Δ_1 ni à Δ_2 .
Construire un carré ABCD tel que : $B \in \Delta_1$; $D \in \Delta_2$.

Solution

Recherche d'une démarche

Réalisons une figure solution (esquisse). Considérons la rotation r de centre A et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)$ et construisons l'image de l'esquisse par cette rotation. Soit Δ'_1 l'image de Δ_1 par r ;
on peut remarquer que D est le point d'intersection de Δ_2 et Δ'.
En effet D et l'image par r de B point de Δ_1, D appartient donc à l'image de Δ_1.



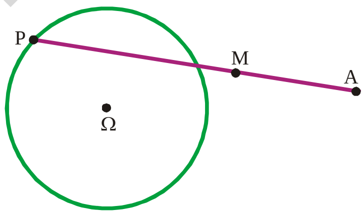
Construction

- Construire l'image Δ'_1 de Δ_1 par la rotation $r_{(A;\frac{\pi}{2})}$. On désigne par D le point d'intersection de Δ_2 et Δ'_1.
- Construire le carré direct ABCD.

Recherche des lieux géométriques

Exercice 1

On donne le point A et le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r.
P étant un point de $\mathscr{C}$, on désigne par M le milieu de [AP].
Déterminer le lieu géométrique de M lorsque P décrit $\mathscr{C}$.



Solution

Analyse

- Considérons l'homothétie h de centreet de rapport $\frac{1}{2}$.
- Désignons par $\mathscr{C}$ ' l'image du cercle $\mathscr{C}$ par cette homothétie ; lorsque P décrit $\mathscr{C}$; M décrit $\mathscr{C}$ ' l'image de $\mathscr{C}$ par h.

Construction

Soit O' le milieu de [OA] ; construire le cercle de centre O' et de rayon $\frac{r}{2}$; c'est l'image de $\mathscr{C}$ par h.

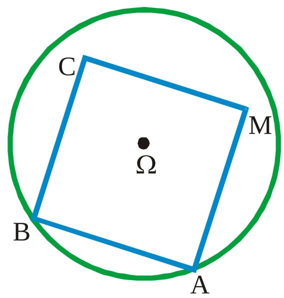
Exercice 2

On donne le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et le point A de ce cercle.
B désignant un point de $\mathscr{C}$ distinct de A.On construit le carré indirect ABCM.
Déterminer le lieu géométrique de M lorsque B décrit le cercle $\mathscr{C}$.

Solution

Analyse :

Considérons la rotation de centre A et d'angle droit indirect.
Lorsque B décrit $\mathscr{C}$, son image M décrit le cercle $\mathscr{C}$ ',
image de $\mathscr{C}$ par r.



Construction

- Construire l'image O' de O par la rotation r de centre A et d'angle droit indirect.
- Construire le cercle $\mathscr{C}$ 'de centre O' et de rayon r, c'est l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la translation r.

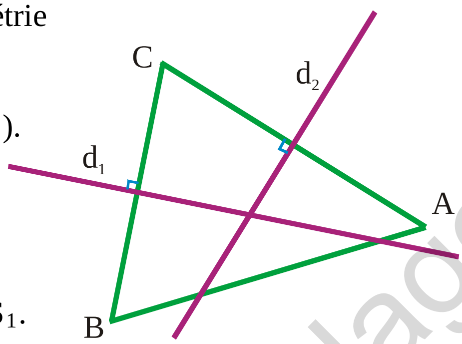
B. Exercices

1. La rotation r est donnée par son centre O et un point A et son image A'.
Soit B un point de $\mathscr{C}_{(O\,;\,OA)}$ et C un point de (OA).
Construire les images B' et C' des points B et C,
Justifier.

2. On donne les points A et B . construire les centres des rotations r_1 et r_2 appliquant A sur B.
Et d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

3. On donne les droites parallèles (d) et (d') et un point O. Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Construire un point M de (d) dont l'image par la rotation r appartient à la droite (d').

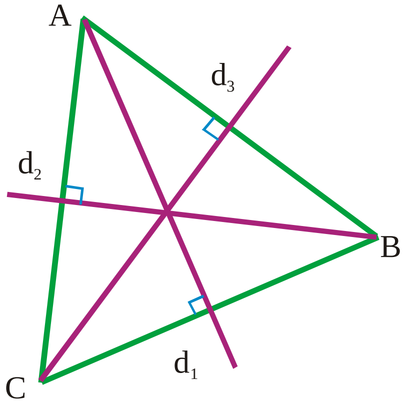
4. Soit le triangle ABC, On appelle (d_1) la médiatrice de [BC] et (d_2) la médiatrice de [AC].
Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (d_1) ; S_2 celle d'axe (d_2).



1) Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $S_2 o S_1$.
2) Démontrer que les points A ; A' ; B ; B' ; C ; appartiennent à un même cercle.
3) Quelle est la nature du triangle ABC pour que $S_2 o S_1$ soit une symétrie centrale.

5. ABCD est un quadrilatère quelconque. Soient S_S ; S_B ; S_C les symétries centrales de centres respectifs A ; B et C.
Déterminer l'image du sommet D par $S_A o S_B$ o S_C

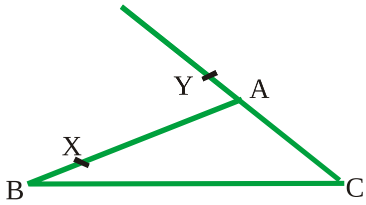
6. ABC est un triangle équilatéral, (d_1) ; (d_2) et (d_3) les médiatrices respectives des côtés [BC] ; [CA] et [AB]



soient S_1 ; S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs (d_1) ; (d_2) et (d_3).
Démontrer que :$S_1 o S_2$ o S_3 est une symétrie orthogonale, préciser son axe.

7. ABC est un triangle rectangle en A. A' ; B' et C' sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que :
$S_{[A'C']} o S_A$= t o $S_{[A'B']}$.
ABC est un triangle rectangle en A. A' ; B' et C' sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que :
$S_{[A'C']} o S_A$= t o $S_{[A'B']}$.

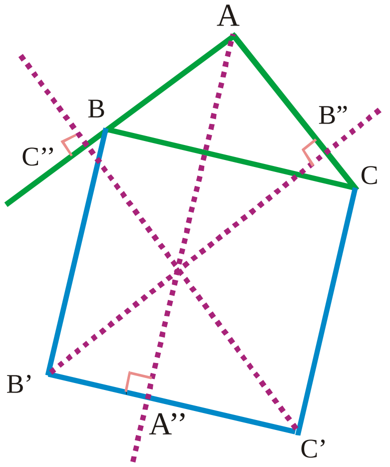
8. ABC est un triangle quelconque.
X un point de [AB], sur la demi-droite [CA), on marque le point Y tel que CY =AX.
Déterminer une translation t, une symétrie orthogonale S et une rotation r telle que : l'image



de [AX] par r o t et par S o t soit [YC].
Construire ensuite l'image du triangle ABC par r o t et par S o t.

9. (L_1) et (L_2) sont deux droites sécantes, en B non perpendiculaires. A est un point de (L_1) et (D un point de (L_2).
Tous deux distincts de B. la perpendiculaires à (L_2) passant par A coupe (L_2) en C ; la, perpendiculaire à (L_1) passant par D coupe (L_1) en E.
1) Démontrer que les triangles ABC et DBE sont semblables.
 Soit ***f*** la similitude qui applique A sur D ; B en B et C en E.
2) Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. A' et C' les symétriques respectifs de A et C par rapport à (Δ).
 Démontrer qu'il existe une homothétie de centre B qui applique A' sur D. Soit h cette homothétie.
3) S_Δ désignent la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
 Démontrer que h o S_Δ = ***f*** .
 M étant un point quelconque du plan, construire l'image de M par S.
4) Construire l'image par ***f*** du triangle ABE.

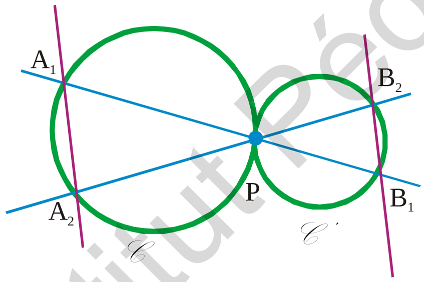
10 ABC est un triangle quelconque, sur le côté [BC] et extérieurement on construit un rectangle AB'C'C.



On désigne par B'' ; C'' et A'' les projetés orthogonaux de B sur [AC] de C sur [AB] et de A sur [B'C'].
Montrer que les droites (B'B'') ; (C'C'') et (AA'') sont concourantes.

11 Démontrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport aux milieux des côtés sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.

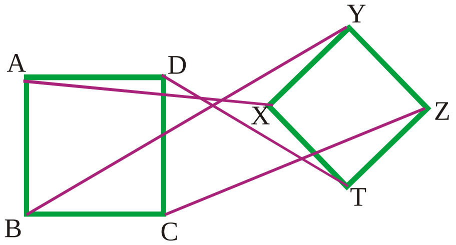
12 On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' tangents en P.
Par P on trace deux droites (d_1) et (d_2) qui recoupent $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ ' respectivement en A_1 ; B_1 ; A_2 ; B_2.



Démontrer que les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

13 Les points A ; A ; B ; C ; A' et B' sont tels que OAB est un triangle équilatéral direct.
OA'B' est un triangle équilatéral direct,
OA = OA' et OBCA' est un parallélogramme.
Démontrer que ACB' est équilatéral.

14 ABCD et XYZT sont deux carrés ; ABCD est direct ; XYZT est indirect.

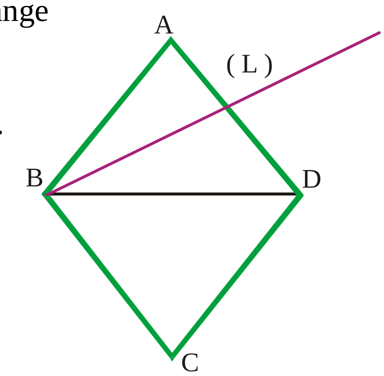


Démontrer que les milieux de [AX] ; [BY] ; [CZ] et [DT] sont alignés.

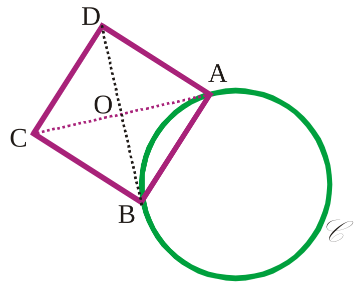
15 Soit (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles A est un point de la bande délimitée par (d_1) et (d_2).
Construire un cercle tangent à (d_1), à (d_2) et passant par A.

16 (d_1) et (d_2) étant deux droites sécantes, P un point qui n'appartient ni à (d_1) ni à (d_2).
Construire les points B de (d_1) et C de (d_2) tels que P soit le milieu de [AB].

17 On donne une droite (L) et un point A ;
On considère un losange ABCD de sens direct tel que AB = BD et B∊ (L).
Quel est le lieu géométrique du point C lorsque B décrit (L).



18 On donne le cercle $\mathscr{C}$ et un point A de $\mathscr{C}$.
B désignant un point de $\mathscr{C}$ distinct de A.
On construit le carré ABCD de centre O.
Quel est le lieu géométrique du centre O du carré lorsque B décrit le cercle $\mathscr{C}$.



Chapitre 12 Dénombrement

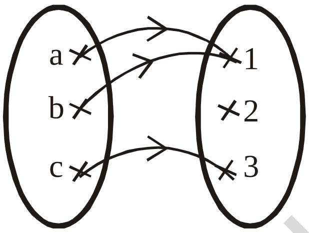
Faire savoir

L'essentiel du chapitre

1. Les applications

Soit E et F deux ensembles, en associant à chaque élément x de E un seul élément y de F, noté ***f***(x) , on définit une application ***f*** de E vers F.

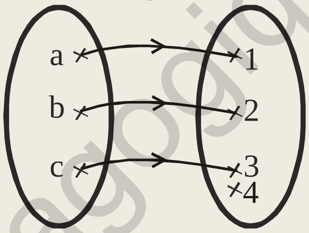
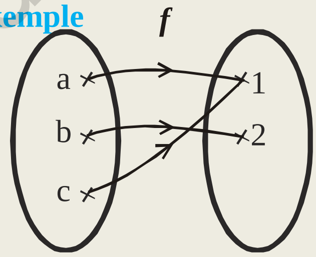
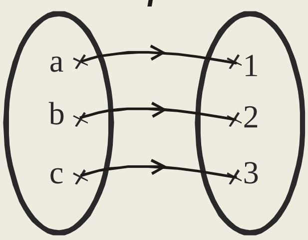
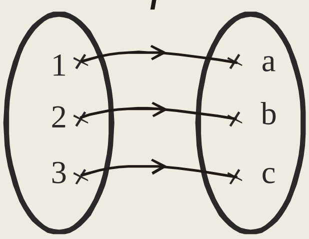
$f : E \longrightarrow F$
$\quad x \longmapsto y$



Exemple: $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}\ ;\ F = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}\ ;$

f(a) = 1 ; ***f***(b) = 1 ; ***f***(c) = a.

En plus,

On a	Si et seulement si
f est une injection de E dans F	$\forall\, x_1\ ;\ x_2 \in E\ ;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ **Exemple** ***f*** 
f est une surjection de E sur F	$\forall\, y \in F\ ;\ \exists\, x \in E :\ f(x) = y$ **Exemple** ***f*** 
f est une bijection de E sur F	***f*** est à la fois une injection et une surjection de E sur F, ⇔ $\forall\, y \in F\ ;\ \exists!\, x \in E :\ f(x) = y$. En plus, ***f*** admet une application réciproque notée f^{-1}, par conséquent, $\forall\, y \in F\ ;\ \exists!\, x \in E :\ f^{-1}(y) = x$. **Exemple** ***f*** f^{-1} 

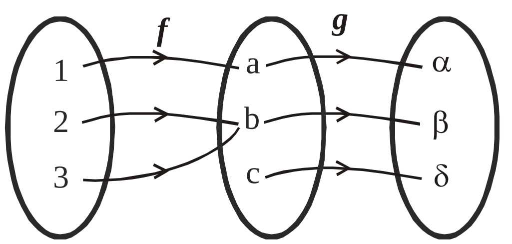
Composée de deux applications

Si est une f application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de l'ensemble F vers un ensemble G.

Alors, $g \circ f$ est application de l'ensemble E cers l'ensemble G.

Définie par, $\forall\, x \in E$: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemple

	$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \alpha$ $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = \beta$ $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = \beta$

Fonction et application

Une fonction f d'un ensemble E vers un ensemble F, est une application de E vers F, si et seulement si, L'ensemble de définition de f est E.

2. Notion de n ! avec n $\in \mathbb{N}$

- n ! se lit n factorielle ; $0! = 1$; $1! = 1$;
- $\forall\, n \geq 2$; $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$;

Exemple

$2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \prod_{k=1}^{k=n} k = n!$
- $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)n! = (n+1)!$; $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$; $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)}$.

Exemple

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; $4 \times 3! = 4!$

- Soit p et q deux entiers naturels, si, $p \leq q$, alors $\dfrac{q!}{p!}$ est un entier naturel.

Exemple

$\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$;

3. Cardinal d'un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini (ayant un nombre fini d'élément).

Le nombre d'éléments de Ω est le cardinal de Ω, noté card(Ω).

Exemple $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$; card(Ω) = 4

$\Omega = \{a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4 ... a_n\}$; card(Ω) = n

$\Omega = \{a_0 ; a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4 ... a_n\}$ card(Ω) = n +1

$\Omega = \{a_0 ; a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4 ... a_{n-1}\}$ card(Ω) = n

- Si E est un ensemble vide (note $\varnothing$); cet ensemble n'a aucun élément., alors, card(E) = 0 ; card(E) = 0 $\Leftrightarrow$ E = $\varnothing$.

Vocabulaire & Propriétés

Si A est une partie de Ω (un sous ensemble de Ω), on écrit $A \subset \Omega$: (A inclus dans Ω)
Alors ; $0 \le \text{card}(A) \le \text{card}(\Omega)$

$\varnothing$ est la partie vide de Ω et Ω est la partie pleine de Ω.

Pour toute partie A d'un ensemble non vide Ω, on a ; $\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \in [0 ; 1]$

Soit A et B deux ensembles finis
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

En plus si A et B sont disjoints $(A \cap B) = \varnothing$, alors : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Produits cartésiens d'ensembles

Soit A et B deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de A et B.

- $A \times B = \{(a;b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$; $B \times A = \{(b;a) / b \in B \text{ et } a \in A\}$

Soit A_1 ; A_2 ; …A_n (n ensemble)
L'ensemble :

- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est le produit cartésien de A_1 ; A_2 ; …A_n.
  et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1;a_2;\ldots;a_n) / a_1 \in A_1 \text{ ; } a_2 \in A_2 \text{ ;… } a_n \in A_n\}$

En plus, si A_1 ; A_2 ; …An sont finis, alors $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est fini
et, $\text{card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_1) \times \ldots \times \text{card}(A_n)$

- Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$:
  A^2 désigne $A \times A$;
  $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ (facteurs)}}$
- Soit A et B deux ensembles finis ;

Il y a	Si, et seulement si
Possibilité d'injection de A dans B	$\text{card}(A) \le \text{card}(B)$
Possibilité de surjection de A surs B	$\text{card}(A) \ge \text{card}(B)$
Possibilité de bijection de A sur B	$\text{card}(A) = \text{card}(B)$

4) Listes

Exemple

Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ un ensemble; on a (1; 2; 3) est une liste dans Ω à 3 termes on l'appelle une 3- liste dans Ω.

$(1 ; 1 ; 2 ; 3) \longrightarrow$ est une 4-liste dans Ω
$(1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3) \longrightarrow$ est une 6-liste dans Ω
$(1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3) \longrightarrow$ est une 9-liste dans Ω

- Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Le nombre de p- liste dans un ensemble Ω ayant n éléments est n^p

- Soit A et B deux ensembles finis non vides tels que ;

Card (A) = p ; card(B) = n
Le nombre d'applications de A vers B est n^p

5) Arrangement

Soit n et p deux entiers tels que : $p \leq n$;

On appelle p- arrangement dans un ensemble Ω ayant n éléments, toute p-liste dans Ω à termes distincts deux à deux.

Exemple

soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

- (1 ; 2 ; 3) est un 3- arrangement dans Ω
- (3 ; 2 ; 1) est un 3- arrangement dans Ω
- (1 ; 2 ; 5 ; 4 ; 3) est un 5- arrangement dans Ω
- un 6- arrangement dans Ω n'existe pas

- Soit n et p deux ensembles tels que $p \leq n$; le nombre p- arrangement dans un ensemble de Ω ayant n éléments est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

- Soit A et B deux ensembles tels que ; card(A) = p ; card(B)= n ; avec $p \leq n$.

Le nombre d'injection de A dans B est A_n^p.

- Un n- arrangement dans un ensemble Ω ayant n éléments est appelé une permutation de Ω

Exemple

Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$;

(1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) ; (2 ; 1 ; 4 ; 3 ; 5) ; (1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 2) sont des permutations de Ω.

- Le nombre de permutation d'un ensemble Ω ayant n éléments est : $A_n^n = n!$.

- Soit A et B deux ensembles finis tels que card(A) = card(B) = n.

Le nombre de bijections de A sur B est n !.

6) Combinaison

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle une combinaison dans Ω toute partie (ou sous-ensemble) de Ω.

Exemple

Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

- $\{1 ; 2 ; 3\}$ est <u>une</u> combinaison de 3 éléments dans Ω.

  $\{1 ; 3 ; 4 ; 5\}$ est <u>une</u> combinaison de 4 éléments dans Ω.
- ϕ (partie vide) est <u>la</u> combinaison dans Ω de zéro élément.
- Ω (partie pleine) est la combinaison de 5 éléments.
- Une combinaison de 6 éléments dans Ω n'existe pas.

- Soit n et p deux entiers naturels tels que : $p \leq n$,

Le nombre de combinaison de p éléments dans un ensemble Ω ayant n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

- $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ C_n^0 = 1\ ;\ C_n^n = 1\ ;\ C_n^1 = 1$
- $\forall n\ ;\ p \in \mathbb{N}\ (p \le n) : C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}$ (Propriété à la base de la construction du triangle suivant appelé le triangle de Pascal.)

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

.

.

.

$C_n^0 \quad . \quad . \quad . \quad C_n^p + C_n^{p+1} \quad . \quad . \quad .; C_n^n$

$C_{n+1}^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ; C_{n+1}^{p+1} \quad . \quad . \quad . + C_{n+1}^{n+1}$

1 1

1 2 1

1 3 + 3 1

1 4 6 + 4 1

1 5 10 10 5 1

.

Remarque

Le triangle de Pascal porte les valeurs des nombres C_n^p

- Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

Propriétés des parties de Ω	**Propriétés des nombres C_n^p**
Il y a une seule partie (partie ayant 0 élément c'est $\varnothing$ (la partie vide)).	$C_1^0 = \boxed{1}$
Il y a une seule partie (partie ayant Ω élément c'est Ω (la partie pleine)).	$C_n^n = \boxed{1}$
Il y a (n) parties ayant chacune (1) élément (les singletons de Ω).	$C_n^1 = \boxed{n}$
A toute partie de Ωayant p éléments correspond une seule partie de Ω ayant $n-p$ éléments et réciproquement (ce sont des parties complémentaires dans Ω). Donc, le nombre de parties à (p) éléments est le même que le nombre de partie à (n- p) éléments .	$C_n^p = C_n^{n-p}$

7) Formules de développement du binôme de Newton

$$\forall\ a\ ; b \in R\ ; \forall\ n \in \mathbb{N}^*;\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad ; \quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

Exemple

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^4 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 - C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Savoir-faire

Listes

Exercice. 1

L'allumage d'une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle ?

Solution

- On note 1 pour : une ampoule est allumée
  0 pour : une ampoule est éteinte
- On pose : $\Omega = \{0 ; 1\}$.
- Chaque manière d'éclairer la salle est une 10-liste dans Ω différentes de la 10-liste (0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0), qui correspond à la salle non éclairée.
- Donc, le nombre de manières d'éclairer la salle est :
  $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = \mathbf{1023}$

Arrangements

Exercice. 2

Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu'un seul livre ?

Solution

- On note C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5 ; les cinq casiers.
- On pose : $\Omega = \{C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5\}$.
- Chaque façon de ranger les 3 livres est un 3-arrangement dans Ω, alors, le nombre de façons différentes de ranger les livres est :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 60.$$

Tirages

Exercice. 3

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard <u>successivement avec remise</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?

3) On tire maintenant <u>simultanément</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?

Solution

- On note : b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1, les 7 boules.
- On pose : $\Omega = \{b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 ; b_6 ; b_7\}$.

1) Chaque tirage successif avec remise de 3 boules est une 3-liste dans Ω.
 Donc ; le nombre de tirages possibles est : $7^3 = 7 \times 7 \times 7$.= **343.**

2) Chaque tirage successif sans remise de 3 boules est un 3-arrangement dans Ω.
 Donc ; le nombre de tirages possibles est : $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\times6\times5 = \mathbf{210}$.

3) Chaque tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments de Ω.
 Donc ; le nombre de tirages possibles est : $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \mathbf{35}$.

Nombre de parties d'un ensemble finis

Exercice. 4

1.) a) Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}$: $(k + 1)! - k ! = k\,k !$

b) Calculer la somme : $S = 1 \times 1 ! + 2 \times 2 ! + 3 \times 3 ! + \ldots + 2009 \times 2009 !$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

b) Quel est le nombre de parties d'un ensemble Ω ayant (n) éléments ?

Solution

1)On a : $\forall\ k \in \mathbb{N}:\ (k+1)! = (k+1)k!;$

donc ; $\forall\ k \in \mathbb{N}:\ (k+1)!\ - k! = (k+1-1)k!$;

$= kk!$

Donc ; $\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}:\ (k+1)!\ - k! = kk!}$.

b) $S\ = \sum_{k=1}^{2009} kk! = \sum_{k=1}^{2009} ((k+1)! - k!)$

$= (2!\ \text{-}1!) + (3!\ \text{-}2!) + + (4!\ \text{-}3!) + \ldots + + (2010!\ \text{-}2009!)$.

Donc ; $\boxed{\mathbf{S = 2000\ !\ \text{-}1}}$

2) a) On a ; $\forall a;b \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Donc; avec $a = b = 1$; on a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n$;

Donc ; $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$

b) le nombre de parties de Ω à 0 élément est C_n^0

- le nombre de parties de Ω à 1 élément est C_n^1
- le nombre de parties de Ω à 2 éléments est C_n^2
- .
- .
- .
- le nombre de parties de Ω à n éléments est C_n^n
- donc le nombre de parties de Ω est :
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \boxed{2^n}$

B. Exercices

1. Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 6 chiffres.
Quelle est la capacité de ce réseau ?

2. On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune.
Schématiser l'ensemble des résultats possibles.
Quels est le nombre de résultats possibles.

3. Combien de façons différentes 3 personnes peuvent occuper 5 chaises ?

4. Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

5. De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

6. 3 personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?
2) Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

7. Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.
On tire au hasard 3 boules simultanément
a) quel est le nombre de tirage possible ?
b) quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?
c) quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire?
2) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.
a) quel est le nombre de tirage possible ?
b) quel est le nombre de tirage contenant deux boules de mêmes couleurs ?
c) quel est le nombre de tirage contenant deux boules de couleurs différentes ?

8. Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
On tire successivement deux boules sans remise.
1) quel est le nombre de tirage possible ? schématiser le nombre de tirage possible.
2) Quel, est le nombre de tirages donnant a + b > 7.
(a et b les numéros des boules tirées).

9. 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k = 0$

11 Une caisse contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
1) On tire successivement avec remise deux boules.
a) donner le nombre de tirages possibles, et schématiser ce nombre.
b) quel est le nombre de tirage donnant $|a-b| = 1$ (a et b les numéros de boules tirées).
2) On tire maintenant successivement sans remise deux boules.
a) Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b) Quel est le nombre de tirage donnant $|a-b| = 1$.
3) On tire maintenant simultanément deux boules.
a) donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b) quel est le nombre de tirage donnant $|a-b| = 1$.

12 On lance une pièce de monnaie mauritanienne trois fois de suite.
On note a chaque fois la nature de la face visible (A : pour face en Arabe et F : pour face en Français).
Quel est le nombre de résultats possibles ?
Schématiser ces résultats à l'aide d'un arbre.

Chapitre **13** Statistiques

Faire savoir

A. L'essentiel du chapitre

I. Série statistique présentant un regroupement en classes.

Dans ce chapitre on étudiera des séries statistiques à modalités regroupées en classes.
Une telle série, comportant p classes de bornes : a_0 ; a_1 ; a_2 ; ; …ap ($a_0 < a_1 < \ldots < a_p$) est notée :
([a_{i-1} ; ai[; ni) $_{1\leq i \leq p}$, ou ni est l'effectif de la classe [a_{i-1} ; ai[

I. 1 Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Dans une série statistique ([a_{i-1} ; ai[; ni) $_{1\leq i \leq p}$:
L'effectif cumulé croissant de la classe [a_{k-1} ; a_k[est :

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

L'effectif cumulé décroissant de la classe [a_k ; a_p[est :

$$\sum_{i=k}^{i=p} n_i = n_k + n_{k+1} + \ldots + n_p\,.$$

La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) s'obtient en divisant l'effectif cumulée croissant (respectivement décroissant) par l'effectif total..

Exemple

On a relevé la distance parcourue par chacun des 150 taxis d'une compagnie entre leur mise en circulation et leur première panne. Les résultats de cette enquête sont résumés dans le tableau ci- dessous.
Les distances étant exprimées en milliers de kilomètre.

Distance	[0 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 15[
Effectif (n_i)	15	78	36	21
Fréquence (f_i)	10%	52%	24%	14%

On dresse les tableaux des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Distance parcourue	[0 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 15[
Effectif cumulé croissant	15	93	129	150
Effectif cumulé décroissant	150	135	57	21

Remarque

On obtient facilement, les résultats, des fréquences cumulées, en divisant les effectifs cumulés par l'effectif total.

Histogramme, polygone

Reprenons l'exemple précédent : la série de cet exemple est représentée graphiquement par l'histogramme ci-dessous :

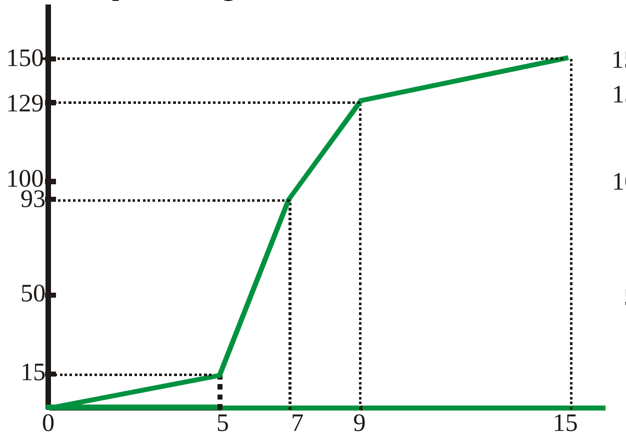
Dans le tableau précédent, la troisième colonne, par exemple, s'interprète ainsi : 129 taxis ont parcouru au plus 9 000 km et 57 taxis ont parcouru au moins 7000 km avant d'avoir leur première panne.

On en déduit le tableau suivant :

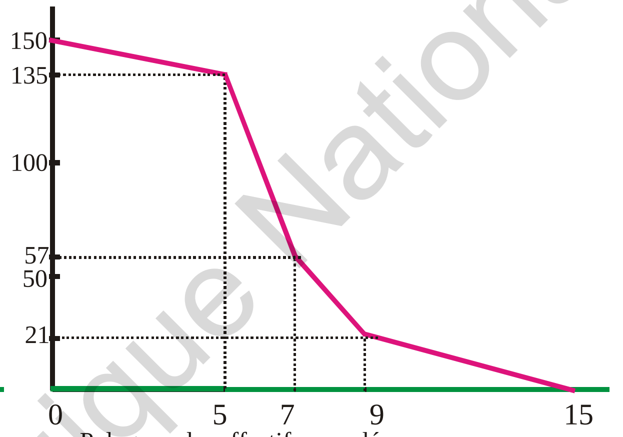
ai	0	5	7	9	15
Nombre de taxis ayant parcouru au plus ai($\times$ 1000 km)	0	15	93	129	150
Nombre de taxis ayant parcouru au moins ai($\times$ 1000 km)	150	135	57	21	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats peuvent être représentés par des polygones des effectifs cumulés croissants ou décroissants comme l'indique les figures suivantes.



Polygone des effectifs cumulés croissants (Fig.1)



Polygone des effectifs cumulés décroissants (Fig.2)

On construit de manière analogue, les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

I. 2) Caractéristiques de position

Classe modale

Définition

Soit une série statistique présentant un regroupement en classes. On appelle classe modale de cette série toute classe d'effectif maximal.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la classe modale est [5 ; 7[.

Remarques

- une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.
- le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique

Médiane

Définition

Soit une série statistique présentant un regroupement en classes d'effectif total N.

On appelle médiane de cette série, le nombre réel M tel que : le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient tous égaux à $\frac{N}{2}$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent (distance parcourue par les taxis).

L'effectif total de la série est 150.

On représente sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Leur points d'intersection a pour ordonnée 75.

Soit x_0 son abscisse, on a, $x_0 \in [5 ; 7[$. Donc : $\dfrac{75-15}{x_0-5} = \dfrac{93-15}{7-5}$.

On en déduit : $x_0 = 5 + \dfrac{60}{39}$, d'où $x = 6,54$

On estime que la moitié des taxis ont parcouru au plus 6540 km avant la première panne.

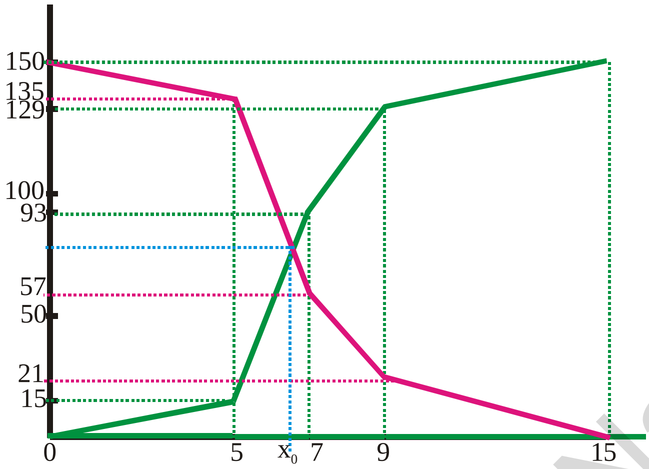


Fig.3

Moyenne

Définition

Soit $([a_{i-1} ; ai[; ni)_{1 \le i \le p}$ une série statistique .

On appelle moyenne de cette série la moyenne $\overline{X}$ de la série statistique $(x_i ; n_i)_{1 \le i \le p}$, ou x_i ; est le centre de la classe $[a_{i-1} ; ai[$.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	n_i x_i
[0 ; 5[	2,5	15	37,5
[5 ; 7[	6	78	468
[7 9 [	8	36	288
[9 ; 15[	12	21	252
Total		150	1045,5

Si N est l'effectif total de la série, on a : $\overline{X} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i$.

Exemple

Reprenons toujours l'exemple précédent, on en déduit du tableau ci-contre que :

$\overline{X} = \dfrac{1045}{150} = 6,97.$

Les taxis parcourent donc en moyenne 6970 km avant leur premier panne.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	n_i x_i
[0 ; 5[	2,5	15	37,5
[5 ; 7[	6	78	468
[7 9 [	8	36	288
[9 ; 15[	12	21	252
Total		150	1045,5

Quartiles

Définitions

On appelle :

- Premier quartile d'une série statistique, et on désigne par Q1, la valeur telle que 25% des valeurs prises par la variable (donc 25% de l'effectif total N) lui soient inférieures, et 75% des valeurs lui soient supérieures.
- Troisième quartile d'une série statistique, et on désigne par Q3, la valeur telle que 75% des valeurs prises par la variable lui soient inférieures et 25% lui soient supérieures.

Le second quartile Q2 est, d'après la définition, la médiane M.

I. 3) Caractéristiques de dispersion

Définitions

Soit $([a_{i-1} ; a_i[, ni)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique d'effectif N et de moyenne $\overline{X}$.

Pour tout nombre entier i tel que $1\leq i \leq p$, on désigne par xi le centre de la classe $[a_{i-1} ; a_i[$,

L'écart moyen est le nombre réel e_m tel que : $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} ni(xi - \overline{x})$.

Donc, $e_m = \dfrac{n_1|x_1 - \overline{x}| + n_2|x_2 - \overline{x}| + ...n_p|xp - \overline{x}|}{N}$

La variance est le nombre réel V tel que : $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} ni(xi - \overline{x})^2$

Donc, $V = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n2(x_2 - \overline{x})^2 + ...n_p(xp - \overline{x})^2}{N}$.

L'écart type est le nombre réel tel que : $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque

Dans la pratique, le calcul de la variance se fait à l'aide de la formule de Koenig : $V = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$.

Exemple

Il s'agit toujours de reprendre l'exemple du I.1.

Classe	Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$	x^2_i	$n_i\, x^2_i$
[0 ; 5[	2,5	15	4,47	67,05	6,25	93,75
[5 ;7[	6	78	0,97	75,66	36	2808
[7 ;9[	8	36	1,03	37,08	64	2304
[9 ;15[	12	21	5,03	105,63	144	3024
Total		150		285,42		8229,75

On en déduit du tableau que :

$e_m = \frac{285,42}{150} \simeq 1,9028$; $V = \frac{8229,75}{150} - (6,97)^2 = 6,2841$; $\sigma = 2,5068$

II. Séries statistique à deux caractères

On peut, sur une population, étudier deux caractères quantitatifs.

La modalité associée à chaque individu est alors un couple de nombres réels. On construit ainsi une série statistique à deux caractères, ou série double.

II.1) Organisation des données

Exemple 1

On a relevé le poids (en kg) et la taille (en cm) de 30 personnes ; on a obtenu les résultats suivants :

Poids(x)	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille (y)	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	171
Poids (x)	62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
Taille (y)	174	174	171	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

Ces données permettent de définir deux séries statistiques à un caractère : $(x_i\ ;\ n_i)$ et $(y_j\ ;\ n_j)$ représentées par les deux tableaux suivants :

xi	59	62	65	68	71	74	77
ni	1	4	6	7	5	5	2

yj	165	168	171	174	177	180	…
nj	5	3	6	10	4	2	…

Soit $X = \{59\ ;\ 62\ ;\ 65\ ;\ 68\ ;\ 71\ ;\ 74\ ;\ 77\}$ et $y = \{165\ ;\ 168\ ;\ 171\ ;\ 174\ ;\ 177\ ;\ 180\}$.

A chaque couple $(x_i\ ;\ y_j)$ de l'ensemble $X \times Y$, on associe le nombre d'élèves ayant le poids xi et la taille yj. Ce nombre est noté n_{ij}.

On définit ainsi une série statistique a deux caractères ; n_{ij} est appelé effectif de la modalité (xi ; yj).

Cette série, notée $(x_i\ ;\ y_j\ ;\ n_{ij})$ est représentée par le tableau à double entrée ci-contre :

Les totaux obtenus dans la dernière ligne du tableau sont les effectifs de la série (xi ; ni) ; ceux de la dernière colonne sont les effectifs de la série (yj ; nj).

Ces effectifs apparaissent ''en marge'' du tableau à double entrée.

Les séries statistiques $(x_i\ ;\ n_i)$ et $(y_j\ ;\ n_j)$ sont appelées séries marginales de la série double $(x_i\ ;\ y_j\ ;\ n_{ij})$.

x_i \ y_j	59	62	65	68	71	74	77	Total
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	6
174	0	2	3	0	3	2	0	10
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	3
Total	1	4	6	7	5	5	2	30

II.2) Nuage de points associés à une série double

Soit $(x_i\ ;\ y_j\ ;\ n_{ij})$ une série double.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal.

L'ensemble de points Mij de coordonnées (xi ; yj) est appelé nuage de points associés à la série.

Dans le cas où les effectifs des modalités (xi ; yj) ne sont pas tous égaux, on représente ce nuage de points de deux façons :

- Représentation par points pondérés : on indique à côté de chaque point M_{ij}, l'effectif nij (Fig.1).
- Représentation par tâches : chaque point M_{ii} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à n_{ij} .

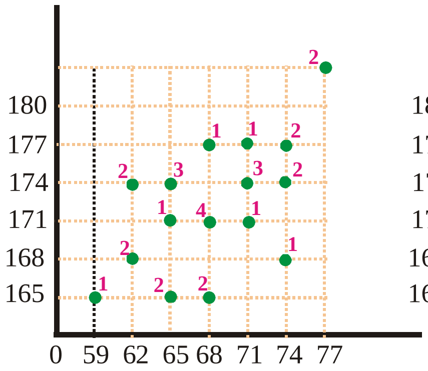


Fig. 1

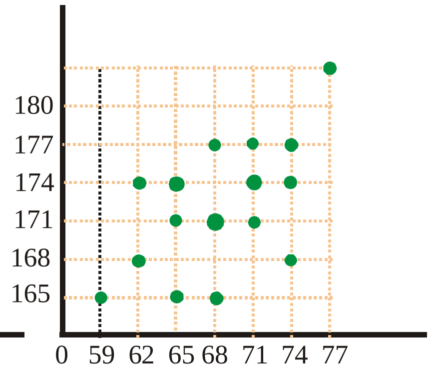


fig.2

Point moyen d'un nuage

Définition

Soit (xi ; yj ; nij) une série statistique à deux caractèrs quantitatifs.

On appelle point moyen du nuage de points représentant une série, le point de cordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$ ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales $(x_i\ ;\ n_i)$ et $(y_j\ ;\ n_j)$.

Exemple 2

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de biologie et de physique d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant :

Biologie (x)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14	
Physique (y)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16	

On remarque que dans cette série, les effectifs des modalités sont tous égaux à 1.

$\overline{x} = \dfrac{3+5+2\times6+2\times9+2\times12+2\times14}{10} = 9.$; $\overline{y} = \dfrac{5+2\times8+2\times10+2\times13+2\times16+17}{10} = 11,6.$

Le point moyen du nuage associé à la série est G(9 ; 11 , 6).

II.2) Ajustement linéaire

On considère dans ce paragraphe une série statistique à deux caractères x et y tel que l'effectif de chacune des modalités est égale à 1.

Une telle série sera notée $(x_i\ ;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$, ou N est l'effectif total de la série et (xi ; yi) est la modalité du i[ème] individu.

Notion d'ajustement linéaire

Ajuster un nuage de points consiste à déterminer une courbe simple passant '' le plus près possible'' des points du nuage.

Si la courbe recherchée est une droite, l'ajustement est dit linéaire, il s'agit, en pratique, de déterminer deux droites appelées droites de régression.

Droites de régression

Définitions

Soit $(x_i\ ;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y , d'effectifs total N.

La covariance de cette série est le nombre réel, noté cov(x ;y), tel que :

- $\text{cov}(x\ ;y)=\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} xiyi\right)-\overline{x}.\overline{y}.$

Soit $(x_i\ ;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ série statistique à deux caractères x et y telle que : $V(x) \neq 0$.

La droite de régression de y en x passe par le point moyen du nuage associé à cette série et à pour coefficient directeur

- $\dfrac{\text{Cov}(x;y)}{V(x)}.$

Une équation de cette droite est : $y - \bar{y} = \frac{Cov(x;y)}{V(x)}(x - \bar{x})$.

Soit $(x_i\ ;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y , telle que : $V(y) \neq 0$.
La droite de régression de x en y passe par le point moyen du nuage associé à cette série et à pour

Equation : $x - \bar{x} = \frac{Cov(x;y)}{V(y)}(y - \bar{y})$.

❖ **Coefficient de corrélation linéaire**

Définition

Soit $(x_i\ ;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y , telle que : $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que : $r = \frac{Cov(x;y)}{\sqrt{V(x)}.\sqrt{V(y)}}$.

Exemple

Reprenons l'exemple 2.
les calculs sont généralement disposés dans un tableau de la façon suivante :

x_i	y_i	$x_i.\ y_i$	x^2_i	y^2_i
9	10	90	81	100
12	13	156	144	169
5	08	40	25	64
6	10	60	36	100
9	13	117	81	169
14	17	238	196	289
3	5	15	9	25
6	8	48	36	64
12	16	192	144	256
14	16	224	196	256
90	116	1180	948	1492

On en déduit que : $Cov(x;y) = \frac{1180}{10} - 9 \times 11,6$;

$Cov(x;y) = 13,6$.

$V(x) = \frac{948}{10} - 9^2 = 13,8$.

La droite de régression de y en x est donc la droite (d) d'équation :

$y - 11,6 = \frac{13,6}{13,8}(x - 9)$, c'est-à-dire : y = 0,986x + 2,73.

On en déduit aussi que :

$V(y) = \frac{1492}{10} - 11,6^2 = 14,64$.

La droite de régression de x en y est donc la droite (d') d'équation :

$x - 9 = \frac{13,6}{14,64}(y - 11,6)$, c'est-à-dire : y = 1,076x + 1,92.

On en déduit aussi que le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \frac{13,6}{\sqrt{13,8}.\sqrt{14,64}} \simeq 0,957$.

Savoir-faire

A. Applications

Séries statistiques présentant un regroupement en classes

Exercice 1.

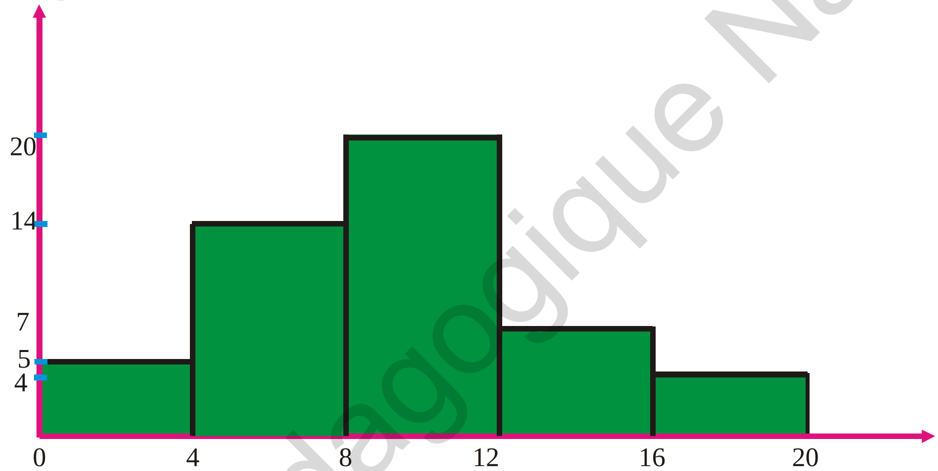
Les moyennes des notes obtenues par les 50 candidats à un concours se répartissent comme suit :

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	5	14	20	7	4

1) Construire un histogramme représentant cette série.
2) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissant, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3) Dresser les tableaux des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
4) Déterminer la classe modale, la médiane et le premier quartile de cette série statistique.
5) Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.

Solution

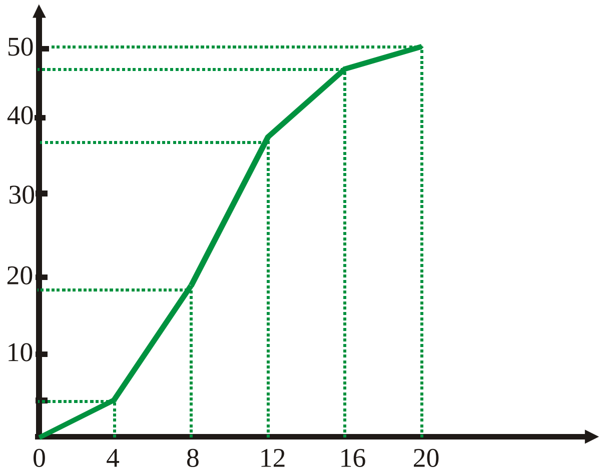
1) L'histogramme représentant cette série est le suivant :



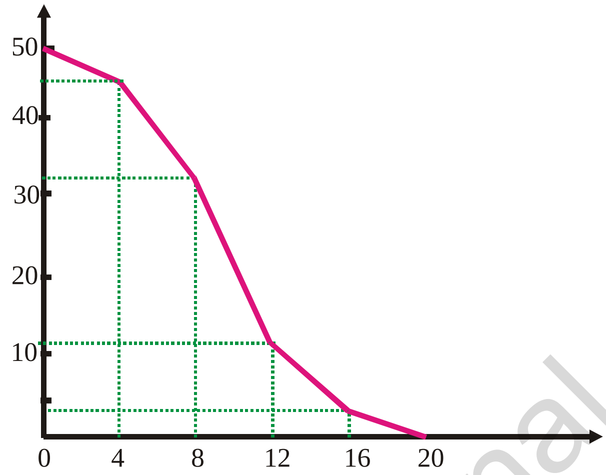
2) et 3, le tableau suivant donne la réponse aux questions posées

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	5	14	20	7	4
Effectif cumulé croissant	5	19	39	46	50
Effectif cumulé décroissant	50	45	31	11	4
Fréquence	10%	28%	40%	14%	8%
Fréquence cumulée croissante	10	38%	78%	92%	100%
Fréquence cumulée décroissante	100%	90%	62%	22%	8%

Les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants se présentent comme suit :



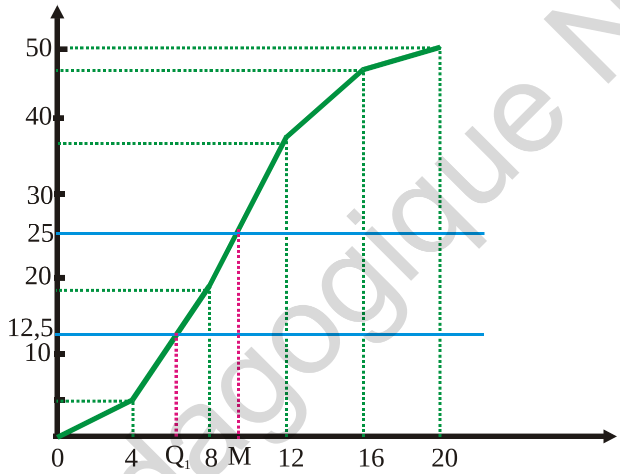
Polygone des effectifs cumulés croissants



Polygone des effectifs cumulés décroissants

4) la classe modale de cette série est [8 ; 12[.

Traçons les droites y = 25 et y = 12,5 sur le même graphique avec le polygone des effectifs cumulés croissants.



Nous constatons que $M \in [8 ; 12[$ et que $Q_1 \in [4 ; 8[$.

Donc : $\frac{25-19}{M-8} = \frac{39-19}{12-8} \Rightarrow \frac{6}{M-8} = 5 \Rightarrow M = \boxed{9,2}$

La médiane de cette série est M = $\boxed{9,2}$.

Nous avons aussi, $\frac{12,5-5}{Q_1-4} = \frac{19-5}{8-4} \Rightarrow \frac{7,5}{Q_1-4} = \frac{7}{2} \Rightarrow Q_1 = 4 + \frac{15}{7} \Rightarrow Q_1 \simeq 6,14$,

Le premier quartile de cette série est $\boxed{Q_1 \simeq 6,14}$

5)

Classe	Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$n_i x_i$
[0 ; 4[	2	5	10
[4 ; 8[	6	14	84
[8 ; 12[	10	20	200
[12 ; 16[	14	7	98
[16 ; 20[	18	4	72
Total	50		464

La moyenne de cette série est $\overline{x} = \frac{464}{50} = 9,28$.

Exercice 2.

le tableau suivant donne la répartition en classes d'amplitudes 5 des tailles en cm de 40 individus.

Classe	Effectif (ni)	Centre de la classe (xi)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$n_i\, x^2_i$
[155 ;160[	3				
[160 ;165[	8				
[165 ;170[	10				
[170 ;175[	10				
[175 ;180[	7				
[180 ;185[	2				
Total	40				

1) Calculer la moyenne de cette série et compléter le tableau.
2) Déterminer l'écart moyen et l'écart type de cette série.

Solution

La moyenne de la série est : $\overline{x} = \dfrac{157,5\times3+162,5\times8+167,5\times10+177,5\times7+182,5\times2}{40}$.

$\overline{x} = \dfrac{462,5+1300+1675+1725+1242,5+365}{40} = \dfrac{6780}{40}$, donc, $\boxed{\overline{x} = 169,5}$.

Classe	Effectif (ni)	Centre de la classe (xi)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$n_i\, x^2_i$
[155 ;160[	3	157,5	12	36	74918,75
[160 ;165[	8	162,5	7	56	211250
[165 ;170[	10	167,5	2	20	280562,5
[170 ;175[	10	172,5	3	30	297562,5
[175 ;180[	7	177,5	8	56	220543,75
[180 ;185[	2	182,5	13	26	66612,50
Total	40			224	1150950

2) $e_m = \dfrac{224}{40} = 5,6$; $V = \dfrac{1150950}{4040} - (169,5)^2 = 43,5$; $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{43,5} \simeq 6,59$.

Exercice 3

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances, d'une journée, l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-nés les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

x	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3) Représenter par des tâches le nuage de points associés à cette série double.
4) Placer son point moyen G.

Solution

1) présentation des données dans un tableau à double entrée.

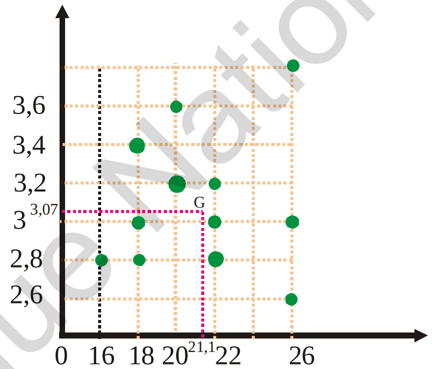
x \ y	16	18	20	22	26	Total
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Total	1	5	4	6	4	20

Les séries marginales :

x_i	16	18	20	22	26
n_i	1	5	4	6	4

y_j	2,5	2,8	3	3,2	3,4	3,6
n_j	1	5	6	4	2	2

3) Représentation du nuage de points associés à cette série.



$$\bar{x} = \frac{16\times1+18\times5+20\times4+22\times6+26\times4}{20} = 21,1,$$

$$\bar{y} = \frac{2,6\times1+2,8\times5+3\times6+3,2\times4+3,4\times2+3,6\times2}{20} = 3,07 .$$

Le point moyen est G(21,1 ; 3,07).

Exercice 4

On considère la série (x_i ; y_i) déterminée par le tableau :

xi	-3	-1	0	0
y_i	1	-1	4	2

Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y.

Calculer le coefficient de corrélation de cette série.

Solution

x_i	y_i	x_iy_i	x^2_i	y^2_i
-3	1	-3	9	1
-1	-1	1	1	1
0	4	0	0	16
5	2	10	25	4
1	6	8	35	22

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \; ; \; \bar{y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};$$

$$\text{Cov}(x;y) = \frac{8}{4} - \frac{1}{4}\times\frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{8} = \frac{13}{8}$$

$$V(x) = \frac{35}{4} - \frac{1}{16} = \frac{139}{16} \; ; \qquad V(y) = \frac{22}{4} - \frac{9}{4} = \frac{13}{4} .$$

La droite de régression de y en x a pour équation : $y - \bar{y} = \frac{\text{Cov}(x;y)}{V(x)}\left(x - \bar{x}\right)$.

Donc : $y - \frac{3}{2} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{139}{16}}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{26}{139}x - \frac{26}{556} + \frac{3}{2} \Rightarrow$ y = $\boxed{y = \frac{26}{139}x + \frac{202}{139}}$

La droite de régression de x en y a pour équation :

$$x - \bar{x} = \frac{\text{cov}(x;y)}{V(y)}\left(y - \bar{y}\right) \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{13}{4}}\left(y - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}y = x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}.$$

Le coefficient de corrélation est $r = \frac{\text{Cov}(x\ ;\ y)}{\sqrt{V(x)}.\sqrt{V(y)}} = \frac{\frac{13}{8}}{\sqrt{\frac{139}{16}}.\sqrt{\frac{13}{4}}} \simeq 0{,}306$.

B. Exercices

1. 1) On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant :

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 9[
Effec-	25	15	16	12	32

a) Construire un histogramme représentant cette série.
b) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
c) Dresser le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
d) Déterminer la classe modale de cette série.
c) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

2. Le tableau suivant donne les notes sur 100 obtenues par 120 étudiants d'une université à leur examen final.

Classe	[30;40]	[40;50]	[50;60]	[60;70]	[70;80]	[80;90]	[90;100]
Effectif	1	3	11	21	43	32	9

a) Dresser le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
Construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
b) Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série.

3. On considère une série dont les effectifs cumulés décroissants sont donnés dans le tableau suivant :

Classe	[0 ;4 [	[4 ;6 [	[6 ;8 [	[8 ;10[	
Eff.cu. dec	60	45	24	6	

a) Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants.
b) Déterminer graphiquement, la médiane de cette série, vérifier le résultat par le calcul.
c) Calculer la moyenne de cette série.

4. On considère une série dont les fréquences sont données dans le tableau suivant :

Classe	[0 ; 3[	[3 ; 5 [	[5 ; 7 [	[7 ;10[	
Eff.cu.. dec	10%	25%	35%	30%	

a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

5 Le tableau suivant donne les durées de vie en heures, regroupées en huit classes, d'un lot de piles d'une même marque pour lampes à poche.

D.v	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[	[80 ;90[	[90 ;100[	[100 ;110[	[110;120[	[120;130 [
Ef	10	15	35	40	30	20	15	5

a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.
b) Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série.

6. La série suivante donne la répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de 6ème année.

Tai.	[145 ;155 [	[155 ;160 [	[160 ; 165[	[165 ;170 [	170 ;175 [	[175 ;18 [
Effe.	3	5	6	8	8	6

a) Représenter cette série par l(histogramme des effectifs.
b) Déterminer la (ou les) classe(s)modale (s) de cette série et calculer sa moyenne.
c) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants. Déterminer la médiane de cette série.

7. Une étude statistique portant sur un caractère x a permis de construire l'histogramme ci-dessous.
a) Quelle est la (ou les) classe(s) modale(s) de la série statistique correspondante ?
b) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissantes, en déduire la médiane.
c) Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.
c) Sachant, que l'effectif de la population est 250, dresse le tableau des effectifs.

8. On dispose de la statistique suivante relative aux exploitations agricoles d'une région, classées d'après leur superficie en hectares.

Sup. en H	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 51[	[5 ; 10	[10 ;20[	[20 ; 40[
effectif	**26**	**35**	**29**	**53**	**91**	**71**	**25**

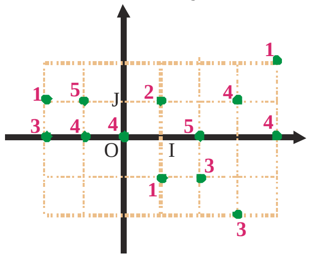
Représenter l'histogramme relatif à cette distribution.
Dans un repère orthogonal (O ; I ; J) , représenter les polygones cumulatifs croissants et décroissants.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux polygones.
Déterminer le pourcentage des exploitations agricoles de superficies : inférieur à 5 hectares ; supérieure à 10 hectares ; comprises entre 2 et 20 hectares.

9. On a relevé le nombre x de sœurs et le nombre y de frères de chacun des 40 élèves d'une classe.
On a obtenu la série double suivante :

x_i \ y_i	0	1	2	4	5
0	0	3	0	0	0
1	0	4	2	2	0
2	3	5	4	4	2
3	1	4	0	1	0
5	0	2	2	0	1

a) Représenter par des points pondérés le nuage de points associé à cette série.
b) Déterminer et placer le point moyen du nuage.

10 Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on a représenté par des points pondérés le nuage associé à une série statistique à deux caractères x et y.



a) Dresser les tableaux des effectifs des deux séries marginales.
b) Déterminer et placer le point moyen du nuage.

11 Soit la série statistique double :

x	3	5	6	8	9	11
y	2	3	4	6	5	8

Représenter le nuage de points du tableau.
Calculer les coordonnées du point moyen G.
Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y.

12 Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

a) Représenter le nuage de points associés à cette à cette série.
b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite sur le graphique.
c) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

13 Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population

Age (x_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

a) Déterminer une équation pour chacune des deux droites de régression.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

14 On a étudié trois caractères x ; y et z sur une population de cinq individus et on a obtenu les résultats suivants :

x_i	1	2	3	4	5
yi	40	45	35	35	30
zi	0	-3	1	4	-1

a) Représenter sur deux graphiques différents les nuages de points associés respectivement aux séries (x_i ; y_i) et
(x_i ; z_i).
b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de z en x.
c) Calculer les coefficients de corrélation linéaire des séries (x_i ; y_i) et (x_i ; z_i).