SOMMAIRE

Répartition des chapitres par séries

Séries C	Séries D
Tous les	Chapitres
C	3
H	4
A	5
P	6
I	7
T	8
R	9
E	10
S	18

Les auteurs

Equipe de conseillers pédagogiques de l'IPN composée de :

- Mohamed El Bechir Ould Sidaty
- Mohamedou Ould Zah
- Mohameden Ould Hadi
- Sidi Mohamed Ould Mohamed Ahmed
- Mohamed Mahmoud Ould Sidi Brahim
- Aminettou Mint Aïda

Traitement technique & illustrations réalisées par
Bechir Ould Sidaty

CHAPITRE 1

Arithmétique

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Soient a et b deux entiers relatifs, a est divisible par b($b \in \mathbb{Z}^*$) si et seulement s'il existe un entier k tel que : a = kb

2) Multiple, diviseur

Soient a et b deux entiers relatifs, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- a est divisible par b
- b est un diviseur de a
- a est un multiple de b

3) Propriétés

Soit a un entier relatif

- **P_1** l'opposé d'un multiple de a est un multiple de a
- **P_2** la somme de deux multiples de a est un multiple de a
- **P_3** la différence de deux multiples de a est un multiple de a
- **P_4** le produit d'un multiple de a par un entier relatif est un multiple de a
- **P_5** les diviseurs de a sont les diviseurs positifs et leurs opposés

4) Division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels, b étant non nul.

Il existe un seul entier naturel q et un seul entier naturel r tels que a = bq + r ; $0 \leq r \leq b$

q s'appelle le quotient de la division ; r le reste.

II. Nombres premiers

1) Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs 1 et lui-même.

Un nombre entier naturel qui n'est pas premier est dit composé.

Exemples

- 0 n'est pas premier : tout entier naturel non nul est diviseur de 0.
- 1 n'est pas premier, il admet un seul diviseur positif.
- 2 est le seul entier pair premier.

2) Propriétés

- **P_1** Il existe d'une infinité de nombres premiers
- **P_2** Décomposition primaire : tout entier naturel s'écrit de façon unique comme produit de facteurs premiers à l'ordre des facteurs près a = $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ tels que p_i premiers et α_i entiers.

Exemple

- $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
- $35 = 5^1 \times 7^1$
- $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

3) Règle pratique

Pour étudier si un entier naturel a est premier on effectue sa division euclidienne par les nombres premiers successifs jusqu'à ce que :

- soit le reste est nul auquel cas a est n'est pas premier (et le nombre b correspondant à cette étape est le plus petit diviseur premiers de a.
- soit on arrive à un quotient q inférieur au diviseur b (ce qui équivaut à $b^2 > a$) sans avoir rencontré de reste nul, auquel cas on peut conclure que a est premier.

Le crible d'Ératosthène Permet d'obtenir aisément les nombres premiers dans l'ordre croissant.

Exemple Le crible d'Ératosthène (pour les 100 premiers entiers)

0	10	20	30	34	50	60	70	80	90
1	**11**	21	**31**	**41**	51	**61**	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	**13**	**23**	33	**43**	**53**	63	**73**	**83**	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	**17**	27	**37**	**47**	57	**67**	77	**87**	**97**
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	**19**	**29**	39	49	**59**	69	**79**	**89**	99

- **P_3** Soit a et b deux entiers naturels, b divise a si et seulement si tout diviseur premier de b se trouve dans la factorisation primaire de a avec un exposant au moins égal à celui qu'il a dans celle de b.

  Exemple : $12 = 2^2 \times 3$; $72 = 2^3 \times 3^2$; 12 est un diviseur de 72.

III. Pgcd -ppcm

1) Définition

a et b désignent deux entiers naturels non nuls. On appelle plus grand commun diviseur de a et b et on note pgcd (a ; b) le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b.

On appelle plus petit commun multiple de a et b et on note ppcm(a ; b) le plus petit entier naturel non nul qui est à la fois multiple de a et multiple de b.

L'algorithme d'Euclide fournit une méthode pratique de recherche du pgcd de deux nombres.

Exemple On veut déterminer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 324 et 385 :

- $385 = 324 \times 1 + 61$
- $324 = 61 \times 5 + 19$
- $61 = 19 \times 3 + 4$
- $19 = 4 \times 4 + 3$
- $4 = 3 \times 1 + 1$
- $3 = 1 \times 3 + 0$

Ces calculs peuvent se présenter dans le tableau suivant :

	1	5	3	4	1	3
385	324	61	19	4	3	1
61	19	4	3	1	0	

Le dernier reste ≠ 0 obtenu dans les divisions successive étant 1on en déduit que pgcd(324 ;385) = 1. (premiers entre eux). On peut également chercher le pgcd en décomposant :

385	5
77	7
11	11
1	1
0	

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	1
0	

; Donc, $385 = 5 \times 7 \times 11$; $324 = 2^2 \times 3^4$.

Aucun facteur premier ne figure à la fois dans la décomposition de 385 et celle de 324.

2) Propriétés

- Les diviseurs communs à deux entiers naturels sont les diviseurs de leurs pgcd,
- Les multiples communs à deux entiers naturels sont les multiples de leurs ppcm,
- Le produit de deux entiers naturels est égal au produit de leur pgcd par leur ppcm.

IV. Entiers premiers entre eux

1) Définition

Deux entiers relatifs sont premiers entre eux si et seulement si leur seul diviseur commun positif est 1.

2) Théorème de Bézout

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : au + bv = 1.

3) Théorème de Gauss

a, b et c désignent des entiers relatifs. Si c divise le produit ab et si a et c sont premiers entre eux, alors c divise b.

V. Congruences dans Z

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b sont deux entiers relatifs.

1) Définition

On dit que a et b sont congrus modulo n et l'on note $a \equiv b$ (n) lorsque a – b est un multiple de n.

2) Propriétés caractéristiques

a et b sont congrus modulo n si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

2) Compatibilité avec les opérations

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, a, a', b et b' sont des entiers relatifs.

Si $a \equiv a'$ (n) et $b \equiv b'$ (n), alors

- $a + b \equiv a' + b'$ (n)
- $a - b \equiv a' - b'$ (n)
- $ab \equiv a'b'$ (n)

Pour tout k de $\mathbf{N}^*$ $a^k \equiv a'^k$ (n).

3) Applications aux critères de divisibilité

x désigne un entier naturel dont l'écriture en base décimal est $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ (les a_i étant ses n + 1 chiffres)

- $x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (9) ; on en déduit que x est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres est divisible par 9.
- $x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (3) ; on en déduit que x est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres est divisible par 3.
- $x \equiv a_0$ (2) ; x est divisible par 2 si et seulement si son chiffre unité est pair.
- $x \equiv a_0$ (5) ; x est divisible par 5 si et seulement si son chiffre unité est 0 ou 5.
- $x \equiv \overline{a_1 a_0}$ (4) ; x est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- $x \equiv \overline{a_1 a_0}$ (25) ; x est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.
- $10 \equiv -1$ (11) ; $100 \equiv 1$ (11) ; $1000 \equiv 1$ (11) …
- x est divisible par 11 si et seulement si la différence des sommes de ses chiffres de rangs pairs et impairs est divisible par 11.

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$; $U_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1) Calculer $U_{n+1} - 9\, U_n$

2) Démontrer par récurrence : pour tout entier naturel U_n est divisible par 7.

Solution

1) pour tout $n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} - 9\, U_n = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} - 9(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

$$= 3^{2n+3} + 2^{n+3} - 3^2 \times 3^{2n+1} - 9 \times 2^{n+2}$$

$$= 3^{2n+3} - 3^{2n+3} + (2-9) \times 2^{n+2}$$

On a donc $U_{n+1} - 9\, U_n = -7 \times 2^{n+2}$.

2) Démontrons par récurrence : U_n est divisible par 7 $\forall n \in \mathbf{N}$.

La propriété est donc vraie pour n = 0.

Soit p un entier naturel, supposons que U_p est divisible par 7 et démontrons que U_{p+1} l'est également.

On a $U_{p+1} - 9U_p = -7 \times 2^{p+2}$, mais par hypothèse U_p est divisible par 7, donc il en est de même pour $9U_p$.

$9U_p$ et $7 \times 2^{p+2}$ étant tout deux multiples de 7 leur différence est aussi multiple de 7.

Par conséquent U_{p+1} est multiple de 7.

Donc pour tout $\forall n \in \mathbf{N}$, U_n est divisible par 7.

Exercice. 2

1°) 89 est-il un nombre premier

2) Simplifier le plus possible les fractions $\frac{72}{64}$; $\frac{382}{534}$; $\frac{1068}{3144}$.

Solution

1) pour déterminer si 89 est premier, étudions sa divisibilité par les nombres premiers successifs

- 89 n'est pas divisible par 2 ; (9 est impair)
- 89 n'est pas divisible par 3 ; (8+9 n'est pas divisible par 3)
- 89 n'est pas divisible par 5 ; ($9 \neq 5$; $9 \neq 0$)
- 89 n'est pas divisible par 7 ; ($89 = 12 \times 7 + 5$),
- 89 n'est pas divisible par 11 ; ($89 = 8 \times 11 + 1$),

Le carré de 11 étant supérieur de à 89 ($11^2 = 121$), et 89 n'ayant pas de diviseur premier inférieur à 11, on peut affirmer que 89 est premier.

2) Simplification

- $\frac{72}{64} = \frac{8\times9}{8\times8} = \frac{9}{8}$; pgcd(9 ; 8) = 1 ; $\frac{9}{8}$ est irréductible.
- $\frac{382}{534} = \frac{2\times191}{2\times3\times89} = \frac{191}{267}$; $191 = 2 \times 89 + 13$ n'est divisible par 89, ni par 3,
- $\frac{1068}{3144} = \frac{2^2\times3\times89}{2^2\times3\times262} = \frac{89}{262}$; $262 = 2 \times 89 + 84$; n'est pas divisible par 89

Exercice. 3

Un document rédigé comporte 4350 lignes sur plusieurs pages.

Une page complète comporte 34 lignes et seule la dernière page est éventuellement non complète.

Calculer le nombre de lignes figurant sur la dernière page.

Solution
Effectuons la division euclidienne de 4350 par 34
$4350 = 34 \times 127 + 32$,
Donc, sur la dernière page (n° 128) il y a 32 lignes.

Exercice. 4
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture du naturel a dans la base n.
1) a = 3 ; n = 7 ; 3) a = 53 ; n = 5
2) a = 53 ; n = 2 ; 4) a = 4606 ; n = 12

Solution
1) $a < n \Rightarrow \overline{a}^{n} = a$; $\overline{3}^{7} = 3$;
2) $53 = 5 \times 10 + 3 = 5 \times 5 \times 2 + 3 = 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 3 \times 5^0$
donc $53 = \overline{203}^{\text{cinq}}$
3) $53 = 2 \times 26 + 1$; $26 = 2 \times 13 + 0$;
$13 = 6 \times 2 + 1$; $6 = 2 \times 3 + 0$; $3 = 2 \times 1 + 1$; $1 = 2 \times 0 + 1$
Donc $53 = \overline{110101}^{\text{deux}}$.

4) $4606 = 12 \times 383 + 10$
$383 = 12 \times 31 + 11$
$31 = 12 \times 2 + 7$
$2 = 12 \times 0 + 2$
Ou encore $4606 = 2 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 11 \times 12 + 10$
Dans la base 12 on écrit $10 = \alpha$; $11 = \beta$. Donc $4606 = \overline{27\alpha\beta}^{\text{douze}}$.

Exercice. 5
L'entier naturel 341 s'écrit $\overline{2331}^{a}$ calculer a.

Solution
a est un entier supérieur à 3 qui vérifie :
$341 = 2 \times a^3 + 3 \times a^2 + 3 \times a + 1$, donc a est un entier supérieur ou égal à 4 solution de l'équation polynomiale : $2 \times x^3 + 3 \times x^2 + 3 \times x + 1 = 0$
On peut procéder par essaies successifs, mais on a
$2a^3 < 341 < 3a^3 \Leftrightarrow \frac{341}{3} < a^3 < \frac{341}{2}$, donc a = 5

Exercice. 6
a) déterminer pgcd(168 ; 288) et ppcm(168 ; 288).
b) a ; b et c trois entiers tels que pgcd(a ;b) = 1 et pgcd(a ;c) = 1 ; montrer que a et bc sont premiers entre eux.
c) déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que $14u + 25v = 1$

Solution
a) Utilisons l'algorithme d'Euclide
- $288 = 168 \times 1 + 120$
- $168 = 120 \times 1 + 48$
- $120 = 48 \times 2 + 24$
- $48 = 24 \times 2 + 0$

Ces divisions Euclidiennes successives peuvent se présenter dans le tableau suivant :

	1	1	2	2
288	168	120	48	24
120	48	24	0	

Pgcd(168 ; 288) = 24

Donc ppcm(168 ; 288) = $\frac{168 \times 288}{24} = 2016$

Ou encore $168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$; $288 = 2^5 \times 3^2$;

Donc pgcd(168 ; 288) = $2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$

Ppcm(168 ; 288) = $2^5 \times 3^2 \times 7^1 = 2016$

b) On pose d = pgcd(a ; bc), alors d divise bc ; d est premier avec b, donc d'après le théorème de Gauss d divise c, donc d est un diviseur positif commun entre a et c.
Or le seul diviseur positif commun de a et c c'est 1, d'où d = 1 et pgcd(a ; bc) = 1.
Donc a et bc sont premiers entre eux.

c) $14u + 25v = 1$; 14 et 25 sont premiers entre eux ; 2 5 = 14 + 11,
donc, d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs u et v vérifiant cette égalité.
Déterminons de tels entiers u et v en utilisant l'algorithme d'Euclide de calcul du pgcd de deux entiers.

- $25 = 14 \times 1 + 11$ (1)
- $14 = 11 \times 1 + 3$ (2)
- $11 = 3 \times 3 + 2$ (3)
- $3 = 2 \times 1 + 1$ (4)

Par rapports successifs en partant de la dernière égalité on a :

- $1 = 3 - 2$ (4)
- $1 = 3 - (11 - 3 \times 3)$ (3)
- $= 4 \times 3 - 11$
- $1 = 4 \times (14 - 11) - 11$ (2)
- $= 4 \times 14 - 5 \times 11$
- $1 = 4 \times 14 - 5 \times (25 - 14)$ (1)
- $= 9 \times 14 - 5 \times 25$

On a donc $14 \times 9 + 25 \times (-5) = 1$ d'où $u = 9$; $v = -5$.

B. Exercices

1. Donner les écritures du nombre 0,6 sous forme de fraction dont le dénominateur est compris (ou au sens large) entre 50 et 70.

2. Quelles sont les fractions égales à $\frac{33}{21}$ dont le dénominateur est positif et strictement inférieur à 50 ?

3. 1) trouver tous les diviseurs positifs de 144.
2) trouver tous les diviseurs positifs de 1820.
3) trouver tous les diviseurs positifs de 1485.

4. Un terrain rectangulaire a pour dimensions 156 m et 90 m ; on veut l'entourer d'une clôture de fil de fer soutenue par des piquets régulièrement espacés, un piquet étant planté à chaque angle du terrain, sachant que deux piquets successifs doivent être distants d'un nombre entier de mètres et située à plus de 2m et à moins de 5m l'un de l'autre .
Combien faut-il prévoir de piquets ?

5. On appelle diviseur propre d'un entier naturel tout diviseur positif de cet entier autre que lui-même.
Deux entiers naturels sont dits amicaux lorsque la somme des diviseurs propres de chacun est égal à l'autre.
a) montrer que 220 et 284 sont amicaux
b) que peut-on dire de 1210 et 1184 ?

6. a) 97 est-il un nombre premier ?
261 est-il un nombre premier ?
c) 1031 est-il un nombre premier ?

7. a désigne un entier relatif, Démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ est divisible par 6.

8. Pour chacune des écritures proposées, préciser laquelle des trois propositions suivantes est vraie :
P_1 l'écriture ne définit aucune division euclidienne
P_2 l'écriture définit une seule division euclidienne
P_3 l'écriture définit deux divisions euclidiennes.
1) $63 = 9 \times 7$; 3) $70 = 9 \times 7 + 7$
2) $68 = 9 \times 7 + 5$; 4) $73 = 9 \times 7 + 10$

9. Montrer que si x est un entier naturel non divisible par 5, alors le reste de la division Euclidienne de x^4 par 5 est 1.

10 1) déterminer le reste de la division Euclidienne par 5 de chacun des nombres 2^k l'entier k variant de 0 à 8.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le reste de la division Euclidienne de 2^{4n} par 5 est égal à un entier constant à préciser.
2) Démontrer à l'aide de la question précédente et de la formule du binôme de Newton que pour tout entier naturel n le reste dans la division euclidienne de 17^{4n} par 5 est 1.
3) Déduire des deux premières questions que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3$ est divisible par 5.

11 Démontrer que $2^{2n} + 2$ est divisible par 3 quel que soit l'entier naturel n (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton ou procéder par récurrence).

12 1) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances successives de 10 à 10^6.
2) Démontrer par récurrence que : pour tout k de $\mathbf{N}$,
le reste dans les divisions euclidiennes de 10^{6k} par 7 est 1.
En déduire le reste dans la division euclidienne de 10^n par 7 suivant la valeur de l'entier n.
3) Déterminer tous les entiers naturels tels que $3 + 10^n$ soit divisible par 7.

13 Dans chacun des cas suivants déterminer l'écriture du naturel a dans la base n :
1) a = 4 ; n = 2 ; 3) a = 23 ; n = 12
2) a = 13 ; n = 5 ; 4) a = 105 ; n = 8

14 Dans cet exercice les écritures soulignées sont en base 2.
1) comment s'écrivent les puissances de 2 dans le système binaire ?
2) Effectuer les calculs proposés en donnant l'écriture des résultats en base 2 (n et p désignent des entiers naturels non nuls).
a) $\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ chiffres}} + 1$; b) $\underbrace{10\ldots0}_{n\text{ zéro}} \times \underbrace{10\ldots0}_{p\text{ zéro}}$; c) $\underbrace{10\ldots01}_{n-1\text{ zéro}} \times \underbrace{1\ldots1}_{n\text{ chiffres}}$

15 Soit x le nombre qui s'écrit $\overline{1357}$ en base 8 ; donner l'écriture décimale et l'écriture en base 2 de x.

16 Soit b un entier supérieur ou égal à 2 ; écrire le nombre $(b + 1)^3$ en base b.; Calculer a ; b ; c.

17 Dans chacun des cas suivants ; déterminer le pgcd de a et b en utilisant deux méthodes :

- l'algorithme d'Euclide
- la décomposition en produit de facteurs

1) a = 144 ; b = 216 3) a = 1024 ; b = 1120
2) a = 225 ; b = 350 4) a = 3492 ; b = 4680

18 Pour carreler une surface rectangulaire de dimensions 60 cm et 90cm, on utilise des carreaux de forme carré (tous de même dimensions)
Sachant que la mesure en cm du côté d'un carreau est un nombre entier.
Déterminer les valeurs possibles du nombre de carreaux nécessaires.

19 Soient a et b deux entiers naturels
1) montrer que pgcd $(a ; a^2 + b)$ = pgcd (a ;b)
2) Montrer que ppcm(a + b ; 2a + 2b) = ppcm(a ; b
Indication : a ; b ; a' ; b' désignent des entiers naturels, on a : pgcd(a ; b) = pgcd(a' ; b') si et seulement si les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à a' et b'.

20 a et b deux entiers naturels non nuls. On pose x = 15a + 4b et y = 11a +3b .
Calculer 3x -4y et -11x + 15y .
En déduire que :
pgcd(15a + 4b ; 11a +3b) = pgcd(a ; b)

21 n désigne un entier naturel non nul
1) Calculer pgcd(n ; n +1) ; ppcm(n ; n + 1)
2) Calculer pgcd(n +1 ; 2n + 1) ;
ppcm(n +1 ; 2n + 1).

22 a et b désigne deux entiers naturels premiers entre eux. On pose s = a + b et p = ab
Determiner: pgcd(a ; s) ; pgcd(s ;p).

23 Déterminer les couples (x; y) d'entiers naturels tels que : pgcd(x ; y) = 160 ;
ppcm(x ; y)= 7200

24 p est un nombre premier et k un entier tel que : $1 \leq k \leq p - 1$
1) Vérifier que $C_p^k = \frac{p}{k} C_{p-1}^{k-1}$;
2) En déduire que p divise C_p^k .

25 x et y désignent des entiers naturels premiers entre eux.
Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
P_1 Il existe des entiers relatifs a et b tels que $xa - yb = 1$.
P_2 Pour tous entiers relatifs u et v on a : $xu + yv = 1$
P_3 Il existe une infinité de couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que xu + yv = 1
P_4 Il existe des entiers relatifs α et β tels que : $\alpha x + \beta y = 3$

26 Déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs vérifiant la condition proposée :
1)3u + 4v = 1 ; 2) 364u + 165v = 1 ;
3) 364 -165v = 6

27 1) Déterminer un couple (x0 ; y0) d'entiers relatifs tels que : $37x_0 + 165y_0 = 1$
2) En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans **Z** de l'équation
37x + 22y = 1.

CHAPITRE 2

Systèmes linéaires

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I - Définitions

1) Définition 1

On appelle système linéaire de n équations aux p inconnues x_1 ; x_2 ; …x_p le système

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $a_{11}, \ldots, a_{1p}, \ldots, a_{np}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels donnés.

- on dit aussi que (S) est un système à n lignes et p colonnes.
- si n = p, (S) est un système carré.
- les réels $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$ sont les coefficients diagonaux du système. Lorsque les coefficients situés sous la diagonales sont nuls ($a_{ij} = 0$, pour tous i et j tels que i > j), le système est triangulaire supérieur.
- une solution de (S) est un p-uplet (x_1 ; x_2 ; …,x_p) vérifiant simultanément les n- équations. Résoudre (S) c'est déterminer l'ensemble de ces solutions.

Exemple

$$(S_1)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 14 \end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad 2x3 = -6 \end{cases}$$

(S_2) est carré et triangulaire supérieur ; (7 ; 1 ; -3) est une solution de (S_1) et (S_2).

2) Définition 2

Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions, autrement dit si toute solution de (S) est solution de (S') et réciproquement.

II – Opérations élémentaires sur les systèmes

1) Codage

On note L_i la i[ème] ligne d'un système (S) .

Le tableau ci-dessous rassemble les opérations élémentaires sur les lignes de (S) et leur codage.

Opération élémentaire	codage
Echange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
Multiplication de la ligne i par α (α ≠ 0)	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
Addition à la ligne i d'un multiple de la ligne j (λ réel quelconque)	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

2) Théorème

On passe d'un système (S) à un système (S') équivalent :

- en échangeant l'ordre des inconnues de (S), ce qui revient à échanger deux colonnes de (S).
- en supprimant dans (S) deux lignes identiques
- en procédant à une opération élémentaire sur les lignes de (S).

Exemple

Transformons le système (S) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+2z+2t=1 \\ x+3y+3z+t=3 \\ 2x+3y+z+t=4 \end{cases}$ par $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$ $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ z+t=0 \\ 2y+2z \quad =2 \\ y-z-t=2 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z=1 \\ z+t \ =0 \\ y-z-t \ =2 \end{cases}$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \begin{cases} x+y+z+t \ =1 \\ y+z \ =1 \\ z+t \ =0 \\ -2z-t \ =1 \end{cases}$;

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \begin{cases} x+y+z+t \ =1 \\ y+z \ =1 \\ z+t \ =0 \\ t \ =1 \end{cases}$

Le système obtenu est triangulaire supérieur. Il se résout aisément par substitution. Il a une solution unique (-1 ; 2 ; -1 ; 1).

III – La méthode de Gauss

1) Exposé de la méthode

L'idée

Il s'agit, par étapes successives, de transformer un système (S) en un système triangulaire supérieur
(S'), qui lui est équivalent.
Résoudre un tel système (S') sera dès lors une chose aisée, par substitution.

Les étapes ;

a) On place en L_1 une ligne où le coefficient de x_1 est non nul (une telle ligne existe, et ce coefficient est appelé **Pivot**.)
   On élimine l'inconnue x_1 dans $L_2,\ldots, L_n$ par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ (λ à calculer pour chaque $i \geq 2$)

b) S'il existe parmi $L_2,\ldots, L_n$ une ligne où le coefficient de x_2 est non nul, on la place en L_2 , et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.
   On élimine l'inconnue x_2 dans $L_3,\ldots, L_n$ par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_2$

c) Ainsi de suite, jusqu'à obtenir une forme triangulaire.

2) Mise en œuvre

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 2a+b-c-d \ =-18 \\ a+b+c+d \ = \ 0 \\ 3a+5c \ = \ 1 \\ a+b-7c+13d=-40 \end{cases}$

Solution

Pour éviter des calculs fractionnaires, il est préférable de travailler avec un premier pivot égal à 1.
Nous procédons donc ainsi :

① $L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} \boxed{1}a+b+c+d &= 0 \\ 2a+b-c-d &= -18 \\ 3a+5c &= 1 \\ a+b-7c+13d &= -40 \end{cases}$; ② $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ $\begin{cases} a+b+c+d &= 0 \\ \boxed{-1}b-3c-3d &= -18 \\ -3b+2c-3d &= 1 \\ -8c+12d &= -40 \end{cases}$

③ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ $\begin{cases} a+b+c+d &= 0 \\ -b-3c-3d &= -18 \\ \boxed{11}c+6d &= 55 \\ -8c+12d &= -40 \end{cases}$; ④ $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{8}{11}L_3$ $\begin{cases} a+b+c+d &= 0 \\ -b-3c-3d &= -18 \\ 11c+6d &= 55 \\ \frac{180}{11}d &= 0 \end{cases}$

Du dernier système, nous déduisons successivement : d = 0 ; c = 5 ; b = 3 ; a = -8.
L'ensemble de solutions est S = $\{(-8\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 0)\}$; solution unique.

3) Cas particuliers

Un système linéaire n'a pas toujours une solution unique, même s'il est carré. Nous en utilisons ici deux exemples résolus par la méthode de Gauss.

Exemple 1

Résoudre le système $\begin{cases} 1x-3y+2z &= 1 \\ 5x+y+z &= -4 \\ -2x-10y+5z &= 7 \end{cases}$; $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ $\begin{cases} 1x-3y+2z &= 1 \\ \boxed{16}y-9z &= -9 \\ -16y+9z &= 9 \end{cases}$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\begin{cases} x-3y+2z &= 1 \\ 16y-9z &= -9 \\ 0 &= 0 \end{cases}$; On peut exprimer (par exemple) z, puis x, en fonction de y :

z = $\frac{16}{9}y+1$; $x = \frac{-5}{9}y-1$; L'ensemble des solutions contient une infinité de triplets :

S = $\left\{(-\frac{5}{9}y\text{-}1\ ;\ y\ ;\ \frac{16}{9}y+1) ; y \in \mathbf{R}\right\}$

Exemple 2 Résoudre le système

$\begin{cases} \boxed{1}x_1-2x_2-3x_3 &= 1 \\ 5x_1-3x_2+x_3 &= 2 \\ 3x_1-x_2+x_3 &= 3 \\ x_1+7x_3 &= 4 \end{cases}$; $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3 &= 1 \\ \boxed{-13}x_2+16x_3 &= -3 \\ -7x_2+10x_3 &= 0 \\ -2x_2+10x_3 &= 3 \end{cases}$;

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{13}L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{13}L_1$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3 &= 1 \\ -13x_2+16x_3 &= -3 \\ \frac{18}{13}x_3 &= \frac{21}{13} \\ \frac{98}{13}x_3 &= \frac{45}{13} \end{cases}$; $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{98}{18}L_3$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3 &= 1 \\ -13x_2+16x_3 &= -3 \\ \frac{18}{13}x_3 &= \frac{21}{13} \\ 0 &= -\frac{16}{3} \end{cases}$;

La dernière équation n'ayant pas de solution, l'ensemble de solutions est vide.
S = Φ

Savoir-faire

A. Applications

Exercice 1

Déterminer un polynôme P de degré trois vérifiant les conditions : P(1) = -9 ; P(2) = -9 ; P(4) = 45.

Solution

Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Le problème revient à résoudre le système : $\begin{cases} a+b+c+d=-9 \\ 8a+4b+2c+d=-9 \\ 27a+9b+3c+d=5 \\ 64a+16b+4c+d=45 \end{cases}$;

Etant donné que le l'inconnue d figurant avec le coefficient 1, commençons par inverser les inconnues pour faciliter les calculs.

$$\begin{cases} d+c+b+a=-9 \\ d+2c+4b+8a=-9 \\ d+3c+9b+27a=5 \\ d+4c+16b+64a=45 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} d+c+b+a &=-9 \\ c+3b+7a &=0 \\ c+5b+19a &=14 \\ c+7b+37a &=40 \end{cases} ;$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} d+c+b+a &=-9 \\ c+3b+7a &=0 \\ 2b+12a &=14 \\ 2b+18a &=26 \end{cases} ; \; L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \begin{cases} d+c+b+a &=-9 \\ c+3b+7a &=0 \\ 2b+12a &=14 \\ 6a &=12 \end{cases}$$

On en tire successivement : a = 2 ; b = -5 ; c= 1 ; d = -7.

Donc, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$

Exercice 2

Résoudre le système suivant par les méthodes : substitution, combinaison.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases}$$

Solution

- Résolution par substitution

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ t=7-x-y \\ x+6-x-y+7-x-y=8 \\ y+6-x-y+7-x-y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 6-x-y \\ t &= 7-x-y \\ -x-2y &=-5 \\ -x-y &=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &=6-x-y \\ t &=7-x-y \\ x+2y=5 \\ y &=4-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z &=6-x-y \\ t &=7-x-y \\ y &=4-2x \\ x+8-4x &=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &=6-x-y \\ t &=7-x-y \\ y &=4-2x \\ -3x &=-3 \end{cases}$$

On en tire successivement : x = 1 ; y = 2 ; z = 3 ; t = 4 ; d'où S = $\{(1\,;\ 2\,;\ 3;4)\}$.

- Résolution par combinaison

Posons S = x + y + z + t

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-t=6 \\ S-z=7 \\ S-y=8 \\ S-x=9 \\ 3S\ \ =30 \end{cases}$$

(cette dernière équation s'obtient en additionnant membre à membre les quatre équations du système initial)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S-t=6 \\ S-z=7 \\ S-y=8 \\ S-x=9 \\ S\ \ =10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \\ t=4 \end{cases}$$

Exercice 3

Dans une base de l'espace. On considère les trois vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Solution

$\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$, sont coplanaires s'il existe (par exemple) deux réels x et y tels que : $\vec{w}=x\vec{u}+y\,\vec{v}$.

Cette égalité nous conduit a un système d'équations : $x\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=-27 \\ 7x-2y=5 \\ 3x\ \ \ \ \ =9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} -x+3y=-27 \\ 7x-2y=5 \\ x\ \ \ \ \ \ =3 \end{cases}$ ce qui donne, enfin, x = 3 ; y = 8, donc $\vec{w}=3\vec{u}+8\vec{v}$; d'où les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont coplanaires.

B. Exercices

En utilisant des opérations élémentaires, résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=8 \\ 3x_1+2x_2 \qquad =-1 \\ x_1+4x_2+2x_3=7 \end{cases}$

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

3. $\begin{cases} a-b+2c+3d=1 \\ a-3b+4c-d=7 \\ -a+2b-2c-9d=10 \\ 2a-3b+7c-d=16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ 5x-y+z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 8x+2y+5z=3 \\ 3x-4y+3z=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x+3y+z=2 \\ 4x-y+7z=0 \\ 2x+5y+9z=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 3a-b+2c-5d=-26 \\ -a \qquad +c-2d=-8 \\ 8a+2b \qquad +d=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x+y-z-t=3 \\ x-2y+z-2t=7 \\ 3x+2z+t=5 \\ 2x-y+2z-2t=15 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y-z-t=-1 \\ x-3y+z+t=-2 \\ x+y-2z+4t=4 \\ x-y+z-2t=-8 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 6x+6y+5z+18t+204 & =14 \\ 10x+9y+7z+24t+304 & =18 \\ 12x+12y+23z+27t+354 & =32 \\ 8x+6y+6z+15t+204 & =16 \\ 4x+5y+4z+15t+154 & =11 \end{cases}$

11 Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant :
P(1) = 0 ; P(2) = 2 ; P(3) = -1 ; P(4) = 5.

12 Déterminer une fonction polynôme de degré 3 dont la représentation graphique passe par les points A(0 ; -1) ; B(2 ; 5) et admet en chacun des points A et B une tangente horizontale.

13 Même exercice avec A(2 ; -1) et B(1 ; 1).

14 Dans une base de l'espace, on considère les vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 34 \\ 55 \\ 89 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

15 Même exercice avec,

$\vec{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

CHAPITRE 3

Nombres complexes 1

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

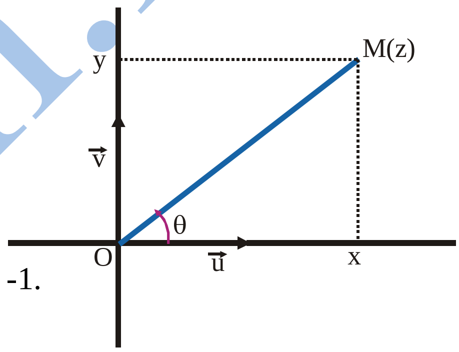
I- Vision géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) orthonormé direct.

1) Coordonnées cartésiennes - Coordonnées polaires -

Tout point M du plan est déterminé par le couple de réel (x ; y) tels que :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$; (x ; y) s'appelle le couple de coordonnées cartésiennes du point M.



Tout point M du plan distinct de O est déterminé par un couple (r ; θ) tels que :

OM = r et θ = ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) (2π).

(r ; θ) est alors le couple de coordonnées polaires du point M.

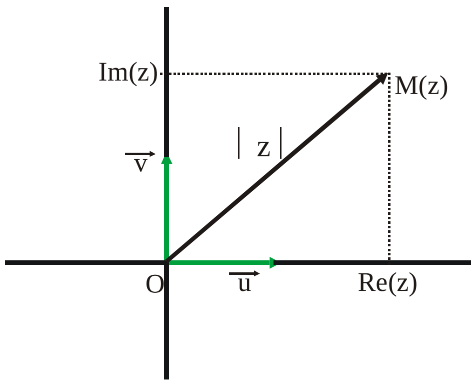
A tout point M de coordonnées cartésiennes (x ; y), on associe le nombre complexe z définie par : z = x + iy ; i désigne un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

z est appelé l'affixe du point M (et aussi du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

On dit que M est le point image et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur image du nombre complexe z.

Si M est distinct de O, alors en notant (r, θ) un couple de coordonnées polaires de M, l'affixe z de M vérifie : z = x + iy = r(cosθ + isinθ).

2) Forme algébrique d'un nombre complexe

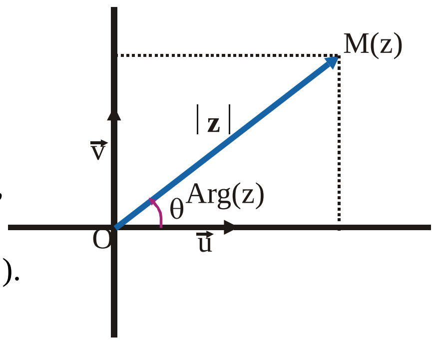


Soit un nombre complexe z ayant pour point image M, de coordonnées (x ; y), alors z = x +iy et

- x + iy est la forme algébrique de z, la partie réelle de z notée Re(z) est l'abscisse de M, Re(z) = x ;
- la partie imaginaire de z notée Im(z) est l'ordonnée de M, Im(z) = y ;
- le module de z noté $|z|$ est la distance OM ;

  $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul



Soit un nombre complexe z ayant pour point image M de coordonnées polaires (r ; θ), alors z = r(cosθ + isinθ).

- r(cosθ + isinθ) est une forme trigonométrique du nombre complexe z,
- le module de z est r.
- un argument de z est une mesure en radian de l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) (2π).

II. Ensemble des nombres complexe

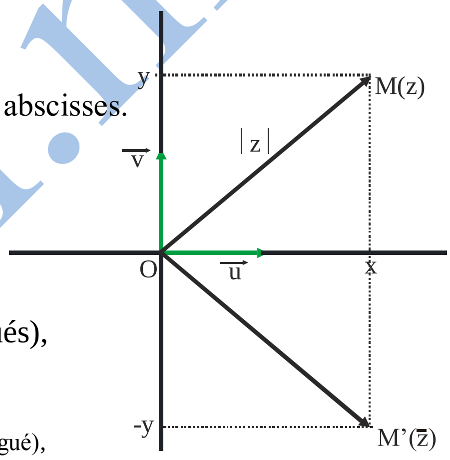
- L'ensemble des nombre complexes $x + iy$ / x et $y \in \mathbf{R}$ est noté $\mathbf{C}$, il contient l'ensemble des réels $\mathbf{R}$.
- $\mathbf{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbf{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- Le nombre i vérifie $i^2 = -1$.
- Un nombre complexe est réel si et seulement si, sa partie imaginaire est nulle, c'est dire si et seulement si son point image est situé sur l'axe des abscisses.
- On appelle imaginaire pur tout complexe de la forme iy avec y réel., un complexe est imaginaire pur, si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire si et seulement son point image est situé sur l'axe des ordonnées.

III - Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition

Le conjugué d'un nombre complexe z de forme algébrique x + iy est le nombre complexe défini par
$\overline{z} = x - iy$

2) Propriétés



z et z' désignent des nombres complexes,

- les points images de z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.
- z est réel si et seulement si, $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si, $z = -\overline{z}$,
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués),
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ (le conjugué d'un produit est le produit des conjugués),
- Si z est non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, (le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué),
- Si z' est non nul, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (le conjugué du quotient est le quotient des conjugués),
- Si n est un entier non nul, alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

IV - Module d'un nombre complexe

1) Distance de deux points

Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B. La distance AB est le module de la différence entre les affixes de A et de B ; $AB = |z_A - z_B|$.

2) Propriétés

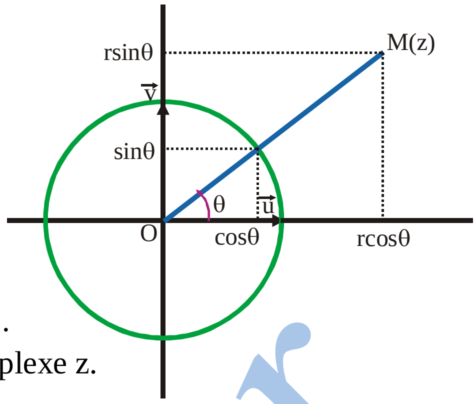
z et z' désignent deux nombres complexes

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$ (un nombre complexe, son opposé et son conjugué ont même module).
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$ (le produit des modules est égal au module du produit).
- Si z est non nul, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (le module de l'inverse est l'inverse du module),
- Si z' est non nul, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (le module du quotient est le quotient des modules),
- Pour tout entier naturel n, non nul : $|z^n| = |z|^n$.

V. Argument d'un nombre complexe

1) Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan d'affixe z. On appelle argument de z, et on note arg(z), la mesure en radian de l'angle de vecteurs : $\theta = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



2) Théorème

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r = OM = |z|$ et $\theta = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Exemple

Soient z = 1+ i, et z' = 1 – i. Mettre z et z' sous la forme trigonométrique.

On a : $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, on peut écrire $1+i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$. Or, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.

Donc $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. De la même façons, on démontre que :

$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$.

Remarques

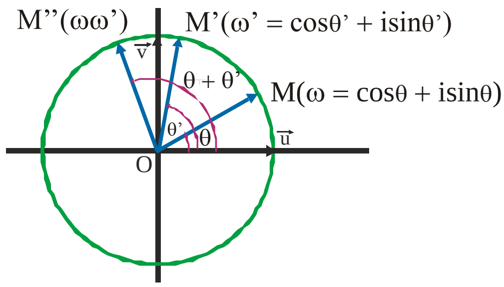
- 0 n'a pas d'écriture trigonométrique.
- un argument de z est défini à un multiple de 2π près. Tous les arguments de z sont sous la forme $\theta + k \times 2\pi$. On écrira $\arg z = \theta\ (2\pi)$.
- l'argument d'un nombre complexe non nul peut être représenté de manière unique par un nombre réel dans $[0\ ;\ 2\pi[$. On l'appelle parfois argument principal de z.
- Si z est un nombre complexe de module 1 (M appartient au cercle trigonométrique), alors $z = (\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $z = e^{i\theta}$ ($(e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha)$
- z est réel si, et seulement si, $z = 0$ ou $z \neq 0$ et $\arg z = 0\ (2\pi)$ ou $\arg z = \pi\ (2\pi)$ ou($\arg z = 0\ (\pi)$)
- z est un réel strictement positif si, et seulement si, $\arg z = 0\ (2\pi)$, et strictement négatif si, et seulement si, $\arg z = \pi(2\pi)$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = 0$ ou $z \neq 0$ et $\arg z = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ ou $\arg z = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ ou($\arg z = \frac{\pi}{2}(\pi)$)

3) Propriété

Si $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ et

$\omega' = \cos\theta' + i\sin\theta'$,

alors $\omega\omega' = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$.



VI – Equation du second degré

1) Résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à cœfficients complexes

Théorème

Soit a b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solution $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$, où d désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $b^2 - 4ac \neq 0$, alors $z_1 \neq z_2$.
- si $b^2 - 4ac = 0$, alors $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$; on dit que l'équation à une solution double.

Remarque : $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminent de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

2) Résolution sur $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à cœfficients réels

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, ou a , b et c sont des réels et a non nul.
D'après l'étude précédente on a

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une seule solution $\frac{-b}{2a}$, elle est réelle.
- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, une racine carrée complexe de Δ est $i\sqrt{-\Delta}$.

  L'équation admet deux racines complexes conjuguais : $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemples

1) Résoudre sur **C** : $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$. Calculons le discriminant réduit :
$\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi$.
$\Delta' < 0$, donc les solutions sont : $\cos\varphi + i\sin\varphi$ et $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

2) Résoudre sur **C** : $3x^2 + 2x + 2 = 0$. Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = 1 - 6 = -5 = (i\sqrt{5})^2$.
Les solutions sont donc : $\frac{-1+i\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{5}}{3}$.

3) Résoudre dans **C** : $(1-i)z^2 - 6(-4i)z + 9 - 7i = 0$. On a : $a = 1-i$; $b = -(6-4i)$, $c = 9-7i$;
$b' = -3 + 2i$; $b'^2 - ac = (-3+2i)^2 - (1-i)(9-7i) = 3 + 4i$. Calculons les racines carrées de 3 + 4i.
Il s'agit d'utiliser la méthode algébrique, soit x + iy une racine carrée de ce nombre avec x et y réels.

$(x+iy)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$ Ce système donne ,$x^2 = 4$ et $y^2 = 1$ et $xy > 0$, d'où $2 + i$ est une racine carrée de 3 + 4i, Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{3-2i+2+i}{1-i} = \frac{5-i}{1-i} = \frac{(5-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

$$z_2 = \frac{3-2i-(2+i)}{1-i} = \frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

Savoir- faire

A . Applications

Exercice 1

a) Ecrire sous forme algébrique (x + iy) les nombres complexes suivants :

a = (3 +2i)(2 – i) ; b = $\dfrac{5+6i}{1-i}$; c = $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i}$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

a = 1 – i ; b = 1 + i$\sqrt{3}$; c = $\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$; d = $\dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solution

Ecriture sous forme algébrique

- a = (3 +2i)(2 – i) = 6 -3i +4i +2 = 8 + i
- $b = \dfrac{5+6i}{1-i} = \dfrac{(5+6i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{5+5i+6i-6}{2} = \dfrac{-1+11i}{2} = \dfrac{-1}{2}+\dfrac{11}{2}i$
- $c = \dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i} = \dfrac{(3+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(3+i)} = \dfrac{9+6i-1+4-4i-1}{6+2i-3i+1} = \dfrac{11+2i}{7-i}$

  $= \dfrac{(11+2i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \dfrac{77+11i+14i-2}{50} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Ecriture sous forme trigonométrique

- $a = 1-i = \sqrt{2}(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i(\dfrac{-1}{\sqrt{2}})) = \sqrt{2}(\cos(\dfrac{-\pi}{4})+i\sin(\dfrac{-\pi}{4}))$;
- $b = 1+i\sqrt{3} = 2(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 2(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$;
- $c = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$;
- $d = \dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{4i(1-i\sqrt{3})}{4} = i(1-i\sqrt{3}) = \sqrt{3}+i = 2(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}) = 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}) = 2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$

Exercice 2

Calculer le module du nombre complexe z proposé :

a) z = 1 + i$\sqrt{3}$; b) z = 1 - i ; c) z = -3i ; d) z = 200 – 200i ; e) z = (1 – i)(3$\sqrt{2}-i\sqrt{7}$).

Solution

a) $|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$; b) $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; c) $|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$;

d) $|z| = \sqrt{200^2+(-200)^2} = 200\sqrt{2}$; e) $|z| = |1-i||3\sqrt{2}-i\sqrt{7}| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$

Exercice 3

Déterminer un argument pour chacun des complexes suivants :

$a = 1 + i$; $b = 1 - i\sqrt{3}$; $c = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$; $d = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$.

Solution

- $|a| = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$; $\arg a = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$
- $|b| = 2$; $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{-\pi}{3}$; $\arg a = \dfrac{-\pi}{3}\ (2\pi)$

  $|c| = \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg c = \arg a - \arg b = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}\ (2\pi)$
- $|d| = |a||b| = 2\sqrt{2}$; $\arg d = \arg a + \arg b = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}\ (2\pi)$

Exercice 4

Résoudre dans **C** les équations : a) $z^2 = -9$; b) $z^2 = -\sqrt{5}$; c) $z^2 = 3$

Solution

a) $z^2 = -9 \Rightarrow z^2 = (3i)^2 \Rightarrow z_1 = 3i$; $z_2 = -3i$;

b) $z^2 = -\sqrt{5} \Rightarrow z^2 = (i\sqrt[4]{5})^2 \Rightarrow z_1 = i\sqrt[4]{5}$; $z_2 = -i\sqrt[4]{5}$;

c) $z^2 = 3 \Rightarrow z^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3}$.

Exercice 5

Résoudre dans **C** : $z^2 = -5 + 12i$

Solution

Soit $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2$; $y = \pm 3 \Rightarrow z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -2 - 3i$

B. Exercices

1. Ecrire sous forme x + iy (avec x et y deux réels) :

$$a = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}\ ;\ b = \frac{1+2i}{(1-2i)};\ c = \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$$

2. Résoudre dans **C** l'équation : $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

3. Soit A le point d'affixe 1 – 2i, soient M et M' les points du plan d'affixes z et z'.
Traduire en termes de modules chacune des situations suivantes :

- Le triangle OMM' est isocèle en O
- Le triangle AMM' est isocèle en A
- Le triangle AMM' est isocèle en M
- Le triangle AMM' est rectangle en M

4. Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :
1) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; 2) $|z - 3i| = 2$;
3) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$.

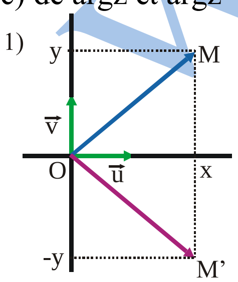
5. Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions proposées.

1) $\arg z = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$; 2) $\arg z = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

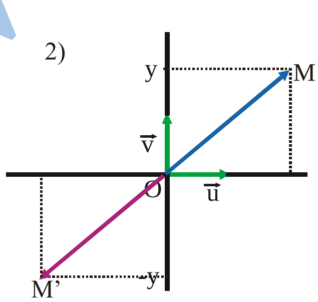
3) $\arg z = \frac{\pi}{6}(2\pi)$.

6. Soient M et M' deux points d'affixes non nulles notées z et z'.
Dans chacune des configurations suivantes que peut-on dire :
a) de z et z' b) de $|z|$ et $|z'|$
c) de argz et argz'

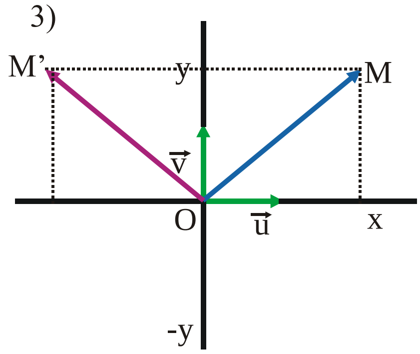
1)



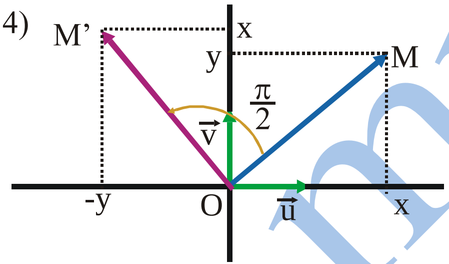
2)



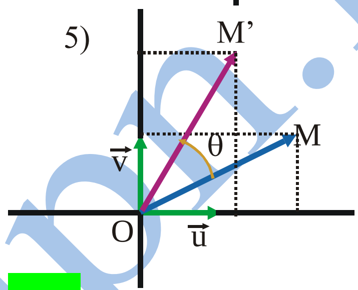
3)



4)



5)



7. Soit z un nombre complexe, on note x +iy sa forme algébrique et M son point image.
A chaque propriété de la liste 1, associe celle de la liste 2 qui caractérise le même ensemble des points.

Liste 1

1) $\begin{cases} y = x \\ x<0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \neq 0 \end{cases}$; 4) $x^2+y^2 = 1$

5) $y = 0$; 6) $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Liste 2

a) $z = \bar{z}$; b) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

c) $|z|=1$; d) $\arg(z)=\frac{5\pi}{4}(2\pi)$

e) $\begin{cases} |z|=2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$; f) $\arg(z)=\frac{-\pi}{4}(2\pi)$

8. Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions :

1) $z = 2e^{i\theta}$; $\theta \in [0 ; 2\pi[$; 2) $z = r e^{i\frac{\pi}{2}}; r \in [0;+\infty[$;

3) $z = k e^{i\frac{\pi}{4}}$; $k \in \mathbf{R}$.

9. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
Déterminer et représenter sur trois graphiques différents :

1) l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixes z telles que : z ; $\frac{1}{z}$ et 1 – z aient même module.
2) l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixes z telles que : z^2 soit imaginaire pur.
3) l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixes z telles que : $z + \bar{z} + |z|^2 = 0$

10 **Vrai ou Faux**

1. Le complexe $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{4}$ a pour module 1
2. $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ a pour argument $\frac{\pi}{3}$.
3. Un argument de 2 + 3i est l'opposé d'un argument de 2 – 3i .
4. $\frac{\pi}{2} - 3$ est un argument du complexe sin3 + icos3.
5. 5 - i et $\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ ont même argument.

11 Donner la forme algébrique des complexes suivants :1) $e^{i\pi}$; 2)$e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3)$2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 4)$e^{-2i\pi}$

12 Donner une forme trigonométrique des complexes suivants : 1) -3 + 3i ; 2) $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$;

3)$-2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

13 1) Donner les formes trigonométriques et exponentielles des complexes suivants :

$\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). Placer les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On expliquera rapidement les trois constructions.

14 Soit ρ et ω deux réels et soit le nombre complexe $z = \rho e^{i\omega}$. le réel ω est il un argument du complexe z.

1.) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz +c)$.
2.) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.
3.) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) les points A ; B ; C et D d'affixes $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $3+2\sqrt{3}$; $3-2\sqrt{3}$.
Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4.) On note E le symétrique de D par rapport à O, Déterminer la nature du triangle BEC.

15 Donner un argument des complexes suivants :

1)$(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;

2)$(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

3)$-2(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;

4)$e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 5)$e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

16 Soient A et B les points d'affixes 3 +2i et 2 + i. Sans utiliser ni règle ni compas construire sur une feuille de papier quadrillée un point C tel que :
$(\vec{u} ; \overrightarrow{OC}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OA}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{OB})$ (2π).

17 Soient z_1 ; z_2 et Z les complexes définis par :
$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - i$; $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1.) Déterminer la forme algébrique de Z.
2.) Déterminer le module et argument de z_1 ; z_2 et Z.
3.) Déduire des questions précédentes :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \ ; \ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

18 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2 + 4z + 5 = 0$; 2) $4z^2 - 2z + 1 = 0$
3) $z^2 + z + 1 = 0$; 4) $4z^2 - z + 1 = 0$
5) $2z^2 - 2z + 1 = 0$; 6) $z^2 - 2z + 2 = 0$
7) $2z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ $\alpha \in]0 ; \pi[$

CHAPITRE 4

Nombres complexes 2

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I- Argument d'un nombre complexe non nul

z et z' désignent deux nombres complexes non nuls.

- z est réel si et seulement si, 0 ou π est un argument de z.
- z est imaginaire pur si et seulement si, z est nul ou $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de z.
- la somme d'un argument de z et d'un argument de z'est un argument du produit zz' ; $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ (2π)
- l'opposé d'un argument de z est un argument de l'inverse de z, $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z$ (2π)
- la différence d'un argument de z et d'un argument de z' est un argument du quotient $\frac{z}{z'}$

$\arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$ (2π)

II. Notation exponentielle

1) Définition

Soit θ un nombre réel. On convient de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

2) Théorème

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = r\,e^{i\theta}$ où $r = OM = |z|$ et $\theta = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Exemple

Soient $z = 1 + i$, et $z' = 1 - i$ pour mettre ces nombres sous la forme exponentielle, cette forme est immédiate, car on a : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

3) Propriétés

a) Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls tels que:

$z = r\,e^{i\theta}$; $z' = r'\,e^{i\theta'}$; $r = |z|$ et $r' = |z'|$; $\theta = \arg z$; $\theta' = \arg z'$.

$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	$\|zz'\| = \|z\|\|z'\|$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$
$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{i(-\theta')}$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$	$\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg z'$
$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg z - \arg z'$
$z^n = r^n e^{in\theta}$; $(n \in \mathbf{Z})$	$\|z^n\| = \|z\|^n$; $(n \in \mathbf{Z})$	$\arg(z^n) = n \times \arg z$
$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$	$\|\bar{z}\| = \|z\|$	$\arg(\bar{z}) = -\arg z$

b) Formules d'Euler	c) Formule de Moivre
Les formules d'Euler résultent immédiatement de la définition de $e^{i\theta}$. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	Pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule de Moivre est : $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$. ou encore : $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

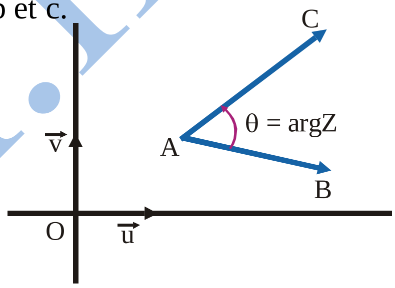
Application

- La formule de Moivre permet, en particulier, d'exprimer con nθ et sin nθ en fonction de puissances de cosθ ou de sinθ.
- La formule d'Euler permet, complétée par la formule d Moivre, de linéariser $(\cos\theta)^n$ et $(\sin\theta)^n$, c'est-à dire les exprimer en fonction de cos kθ ou de sin kθ, k étant un entier naturel $0 \le k \le n$.

III. Interprétation géométrique

1) Quotient de deux nombres complexes

Soit A ; B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c.



Soit le nombre complexe $Z = \dfrac{c-a}{b-a}$. On a :

$|Z| = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg Z = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$

Exemple

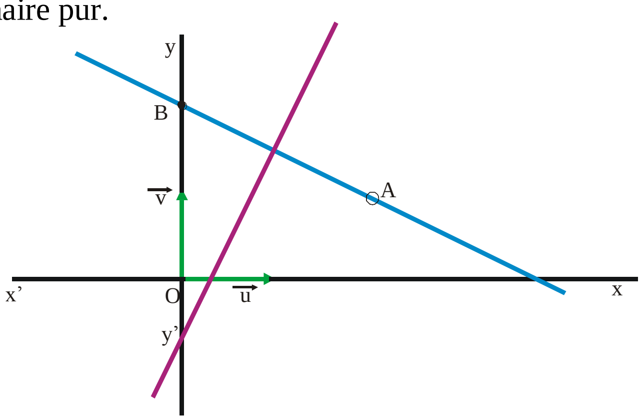
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Soit z un nombre complexe et Z le complexe défini par $Z = \dfrac{z-2i}{z-2-i}$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives 2 + i et 2i.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que :

a) $|Z| = 1$; b) Z soit réel ; c) Z soit imaginaire pur.



Si $z \ne 2 + i$ et $z \ne 2i$, on a $|Z| = \dfrac{MB}{MA}$ et

$\arg Z = (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\ (2\pi)$.

a) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MB = MA$,

cet ensemble de points est la médiatrice de la droite [AB].

b) Z est réel $\Leftrightarrow \arg Z = 0\ (\pi)$ ou $Z = 0 \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = 0 (\pi)$ ou M = B.

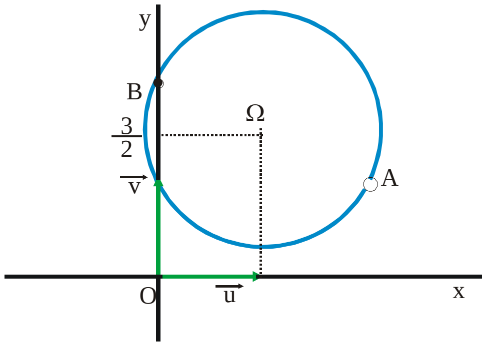
L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A.

c) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg Z = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ ou $Z = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$

ou M = B. $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ ce qui signifie que le triangle AMB est rectangle en M ;

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ est le cercle de diamètre [AB] privé de A

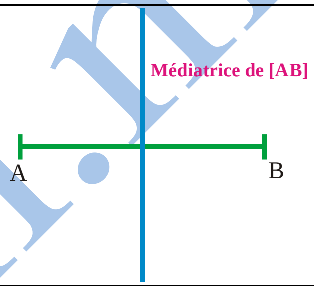
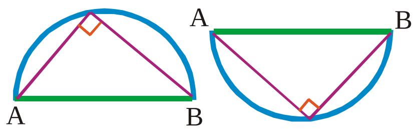
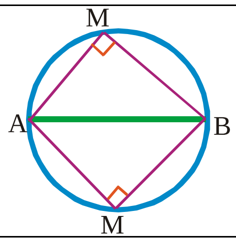
et de B. Or, dans ce cas B appartient à l'ensemble de points cherché, donc
l'ensemble des points M tels que :
Z soit imaginaire pur
est le cercle de diamètre [AB] privé de A.



2) Ensemble de points

Soit z un nombre complexe d'image M et Z le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z - b}{z - a}$ / $z \neq b$ et $z \neq a$.

Soit A et B les points d'affixes respectives a et b.

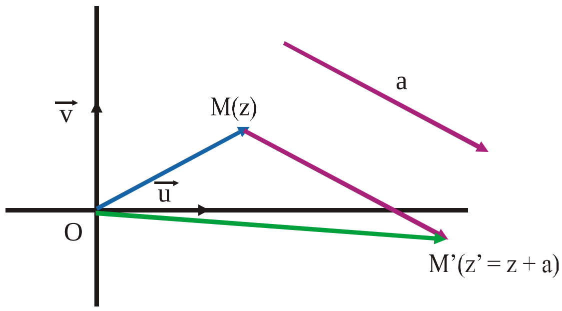
Ensemble de points M tels que	Interprétation	Nature	Illustration
$\lvert Z \rvert = 1$	MB = MA	Droite	
$\arg(Z) = 0\ (2\pi)$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0(2\pi)$	(AB) \ [AB]	
$\arg(Z) = \pi\ (2\pi)$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \pi(2\pi)$	] AB[	
$\arg(Z) = 0\ (\pi)$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0(\pi)$	Droite percée	
$\begin{cases} \arg(Z) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ \text{ou} \\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$	$\begin{cases} (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$	l'un des demi-cercles de diamètre [AB], privé de A et B.	
$\arg(Z) = \frac{\pi}{2}(\pi)$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}(\pi)$	Cercle de diamètre [AB], privé de A et B.	

3) Application : $z \mapsto z + a$

Soit a un nombre complexe et $\vec{w}$ son vecteur image.

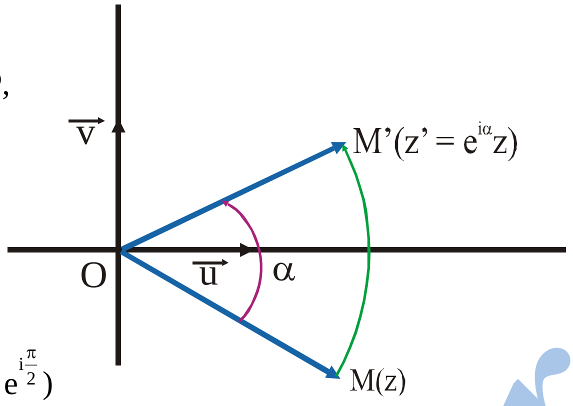
Soit, l'application $\mathcal{t}$ du plan complexe $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' = z + a

$\mathcal{t}$ est la translation de vecteur $\vec{w}$.



4) Application : $z \mapsto e^{i\alpha}z$

Soit $\propto$ une mesure d'angle orienté.
Soit l'application $\mathcal{R}$ du plan complexe $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i\propto}z$.
$\mathcal{R}$ est la rotation de centre O et d'angle $\propto$.



Cas particuliers

- Si $z' = iz$, $\mathcal{R}$ est le quart de tour positif ($i = e^{i\frac{\pi}{2}}$)
- Si $z' = -iz$, $\mathcal{R}$ est le quart de tour négatif ($i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$)
- Si $z' = -z$, $\mathcal{R}$ est la symétrie centrale de centre O ($-1 = e^{i\pi}$)

IV. Racine n^{ième} de l'unité

1) Cas particuliers

✓ **Cas n = 2**

Soit z un nombre complexes tel que : $z^2 = 1$ ce qui veut dire que : $(z-1)(z+1) = 0$, d'où $z = 1$ ou $z = -1$.
Donc les racines carrées de l'unité sont 1 et -1, remarquons que leur somme est nulle.

✓ **Cas n = 3**

On cherche à déterminer les nombres complexes z tels que : $z^3 = 1$.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists\theta / e^{i3\theta} = e^{i0} \end{cases} \Leftrightarrow \ 3\theta \equiv 0\ (2\pi), \text{ d'où } \ \theta = \frac{k2\pi}{3}, \text{ avec k entier relatif.}$$

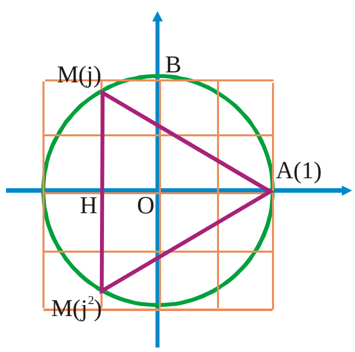
Les racines troisièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, lorsque k décrit **Z** .

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, d'où $\omega_k = (\omega_1)^k$, on a donc

- $\omega_0 = 1$,
- $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; en général on note $\omega_1 = j$,
- $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; remarquons que $\omega_2 = j^2 = \bar{j}$;
- Les racine cubiques de l'unité sont donc 1 ; j ; j^2.

2) Propriétés

- $1 + j + j^2 = 0$
- $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = (z-1)(z-j)(z-j^2)$.
- Les images de ces racines sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.



3) Cas général

$z^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ d'où ces racines sont de la forme $e^{i\theta}$ et ils vérifient :

$e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$ c'est-à dire $n\theta \equiv 0\ (2\pi)$, d'où $\theta = \dfrac{k2\pi}{n}$, avec k entier relatif.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, d'où $\omega_k = (\omega_1)^k$.

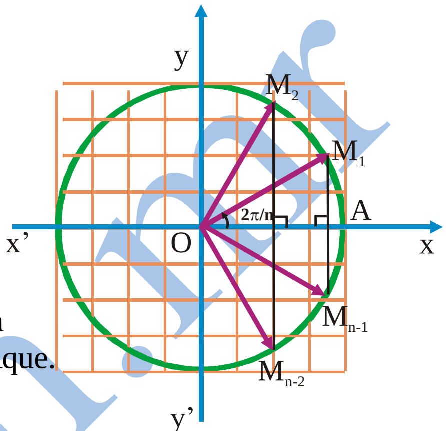
Théorème

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont au nombre de n, elles s'écrivent sous e la forme $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ où k est un entier naturel compris entre 0 et n -1 au sens large.

Propriétés

Posons $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; soit $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k$;

- $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \dfrac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = \dfrac{1-1}{1-\omega_1} = 0$;
- Les images des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



V. Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.
On appelle racine $n^{\text{ième}}$ complexe de Z tout nombre z tel que $z^n = Z$

- Si Z = 0, le seul nombre complexe z tel que $z^n = 0$ est 0.
- Si $Z \neq 0$, mettons Z et z sous la forme trigonométrique : $Z = |Z|e^{i\varphi}$; $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^n = Z \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |Z|e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \text{et} \\ n\theta - \varphi = 0(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{k2\pi}{n} \end{cases} \text{ avec k entier relatif.}$$

On en déduit que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont l'ensemble des nombres complexes de la forme :

$\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$, lorsque k décrit **Z** .

Comme $\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})} = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{n}}e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, posons $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{n}}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z s' écrivent sous la forme : $z_0 e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, tel que $z_0^n = Z$ et où $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ est une racine nième de l'unité.

Théorème.

Tout nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{i\varphi}$ admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ qui s'expriment sous la forme trigonométrique : $\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$ où k est un entier naturel compris entre 0 et n-1.

Exemples

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe 1 + i.

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où les racines cubiques sont sous la forme : $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, pour $0 \leq k \leq 2$, donc,

$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

2) Déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de -1.

$-1 = e^{i\pi}$, d'où les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de -1 sont sous la forme : $e^{i\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

3) Résoudre l'équation $\left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^3 = 8$.

$\left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^3 = 8 \Leftrightarrow \frac{\left[\frac{(2(z+1))}{z-1}\right]^3}{2^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1}$ est racine cubique de l'unité, d'où

- $\frac{z+1}{z-1} = 1$ (rejeté car $-1 \neq 1$),
- $\frac{z+1}{z-1} = j \Rightarrow z + 1 = j(z-1) \Rightarrow z(1-j) = -1 - j \Rightarrow z = -\frac{1+j}{1-j}$,
- $\frac{z+1}{z-1} = j^2 \Rightarrow z + 1 = j^2(z-1) \Rightarrow z(1-j^2) = -1 - j^2 \Rightarrow z = -\frac{1+j^2}{1-j^2}$,

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{-\frac{1+j}{1-j}; -\frac{1+j^2}{1-j^2}\right\}$.

Savoir- faire

A . Applications

Exercice 1

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes:

$Z_1 = -1 + i$; $Z_2 = 2\sqrt{3}$ -6i; $Z_3 = -4$; $Z_4 = 5i$; $Z_5 = -2i$; $Z_6 = 3$

Solution

Nombre	Module	$\lvert Z\rvert(\frac{a}{\lvert Z\rvert}+i\frac{b}{\lvert Z\rvert})$	arg(Z)	Forme trigonométrique
$Z_1 = -1 + i$	$\lvert Z_1\rvert = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$	$\sqrt{2}\ (\frac{-1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}\ (\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$
$Z_2 = 2\sqrt{3}$ -6i	$\lvert Z_2\rvert = 4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}\ (\frac{1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}}{2})$	$\frac{-\pi}{3}$	$4\sqrt{3}\ (\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})$
$Z_3 = -4$	$\lvert Z_3\rvert = 4$	$4(-\frac{4}{4}+i\frac{0}{4})$	π	$4(\cos\pi+i\sin\pi)$
$Z_4 = 5i$	$\lvert Z_4\rvert = 5$	$5(\frac{0}{5}+i\frac{5}{5})$	$\frac{\pi}{2}$	$5(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$
$Z_5 = -2i$	$\lvert Z_5\rvert = 2$	$2(\frac{0}{2}+i\frac{-2}{2})$	$-\frac{\pi}{2}$	$2(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$
$Z_6 = 3$	$\lvert Z_6\rvert = 3$	$3(\frac{3}{3}+i\frac{0}{3})$	0	$3(\cos 0+i\sin 0)$

Exercice 2

Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7$

Solution

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3}\right| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3+1}{9}} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3} = \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}),$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7 = \left(\frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right)^7 = \frac{128}{2187}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}), \text{ d'où}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7 = \frac{128}{2187}(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}).$$

Exercice 3

Calculer $(1 + i)^{11}$, puis $(-1 - i)^{15}$

Solution

- $1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc, $(1 + i)^{11} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{11} = 32\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}}$.

- D'après l'écriture précédente, on en déduit que : $(-1 - i)^{15} = (\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})^{15} = 128\sqrt{2}e^{i\frac{75\pi}{4}}$

Exercice 4

Soit $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8}-i\sqrt{8}$ trois nombre complexes.

On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire z_1 ; z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de Z.
3. Calculer, alors la forme algébrique de Z.

Solution

Voici la réponse aux questions consignée dans ce tableau

Nombre	Forme trigonométrique	Forme exponentielle	Forme algébrique
$z_1 = -3 + i\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$	
$z_2 = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	
$z_3 = \sqrt{8}-i\sqrt{8}$	$4(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$	$4e^{i\frac{-\pi}{4}}$	
z_1^3		$(2\sqrt{3})^3e^{i\frac{\pi}{2}}$	
z_3^4		$(4)^4e^{i(-\pi)}$	
z_2^6		$(2\sqrt{2})^6\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$	
$Z=\dfrac{z_1^3z_3^4}{z_2^6}$		$12\sqrt{3}e^{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$	$0-12\sqrt{3}\,i$

Exercice 5

Soit $Z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Mettre Z sous forme trigonométrique puis algébrique, en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

On a $Z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$, c'est la forme trigonométrique de Z. D'autre part,

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} + i(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}) = = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$$

Par identification des deux écritures, on trouve : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

Soit n un entier strictement positif

Déterminer pour tout k entier i^k, puis calculer $1 + i + i^2 + \ldots + i^{n-1} + i^n$

Solution

- $\forall k \in \mathbf{N},\ i^{k+4} = i^k$ .Comme tout naturel $k \geq 4$, peut prendre l'une des formes suivantes : $4p$; $4p+1$; $4p+2$; $4p+3$, Donc , $i^{4p} = 1$, $i^{4p+1} = i$, $i^{4p+2} = -1$, $i^{4p+3} = -i$.
  $\forall k \in \mathbf{N},\ i^k \in \{1\ ;\ i\ ;\ -1\ ;\ -i\}$
- Il s'agit de la somme des (n +1) termes d'une suite géométrique de 1^er^ terme 1 et de raison i, donc, $1 + i + i^2 + \ldots + i^{n-1} + i^n = \dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$.

Exercise 7

Etant donné un entier $n \geq 1$ et x un réel,

1. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$
2. En déduire $S' = \sin^2\dfrac{2\pi}{17} + \sin^2\dfrac{4\pi}{17} + \ldots + \sin^2\dfrac{16\pi}{17}$
3. Donner la valeur exacte de la somme $S'' = \cos(\dfrac{\pi}{17}) + \cos(\dfrac{3\pi}{17}) + \cos(\dfrac{5\pi}{17}) + \ldots + \cos(\dfrac{15\pi}{17})$

Solution

1. La somme $S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx$ c'est la partie réelle de la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \mathrm{Re}(1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{inx})$.

On distingue deux cas

- si x = 0 (2π), $e^{ix} = 1$, d'où le nombre est entièrement réelle et

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \mathrm{Re}(1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{inx}) = n + 1,$$

- si x ≠ 0 (2π), $e^{ix} \neq 1$, il s'agit de la somme des (n+ 1) premiers termes d'une suite géométrique de 1^er^ terme 1 et de raison e^{ix},

Donc, $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = (1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{inx}) = \dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$,

Or, $1-e^{i(n+1)x} = e^{i(\frac{n+1}{2})x}(e^{-i(\frac{n+1}{2})x} - e^{i(\frac{n+1}{2})x}) = -2i\, e^{i(\frac{n+1}{2})x} \sin\dfrac{(n+1)}{2}x$, de même

$1-e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{-x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}) = -2i\, e^{i\frac{x}{2}} \sin\dfrac{x}{2}$, d'où $\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \dfrac{e^{i(\frac{n+1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x)$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\frac{n+1}{2}x) e^{i(\frac{n}{2})x}$$

Donc, $(\mathrm{Re}(\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}) = \mathrm{Re}(\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x) e^{i(\frac{n}{2})x}) = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x)\cos(\dfrac{n}{2})x$.

Finalement $\sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \cos(\dfrac{nx}{2})$

2. En utilisant la relation : sin(π - α) = sinα en $\alpha = \dfrac{16\pi}{17}; \dfrac{14\pi}{17}; \dfrac{12\pi}{17}; \dfrac{10\pi}{17}$ on peut écrire

$$S' = \sin^2\frac{2\pi}{17} + \sin^2\frac{4\pi}{17} + ... + \sin^2\frac{16\pi}{17} = \sin^2\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{2\pi}{17} + \sin^2\frac{3\pi}{17} + ... + \sin^2\frac{8\pi}{17}.$$

Puis grâce à la relation $\sin^2 x = \dfrac{1-co2x}{2}$, on obtient

$$S' = \frac{1}{2}\left((1-\cos\frac{2\pi}{17}) + (1-\cos\frac{4\pi}{17}) + ... + (1-\cos\frac{16\pi}{17})\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + ... + \cos\frac{16\pi}{17}\right)$$

D'après la question 1, en posant $x = \dfrac{2\pi}{17}$, on en déduit que S' = $\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{8\pi}{17}\sin\frac{9\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}$

3. S'' = $\cos(\frac{\pi}{17}) + \cos(\frac{3\pi}{17}) + \cos(\frac{5\pi}{17}) + ... + \cos(\frac{15\pi}{17})$, il suffit de remarquer que :

S''est la partie réelle de la somme: $e^{i\frac{\pi}{17}} + e^{i\frac{3\pi}{17}} + ... + e^{i\frac{15\pi}{17}}$.

Il s'agit de la somme de 8 termes d'une suite géométrique de 1[er] terme $e^{i\frac{\pi}{17}}$ et de raison $e^{i\frac{2\pi}{17}}$.

$$S'' = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{17}}\frac{(1-e^{i\frac{16\pi}{17}})}{(1-e^{i\frac{2\pi}{17}})}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\frac{16\pi}{17}}}{e^{i\frac{-\pi}{17}} - e^{i\frac{\pi}{17}}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i8\frac{\pi}{17}}\frac{e^{i8\frac{\pi}{17}}(e^{i-8\frac{\pi}{17}} - e^{i\frac{8\pi}{17}})}{(e^{i\frac{-\pi}{17}} - e^{i\frac{\pi}{17}})}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i8\frac{\pi}{17}}\frac{e^{i8\frac{\pi}{17}}\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}\right)$$

$$= \cos\frac{8\pi}{17}\frac{\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{16\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 8

Exprimer cosnx et sinnx en fonction de cosx ou sinx dans les cas : n = 2 ; n = 3 ; n = 4 ; n = 5.

Solution

- **Cas n= 2**

On a $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$, d'après Moivre. Or, le développement direct donne :
$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x$., d'où, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Finalement : $\cos 2x = = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

- **Cas n = 3**

On a $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$, d'après Moivre.

Or, le développement direct donne : $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$

d'où, $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$ et $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

en remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient

Finalement : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$.

- **Cas n = 4**

On a $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$, d'après Moivre.

Or, le développement direct donne :

$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$.

D'où, $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ et

$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x\sin^3 x = 2\sin 2x\cos 2x$

Finalement : $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ et $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

- **Cas n = 5**

On a $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$, d'après Moivre. Or, le développement direct donne :

$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$

D'où, $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$ et $\sin 5x = \sin^5 x - 10\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos^4 x\sin x$.

En remplaçant à chaque fois $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ par l'expression correspondante, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2\\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x + 10\cos^5 x + 5\cos x - 10\cos^3 x + 5\cos^5 x\\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x\end{aligned}$$

De même:
$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin^5 x - 10\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos^4 x\sin x\\ &= \sin^5 x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + 5(1-\sin^2 x)^2\sin x\\ &= \sin^5 x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + 5\sin x - 10\sin^3 x + 5\sin^5 x\\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

Finalement : $\cos 5x = =16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$ et $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

Exercice 9

Linéariser $\cos^n x$; $\sin^n x$ dans les cas suivant : n = 2 ; n = 3 ; n = 4 ; n = 5.

Can n= 2

Il suffit d'utiliser les formules d'Euler et le développement du binôme de Newton.

- $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right) = \dfrac{1}{4}(2co2x+2) = \dfrac{1}{2}(co2x+1)$.

- $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{-1}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 = \dfrac{-1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\right) = \dfrac{-1}{4}(2co2x-2) = \dfrac{1}{2}(1-co2x)$.

Can n= 3

- $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right) = \dfrac{1}{8}(2co3x+6\cos x) = \dfrac{1}{4}(co3x+3\cos x)$.

- $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{i}{8}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3 = \dfrac{i}{8}\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right) = \dfrac{i}{8}(2i\sin 3x - 6i\sin x) = \dfrac{-1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$

Can n = 4

- $\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{2ix}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) = \dfrac{1}{16}\left(2co4x+8\cos 2x+6\right)$

$$= \frac{1}{8}\left(co4x+4\cos 2x+3\right)$$

- $\sin^4 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{i4x}-4e^{2ix}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) = \dfrac{1}{16}\left(2co4x-8\cos 2x+6\right)$

$$= \frac{1}{8}\left(co4x-4\cos 2x+3\right)$$

Can n = 5

- $\cos^5 x = (\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^5 = \dfrac{1}{32}(e^{ix}+e^{-ix})^5 = \dfrac{1}{32}(e^{i5x}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x})$

$$= \frac{1}{32}(2co5x+10\cos 3x+20\cos x)$$

$$= \frac{1}{16}(co5x+5\cos 3x+10\cos x)$$

- $\sin^5 x = (\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^5 = \dfrac{(-i)}{32}(e^{ix}-e^{-ix})^5 = \dfrac{-i}{32}(e^{i5x}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-i3x}-e^{-i5x})$

$$= \frac{-i}{32}(2i\sin 5x+20i\sin x-10i\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x)$$

Exercice 10

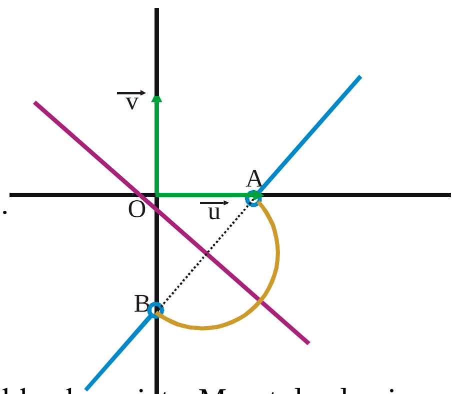
Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormal , on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et –i.

A tout complexe z différent de 1, on associe le complexe Z défini par: $Z = \dfrac{z+i}{z-1}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|Z| = 1$; b) Z soit réel strictement positif ; c) arg Z= $\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.

Solution



a) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+i}{z-1}\right| = \dfrac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$

L'ensemble de points M est la médiatrice du segment [AB].

b) $Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z = 0(2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = 0(2\pi) \Leftrightarrow$

L'ensemble de points M est (AB)\[AB].

c) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \Leftrightarrow$ L'ensemble de points M est le demi-cercle de diamètre $[AB] \setminus \{A ; B\}$.

Exercice 11

Déterminer les racines quatrième de l'unité, puis représenter géométriquement ces racines.

Solution

Il s'agit de résoudre l'équation $z^4 = 1$.

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists\theta / e^{i4\theta} = e^{i0} \end{cases} \Leftrightarrow \ 4\theta \equiv 0\ (2\pi), \text{ d'où } \ \theta = \frac{k2\pi}{4}, \text{ avec k entier relatif.}$$

Les racines quatrième de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{4}}$, lorsque k décrit $\mathbf{Z}$.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{4}}$, d'où $\omega_k = (\omega_1)^k$. On a donc

- $\omega_0 = 1$,
- $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;
- $\omega_2 = i^2 = -1$;
- $\omega_3 = i^3 = -i$
- $\omega_4 = i^4 = 1$; $\omega_5 = i$; $\omega_6 = -1$; $\omega_7 = -i$.

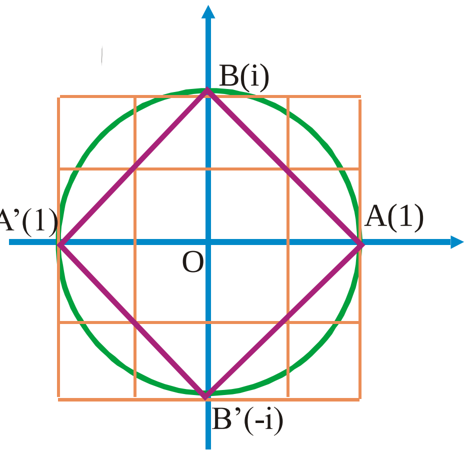
Plus enragement : $\omega_{4p} = i^{4p} = 1$; $\omega_{4p+1} = i^{4p+1} = i$; $\omega_{4p+2} = i^{4p+2} = -1$; $\omega_{4p+3} = i^{4p+3} = -i$.
Nous savons que tout nombre entier relatif a l'une des forme : 4p ; 4p + 1 ; 4p + 2 ; 4p + 3, avec p entier relatif, les racines quatrième de l'unité sont donc $\{-i\ ;\ 1\ ;\ i\ ;\ 1\}$, notées U_4.

Remarque

Les racines déterminées vérifient les propriétés suivantes :

- $1 + i - 1 - i = 0$
- $(U_4\ ;\ \times)$ est un groupe
- Les images de ces racines sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.

×	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1



B. Exercices

1 Déterminer une forme trigonométrique; puis exponentielle des nombres suivants :

$\frac{2-2i}{1+i\sqrt{3}}$; $(1+i)^7$; $(\sqrt{3}-i)^6$; $(1-i)^{18}$;

$\frac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}$; $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$,

où $x \in \mathbf{R}$

2. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

3 1.) Ecrire $-\sqrt{3}+i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique,

2.) Prouver que : $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ est un réel.

4 Déterminer la forme algébrique des complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2001} ; \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^{11}.$$

5 Calculer de deux façons différentes $(1+i)^n$, déduire

$S_0 = 1 + C_n^2 - C_n^4 - ... + (-1)^p C_n^{2p} + ...$

$S_1 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ... + (-1)^q C_n^{2q+1} + ...$

6 Dans cet exercice, Z désigne le nombre complexe : $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

1.) vérifier que : $Z^5 - 1 = 0$, En déduire la relation : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$.

2 .a) Exprimer Z ; Z^2 ; Z^3 ; Z^4 sous forme trigonométrique.

b) démontrer les égalités :

$$Z + Z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad Z^3 + Z^4 = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

3.) Utiliser les résultats des 1.) et 2.) pour trouver une relation entre $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$,

puis montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation

$4x^2 + 2x - 1 = 0$; en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

7 Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à] 0 ; π [:

$S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\cos p\theta + \ldots + \cos^n\theta\cos n\theta$,

$S'_n = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\sin p\theta + \ldots + \cos^n\theta\sin n\theta$,

$\sum_n = S_n + S'_n$. Montrer que : $\sum_n$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire la valeur de $\sum_n$ puis de S_n en fonction de n et θ.(On montrera que $S_n = \frac{\cos^{n+1}\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$)

8 Soit $z = 2\sin^2\theta + i\sin 2\theta$ ($\theta \in \mathbf{R}$).

Calculer le module de z .

En discutant selon les valeurs de θ, calculer un argument de z.

9. Soit α ∈] -π ; π]; résoudre dans **C** l'équation :

$Z^2 - 2\sin(2\alpha)z + 2(1+\cos(2\alpha)) = 0$,

Déterminer le module et un argument de ces solutions.

Pour quelles valeurs de α les deux solutions sont –elles distinctes ?

10 Linéariser : $\cos^2x\sin^3x$: $\cos^3x\sin x$; $\sin^3x\cos x$.

11 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$, d'unité 2cm.

Soit $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.

M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 les images respectives de ces nombres.

1. a) déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes : z_0 ; z_1 ; z_2 et z_3.

b) Construire les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3.

2) On pose : $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_0|$;

$d_2 = |z_2 - z_1|$; $d_3 = |z_3 - z_2|$.

a) interpréter géométriquement chacun des nombres : d_0 ; d_1 ; d_2 et d_3.

b) Montrer que: d_0 ; d_1 ; d_2 et d_3 sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3$.

12 1) On considère les nombres complexes suivants : $a = \sqrt{3} + i$; $b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Déterminer le module et un argument de a ; b et $\frac{a}{b}$.

2) Soit z = $\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$), avec 4 cm comme unité graphique.
On considère les points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 d'affixes respectifs z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4.
a) déterminer le module et un argument de z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4.
b) En laissant vos traits de construction sur la copie, placer les points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 dans le plan complexe.

13 On considère l'équation :

$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$

1.) Montrer que 8 est racine de cette équation.
2.) Déterminer a et b deux réels tels que :
$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(Z^2 + aZ + b)$.
3.) Résoudre l'équation proposée.

14 Soit $P(z) = z^4 - 14z^3 + 7z^2 - 126z + 585$.
1. a) Calculer P(3i).
b) Montrer que si, z est racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi racine de P. Qu'en déduit-on ?
2. déterminer un trinôme Q(z) à coefficients complexes tel que : $P(z) = (z^2 + 9)Q(z)$.
En déduire toutes les racines de P.

15 On se propose de résoudre l'équation (E) :
$Z^2 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}\, i)z - i = 0$.
1.) Montrer qu'il existe une solution z_0 de (E) qui est imaginaire pure.
2.) Ecrire le nombre de gauche de l'équation sous forme $(z - z_0) \times P(z)$, où P(z) est un trinôme à cœfficients complexes. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
3.) Mettre ces solutions sous forme trigonométrique et les placer sur un graphique.

16 Déterminer un trinôme P(Z) à coefficient complexes vérifiant :
$Z^3 - Z^2 + Z + 1 = (Z + 1)P(Z)$, puis résoudre dans **C** l'équation :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \frac{z-2i}{z+2i} + 1 = 0.$$

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
On désignera l'affixe d'un point M par Z_M.
1) Résoudre dans l'équation $Z^2 - 6Z + 18 = 0$.

Placer dans le plan les points B et C dont les affixes sont les solutions de l'équation, B étant le point dont l'affixe Z_B a une partie imaginaire négative.

2) Soit $\mathcal{R}$ le quart de tour positif de centre O.

Montrer que $\mathcal{R}$(B)= C.

3) Soit A le point d'affixe $Z_A = 3(1 - \sqrt{3})$.

Calculer un argument du nombre complexe

$Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC, puis construire A.

18 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont : 2i ; -1 ; i. Soit ***f*** l'application de $P\backslash\{A\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z($z \neq 2i$), associe le point M' d'affixe z', telle que: $z' = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'affixe du point C' image de C par ***f*** : quelle est la nature du quadrilatère ABCC'.
2. Montrer que le point C admet un unique antécédent C'' par f, quelle est la nature du triangle BCC'' ?
3. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et arg(z').
4. En déduire les ensembles suivants et les construire :

a) $\mathcal{E}$ Ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif.

b) $\mathcal{F}$ Ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul ;

c) $\mathcal{D}$ Ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1.

19 Le plan complexe est muni d'un repère Orthonormal direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). A tout point M du plan, distinct de O on associe le point M’ tel que : $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

On désigne respectivement par Z et Z’ les affixes de M et M’. Δ désigne la droite d’équation x = 2. A est le point d’affixe 2.

1. Exprimer Z’ à l’aide de Z.
2. Lorsque M appartient à Δ, écrire Z’ sous forme algébrique en fonction de la partie imaginaire y de Z.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{Z'-2}{Z'}$ en fonction de la partie imaginaire y de Z, lorsque M appartient à Δ.
4. Lorsque M appartient à Δ et M ≠ A, déterminer $\arg(\frac{Z'-2}{Z'})$

   En déduire que, pour tout point M de Δ, M’ appartient à un ensemble (C) que l’on précisera. Faire une figure.

20 Le plan complexe est muni d’un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) On pose $Z_1 = \frac{10+4i}{3+7i}$; $Z_2 = (1+i)(1-i)$ et $Z_3 = \frac{7+3i}{5-2i}$.

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres Z_1 ; Z_2 et Z_3.

b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres Z_1 ; Z_2 et Z_3.

c) Placer dans le repère les points A, B et C d’affixes respectives $Z_A = 1 - i$; $Z_B = 2$ et $Z_C = 1 + i$.

d) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle ; puis donner la nature du quadrilatère OABC.

e) Déterminer et construire l’ensemble Δ des points M d’affixe Z tel que : $\left|\frac{Z}{Z-2}\right| = 1$.

2) A tout point M du plan d’affixe Z, (Z ≠ 2**)**, on associe le point M’ d’affixe Z’ tel que : $Z' = \frac{-2}{Z-2}$.

a) Résoudre dans l’ensemble des nombres complexes l’équation Z’ = Z.

b) Montrer que pour tout nombre complexe Z, différent de 2, on a $|Z' - 1| = \frac{|Z|}{|Z-2|}$.

c) En déduire une relation entre les distances OM, BM et IM’ où I est le milieu du segment [OB].

d) Déduire que si M décrit Δ, alors M’ décrit un cercle Γ dont on donnera le centre et le rayon ;

21 Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ et $F : (P)\setminus\{O\} \to (P)\setminus\{O\}$;

$$f : z \mapsto \frac{4}{\bar z} \quad \text{et} \quad M(z) \mapsto M'(z')$$

1. Déterminer ***F* o *F***, composée de ***F*** avec lui-même.
2. Déterminer l’ensemble des points fixes de F.
3. a) Démontrer que : ***F***(M) = M’ ⇔ $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}) = 0(2\pi)$ et OM × OM’ = 4.

   b) Déterminer l’image du cercle de centre O et de rayon 1 par ***F***.
4. Soit Ω(0 ; 1). On note (ω) le cercle de centre Ω et de rayon 1.

   a) Démontrer qu’un point M appartient à (ω) ⇔ son affixe z vérifie l’équation complexe : $z\,\bar z + i\bar z - i \; = 0$

   b) Déterminer l’image du cercle (ω) par ***F***.

22 a) α est un nombre réel. Résoudre l’équation :

$$\begin{cases} z \in \mathbf{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

b) en déduire la forme trigonométrique des solutions de l’équation :

$$\begin{cases} z \in \mathbf{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

Dans laquelle n est un entier naturel non nul donné,

2) notation : étant donné des nombres complexes : z_0 ; z_1 ; …,z_{n-1}, on note $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ le produit $z_0 \times z_1 \times \ldots z_{n-1}$.

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α,

Pour tout complexe z, on pose :

$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$.

On admet que, pour tout z, α et n ,on a

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right].$$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{n-1}}.$$

b) pour tout α élément de l’intervalle] 0 ; π[et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$H_n(\alpha)=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que, pour α non nul, on a :

$$2^{n-1}\,H_n(\alpha)=\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2n})}$$

c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

d) En déduire que, pour tout naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

23 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 -4z + 13 = 0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que :$Im(z_1) > 0$.

2) On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives $z_A= 1 + z_1$ et $z_B = 1 + z_2$.

a)Ecrire les nombres $z_A= 1 + z$ et $z_B = 1 + z_2$ sous forme trigonométrique.

b) Représenter, dans le repère ( ) les points A et B. déterminer la nature du triangle OAB.

c) Déterminer et placer C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

d) Construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire pur.

24 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes : $Z^2 - 4z + 13 = 0$ (E_1)
$Z^2 - 6z + 13 = 0$ (E_2)

2) Pour tout nombre complexe z tel que :

$z \neq 3-2i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-3i}{z-3+2i}$.

Calculer $\alpha = f(z + 4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

3) On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$; $z_B = 3 - 2i$ et $z_C = 5 + i$.

a) Placer dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ les points A; B et C.

b) Calculer $f(z_C)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|$: = 1.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur.

25 Soit n un entier naturel non nul et , $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

On pose, pour z appartenant à **C** :

$P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 - (z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$

1) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égale à n- 2.
2) Montrer que : ω ; ω^2 ; … ; ω^{n-1} sont n- 1 racines distinctes de P.
Songer aux racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
En déduire que P(z) = 0, pour tout z, puis que : $n= (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$.
3) Montrer, par un calcul de module, que :
$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

26 On pose, pour tout nombre complexe z :

$f(z) = z^4 +4z^3 +6z^2 +(6-2i)z +3 - 2i$.

1) Montrer que le polynôme $f(z)$ possède une, et une seule, racine réelle z_0 que l'on déterminera. En déduire une factorisation de $f(z)$ sous la forme
$(z - z_0)Q(z)$, où $Q(z)$est un polynôme complexe du $3^{\text{ème}}$ degré que l'on précisera.
2) Vérifier que : $Q(i) = 0$; en déduire les solutions de l'équation $(z\in \mathbb{C}\ ;\ f(z)= 0)$.
3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.Soient z_1 ; z_2 ; z_3 les solutions de l'équation (con considère On note P un plan affine d'affixe $Q(z) = 0$.
On appelle M0 ; M1 ; M2 ; M3 les points du plan P d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2 ; z_3.
Montrer que $\{M_1;\ M_2;\ M_3\}$ est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_0 et faire la figure correspondante.

CHAPITRE 5

Limites & continuité

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

A. Le point sur les limites

I- Rappel

1) Fonctions usuelles

Les résultats suivants font référence dans de nombreuses situations :

- $f(x) = x$; x^2 ; $\sqrt{x}$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
- $f(x) = x$; x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$; $\sin x$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Remarque

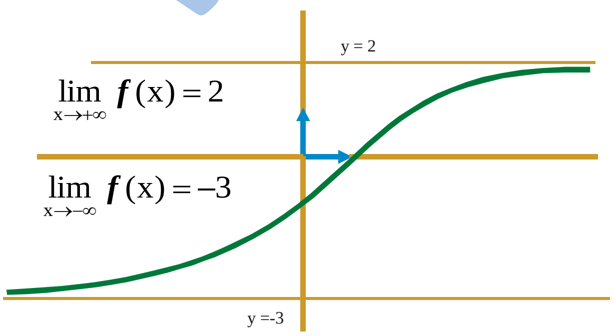
1) La question ''f a-t-elle de limite en a'' ne sera posée que dans deux cas :
f est définie en a ; sinon a est une borne d'un intervalle ou f est définie.

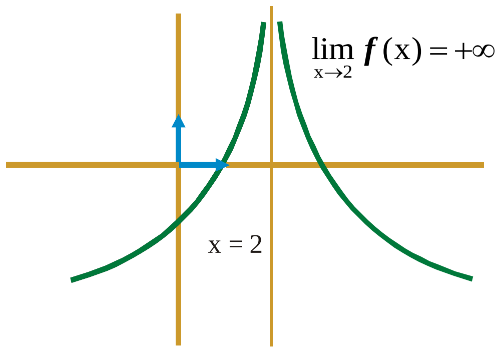
2) Lorsque f est définie en a (a réel) et lorsque f admet une limite finie ℓ en a, alors , nécessairement
$\ell = f(a)$.

3) L'expression $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ (a fini ou infini, ℓ réel), se traduit : $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - \ell) = 0$ ou $f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

2)Asymptotes parallèles aux axes

Résultat sur f	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel)	La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (a réel)	La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.





II- Opérations ; formes indéterminées

Nous rappelons ci-dessous les théorèmes algébriques qui nous renseignent – dans certains cas – sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

1) Somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

lim ***f*** \ lim ***g***	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2) Produit

Les fonctions ***f*** et ***g*** ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

Remarque $\infty \times 0 = ?$

lim ***f*** \ lim ***g***	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \,.\, \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3) Quotient

Les fonctions ***f*** et ***g*** ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

lim ***f*** \ lim ***g***	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

4) Formes indéterminées

Les situations marquées par ? dans les tableaux sont appelées (de façon significative) les formes indéterminées. Nous en verrons quelques exemples :

B- Enoncés usuels sur les limites

I- Comparaison

Nous admettrons les résultats suivants qui en dehors du dernier permettent de déterminer le comportement lorsque x tend vers a (a fini ou infini) d'une fonction ***f*** par comparaison à d'autres fonctions ***U***, ***V*** dont le comportement est connu.

Quant au dernier il permet le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse I Inégalité pour x assez proche de a	**Hypothèse II** Lorsque x tend vers a	**Conclusion**
$U(x) \leq f(x)$	***U*** tend vers $+\infty$	***f*** tend vers $+\infty$
$f(x) \leq U(x)$	***U*** tend vers $-\infty$	***f*** tend vers $-\infty$
$\lvert f(x) - \ell \rvert \leq U(x)$	***U*** tend vers 0	***f*** tend vers ℓ
$U(x) \leq f(x) \leq V(x)$	***U*** et ***V*** tendent vers la même limite ℓ	***f*** tend vers ℓ
$f(x) \leq g(x)$	***f***(x) et ***g***(x) admettent des limites en a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

II- Limite d'une fonction composée

Nous admettons le résultat suivant :

Si ; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$; a , b et ℓ finis ou infinis.

III- Limite à gauche, Limite à droite

On dit que f admet ℓ (fini ou infini) comme limite à gauche (à droite) en a si la restriction de f à]-∞ ; a] (à [a ; +∞[ ) admet ℓ comme limite en a, on note alors,

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$; ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$).

C- Langage de continuité

I- Généralité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- On dit que f est continue en a, si f admet une limite finie en a.
- On dit que f est continue sur I, si f est continue sur tout point de I.

1) Théorème

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.
Observons que la conclusion de cet énoncé s'étend au cas d'une fonction définie sur un intervalle [a ; b] , dérivable sur]a ; b[et vérifiant $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ainsi les fonctions $x \mapsto P(x)$ (Polynôme) ; $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P et Q polynômes) ;

$x \mapsto \sqrt{ax+b}$; $x \mapsto \sin(ax+b)$, de même que leurs sommes, produits et quotients sont continues sur tout intervalle I contenu dans leurs domaines de définitions.

II- Prolongement continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a, sauf en a et vérifiant $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (ℓ réel).

Alors la fonction $f\begin{cases} x \mapsto f(x) \text{ ; si } x \neq a \\ a \mapsto \ell \end{cases}$ qui est définie et continue en a est appelée le prolongement continu (ou prolongement par continuité) de f en a.

D- Fonction continue strictement monotone

I- Image d'un intervalle

Nous admettons le résultat suivant :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors, $f(I)$ est un intervalle.
Pour tout $m \in f(I)$ l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans l'intervalle I.

Remarque

La deuxième affirmation peut aussi s'énoncer ; f est une bijection de I sur $f(I)$.
L'intérêt principal du résultat, est de permettre sous certaines conditions la résolution approchée de quelques équations du type $f(x) = 0$. Il permet :

- de justifier l'existence des solutions
- de localiser ces solutions,
- d'en- trouver des valeurs approchées.

II- Le principe de localisation

Soit f une fonction continue et strictement monotone, sur [a ; b].

Si f(a) et f(b) sont de signes contraires alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans l'intervalle ouvert]a ; b[.

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

a) Etudier les limites en + ∞ des fonctions :

$$f: x \mapsto -2x^3 + x + 1 \;;\; g: x \mapsto \frac{-x^2+1}{3x^2+x+1} \;;\; h: x \mapsto x - \sqrt{x}$$

b) Etudier les limites en 0 des fonctions :

$$x \mapsto -2x^3 + x + 1 \;;\; f: x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \;;\; g: x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Solution

a) Etude de limites en + ∞

- $f(x) = -2x^3\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $g(x) = \dfrac{-x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{3x^2\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\dfrac{1}{3}$
- $h(x) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

b) Etude de limites en 0

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
- $g(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ (g est donc le taux d'accroissement de la fonction cos) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

Exercice. 2

a) Etudier le comportement en ∞ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x} \;;\; g(x) = x^2 - \frac{1}{x} \;;\; h(x) = 2\sqrt{x} - 1.$$

Solution

Etude du comportement

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, l'expression $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ représente l'écart algébrique entre la courbe et la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ sur une verticale d'abscisse x. Cet écart vaut $-\frac{1}{x}$, il tend vers 0 à l' infini.

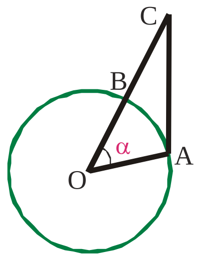
On dit que f admet la droite comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty \Rightarrow g(x)$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{h}(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\boldsymbol{h}(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{h}(x)$ admet une branche parabolique de direction (ox)

Exercice. 3

Sur la figure ci-contre est représenté un cercle de rayon1.
Pour quelle valeur de α les deux trajets OAB et AC ont- ils même longueurs.



Solution

- Mise en équation du problème

Il est claire que le problème n'est défini que pour $\alpha \in [\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$;

et qu'il se ramène à résoudre l'équation.
tanx = α + 1 ou tanx - α - 1 = 0.

- Cette équation n'a pas de solution évidente.

- Nous étudions la fonction $\boldsymbol{f}(x) = \tan x - x - 1$, elle est dérivable sur $[\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$ et vérifie

$\boldsymbol{f}\,'(x) = \tan^2 x$

On en déduit les variations de $\boldsymbol{f}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$	α	$\frac{\pi}{2}$
$f\,'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	-1				$+\infty$

La fonction $\boldsymbol{f}$ est continue et strictement croissante sur $[\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$.

De plus, $\boldsymbol{f}(\frac{\pi}{4}) < 0$ et $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \boldsymbol{f}(x) = +\infty$.

$\boldsymbol{f}$ prend donc des valeurs positifs pour α assez proche de $\frac{\pi}{2}$.

Il en découle que l'équation $\boldsymbol{f}(x) = 0$ admet sur$[\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$ une solution unique α localisée

dans l'intervalle $]\, \frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$.

Approximation de la solution :

Une localisation décimale est $\alpha \in]\, 1 \,;\, 1{,}5 \,[$; On procède par dichotomie sur cet intervalle.
Prenons $x_0 \in]\, 1 \,;\, 1{,}5 \,[$ et calculons $\boldsymbol{f}(x_0)$: si $\boldsymbol{f}(x_0) < 0$; $\alpha \in]\, x_0 \,;\, 1{,}5[$
si $\boldsymbol{f}(x_0) > 0$; $\alpha \in]\, 1 \,;\, x_0[$

B. Exercices

1 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x\cos x}{1+x^2}$

Trouver un réel positif M tel que : $|xf(x)| \le M$ pour tout réel x.
En déduire le comportement de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 Pour $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, on pose $f(x) = (\dfrac{\pi}{2} - x)\tan x$

A l'aide du théorème de composition des limites, prouver que : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$

3. 1) Etudier la limite éventuelle de la fonction f en 0 : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{x^2}$.

2) En déduire que, lorsque x est voisine de 0 on a :

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2}$

3) Déterminer des valeurs approchées des nombres :

$\sqrt{1{,}002}$; $\sqrt{0{,}95}$; $\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(On ne demande pas de calcul d'erreur).

4. On pose : $f(x) = \dfrac{(50+x^{20}) - 2500}{x^{20}}$

1) A l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de $(50 + x^{20})^2$, puis de $f(x)$ pour x= 0,6 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,01.
Peut-on conjecturer la limite de f en 0 ?
2) En développant $(50 + x^{20})^2$ simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$.
Calculer alors la limite de f en zéro.
Vaincre la tentation de se débarrasser de la calculatrice.

5. Etudier la limite éventuelle des fonctions suivantes au point considéré :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$ en $+\infty$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$ en $+\infty$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2$ en $+\infty$;

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ en 3 ;

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$ en 8 ;

9) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ en $\dfrac{\pi}{2}$;

10) $f(x) = \dfrac{(2x+5)^2 - 121^2}{x-58}$ en 58

6. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
1) Etudier la limite en 0 de :

$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}\left[\dfrac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n)\right]$

2) En déduire qu'il existe une fonction ε_n telle que :
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n\varepsilon_n(x)$;avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.

7. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x+2}$

Déterminer un polynôme g et un réel k tel que pour tout x : $-5x^2 + x + 1 = (x+2)g(x) + k$.
En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.
Donner l'équation de cette asymptote et positionner la courbe par rapport à l'asymptote.

8. Etudier les branches infinies de la courbe representative de la fonction f et donner l'asymptote verticale éventuelle.

a) $f(x) = \dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2-x}$.

9. On se propose d'étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$
1) Etudier l'ensemble de définition de f et montrer que : $f(x) = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{8}}$. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet un axe de symétrie.
2) Montrer que la droite d'équation y = x -

3) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x^2+4x+3}-x$ en $+\infty$;

4) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$ en $+\infty$

5) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x^2+4x+3}+x$ en $-\infty$;

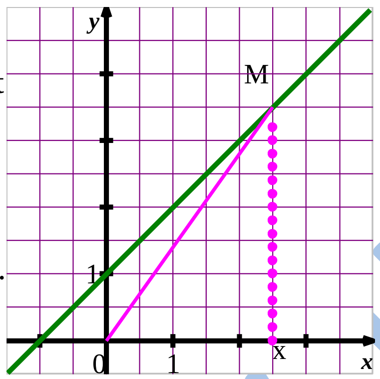
10 Etudier les branches infinies de $\boldsymbol{f}$ et montrer que Δ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

a) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{2x^2+x-4}$; $\Delta : y=\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})$

b) $\boldsymbol{f}(x)=x\sqrt{x^2+3x+1}$; $\Delta : y=-x-\frac{3}{2}$

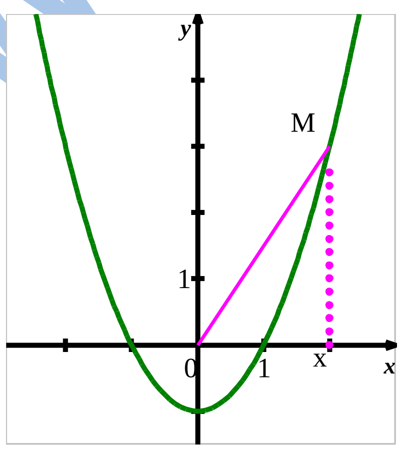
c) $\boldsymbol{f}(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$; $\Delta : y=x$

11 Soit Δ la droite d'équation y = x + 1. A tout réel x on associe le point M de Δ d'abscisse x, et on note $\boldsymbol{f}$(x) la distance OM.



1) Déterminer géométriquement les variations de $\boldsymbol{f}$ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Expliciter $\boldsymbol{f}$(x).
3) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y=\sqrt{2}(x+\frac{1}{2})$.
4) Montrer géométriquement que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie, En déduire l'existence d'une asymptote en $-\infty$.

12 $\mathcal{P}$ désigne la parabole d'équation $y = x^2 - 1$, Pour tout réel x on note $\boldsymbol{f}$(x) le coefficient directeur (lorsqu'il existe) de la droite (OM) où le point M est point M d'abscisse x.



1) Déterminer géométriquement l'ensemble de définition, la parité,

$\frac{3}{2}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et étudier sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$

13 Soit $\boldsymbol{f}(x)=\dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ (on peut développer $(x^4-1)(x+1)$).

14 Dans chacun des cas, étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de $\boldsymbol{f}$(x), puis de $\dfrac{\boldsymbol{f}(x)}{x}$.

Préciser l'allure de la branche infinie correspondante :

1) $\boldsymbol{f}(x)=x^3+x$; 2) $\boldsymbol{f}(x)=3x-3\sqrt{x}$

3) $\boldsymbol{f}(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$; 4) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

5) $\boldsymbol{f}(x)=\dfrac{x^3-1}{x+2}$; 6) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x^2+2}$

7) $\boldsymbol{f}(x)=\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x}$; 8) $\boldsymbol{f}(x)=x(1+\sin x)$

.

15 On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie pour tout x non nul par : $\boldsymbol{f}(x)=4x^2+\frac{1}{x}$.

1) Déterminer le sens de variations de $\boldsymbol{f}$, et déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 4x^2$
3) Pour $x \neq 0$; On note y_M et y_P les ordonnées respectives du point M de $\mathscr{C}_f$ et du point P de $\mathcal{P}$ d'abscisse x. Etudier la limite de $y_M - y_P$ en $+\infty$ et en $-\infty$, en donner une interprétation géométrique.
4) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{P}$ sur un même repère.

16 On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
1) a) Etudier les variations de P.
b) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet une racine réelle et une seule $\propto$ et que $\propto \in]1,6 ; 1,7[$.
2) Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. On considère la fonction numérique $\boldsymbol{f}$ définie sur D par : $\boldsymbol{f}(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$,
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de

les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ en 0 et les variations de ***f***.
2) En explicitant ***f***(x), étudier le comportement de ***f*** en $+\infty$ et en $-\infty$ (asymptote, position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote) .

17 Montrer que (E) admet une unique solution dans I et en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

1) E: $x^3 = 3 - 2x$; $I = \mathbb{R}$; 2) E : $3x^2 = \frac{1}{x} - 1$; $I = \mathbb{R}^*$

3) E: $\cos x = 2x$; $I = \mathbb{R}$; 4) E: $\tan x = x + 1$;

$I =]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

18 Soi ***f*** la fonction définie sur **R** par :
$f(x) = |x^3 - 12x|$.
1) Etablir le tableau de variations de f sur **R** (On pourra étudier les variations de $x \mapsto x^3 - 12x$).
2) Discuter suivant les valeurs de λ , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ dans **R** .
3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet six solutions dont on donnera une valeur approchée à 0,1 près.

f dans un repère orthonormé (unité : 4cm)
a) Etudier les variations de ***f*** (on utilise 1) ;
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

19 1) Montrer que si P(x) est un polynôme de degré impair l'équation P(x) = 0 admet au moins une solution).
2) Vérifier que l'équation x5 + x -1 = 0 admet une seule solution dont on déterminera une valeur approchée à10^{-2} près.

20 Montrer que l'équation :
$x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions.

CHAPITRE 6

Dérivation & primitives

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Dérivation

1) Dérivabilité d'une fonction en un réel

f est une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I.

a) Définition

Dire que le réel A est le nombre dérivé de f en x_0 signifie que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est réalisée :

- La fonction $h : \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a pour limite A en 0.
- Il existe une fonction ε de limite 0 en 0 telle que : pour tout h suffisamment proche de 0 ; $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un nombre dérivé en x_0.

Ce nombre dérivé est noté $f'(x_0)$ et l'on a alors: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

b) Dérivabilité et représentation graphique

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f, dans le plan rapporté à un repère.

Si f est dérivable en x_0, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse x_0, et le cœfficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$.

Si le rapport $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite infinie quand h tend vers 0, la fonction f n'est pas dérivable en x_0, mais $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe (yy') (verticale).

c) Dérivée à droite, Dérivée à gauche

On appelle dérivée à droite en x_0 le nombre : $\ell = \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$ s'il existe.

La demi-droite $\begin{cases} y = l(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$ est la demi-tangente à droite en $M(x_0\,;f(x_0))$ à $\mathscr{C}_f$.

Les notions de nombre dérivé à gauche et de demi-tangente à gauche se définissent de manière analogue.

Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] \neq \lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

2) Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

a) Définition 1

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si f est dérivable en tout réel de I.

b) Définition 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. la fonction dérivée de f sur I, notée f ', est la fonction définie sur I, qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x.

c) Dérivée successive

Soit une fonction f dérivable sur I, si la fonction f ' est dérivable sur I, on note f '' sa fonction dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f sur I.

On définit de même la dérivée troisième, notée f''', la dérivée quatrième, notée $f^{(4)}$; de façon générale, on note la dérivée $n^{\text{-ième}}$ $f^{(n)}$.

3) Dérivabilité et continuité

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

4) Dérivabilité et monotonie

Théorème

Soit une fonction f définie sur un intervalle I :

- f est croissante sur I si, et seulement si, $f' \geq 0$ sur I ;
- f est décroissante sur I si, et seulement si, $f' \leq 0$ sur I ;
- f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur I ;

5) Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Soit A ; B ; C trois intervalles, f une fonction dérivable de A vers B ; g une fonction dérivable de B vers C. alors $g \circ f$ est une fonction dérivable de A vers C et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

C'est-à-dire $\forall\, x \in A$, : $(g \circ f)'(x) = g'[(f(x)] \times f'(x)$.

Exemple

Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $h = g \circ f$ / $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

$$h'(x) = g'[f(x)] \times f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x2+x+}}$$

6) Dérivée de la bijection réciproque

a) Détermination de $(f^{-1})'$

Théorème

Soit f une fonction bijective d'un intervalle A dans un intervalle B, dérivable en x_0 et telle que : $f'(x_0) \neq 0$. La bijection réciproque f^{-1} est alors dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple

Soit f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x^5 + x + 1$. Calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(3)$.

$f(0) = 1$ et $f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$ et $f^{-1}(3) = 1$. $f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$ et $f'(1) = 6$.

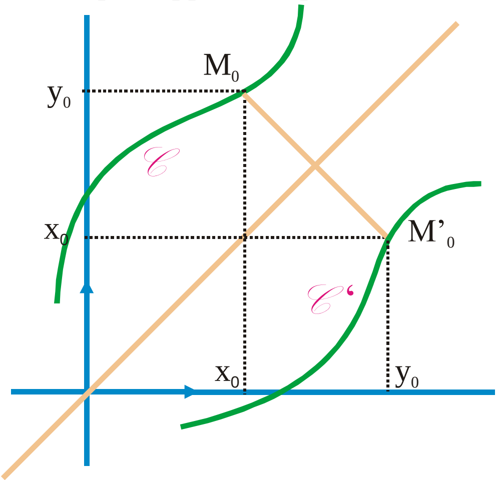
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(1)\right]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(3)\right]} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}.$$

On peut ***remarquer*** qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement f^{-1} pour calculer la valeur du nombre dérivée $(f^{-1})'(x_0)$.

b) Interprétation graphique

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une bijection ***f*** et $\mathscr{C}$ ' la courbe représentative de $\boldsymbol{f}^{-1}$, dans un repère orthonormé.

La courbe $\mathscr{C}$ 'est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la première bissectrice (la droite y = x).



7. Formulaire

E est l'ensemble de dérivabilité de al fonction ***f***, k un réel, n un entier

f	***f*** '	E
k (k ∈ $\mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^n (n≥ 2)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
sinx	cosx	$\mathbb{R}$
cosx	-sinx	$\mathbb{R}$
x^k (k∉ **Z**)	kx^{k-1}	$\mathbb{R}^*_+$

U et V sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; k est un réel, n un entier.

f	***f*** '	Conditions
U + V	U' + V'	
kU	kU'	
UV	U'V + UV'	
$\frac{1}{V}$	$\frac{-V'}{V^2}$	V ne s'annule pas sur I
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V-UV'}{V^2}$	V ne s'annule pas sur I
U^n	$nU'U^{n-1}$	n ≥ 2
U^n	$nU'U^{n-1}$	n ≤ 1 et U ne s'annule pas sur I
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	U positive et ne s'annule pas sur I
U^k	$kU'U^{k-1}$	k∉ **Z** , U positive et ne s'annule pas sur I.

8) Inégalité des accroissements finis

a) Théorème 1

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I tels que : a ≤ b.

S'il existe deux réels m et M tels que :

$\forall$ x∈I ; m ≤ ***f*** '(x) ≤ M, alors, m(b – a) ≤ ***f***(b) - ***f***(a) ≤ M(b - a).

b) Théorème 2

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I.

S'il existe un réel M tels que :

$\forall$ x∈I, | ***f*** '(x)| ≤ M, alors | ***f*** (b) - ***f*** (a)| ≤ M | b - a| .

Exemple 1

$f(x) = \sin x$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{6}]$;

Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2} x \leq \sin x \leq x$.

$f'(x) = \cos x$; $\forall\ x \in [0 ; \frac{\pi}{6}]$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq 1 \ \leq \ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq f'(x) \leq 1$.

En posant a = 0 ; b = x, on obtient: $\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 0) \leq f(x) - f(0) \leq 1(x - 0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} x \leq \sin x \leq x$.

Exemple 2

Démontrer que, pour tous réels x et y on a : $| \cos x - \cos y | \leq | x - y |$.

La fonction cosinus étant dérivable sur $\mathbf{R}$, $\cos' x = -\sin x$. Donc; $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $| \cos' x | \leq 1$.

Soient x et y deux réels et I le segment d'extrémités x et y . En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction cosinus sur ce segment I, on obtient : $| \cos x - \cos y | \leq 1 \times | x - y |$.

On a donc prouvé : pour tous réels x et y : $| \cos x - \cos y | \leq | x - y |$.

II. Primitives

1) Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x de I :

$F'(x) = f(x)$.

2) Propriétés

a) Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

b) Théorème 2

Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I, alors toute fonction

$g : x \mapsto F(x) + k$, où k est un réel, est une primitive de f sur I toutes les primitives de f sur I sont de cette forme.

c) Théorème 3

Si la fonction f admet des primitives sur I, il existe une seule primitive G vérifiant $G(x_0) = y_0$, x_0 appartient à I et y_0 étant un réel donné.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4$.

Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 2$. La fonction f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbf{R}$. En posant $U(x) = x^2 - x + 1$, f s'écrit $U' \times U^4$, donc F est de la forme $\frac{1}{5} U^5 + k$ d'où

$F(x) = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1)^5 + k$. $F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(1 - 1 + 1)^5 + k = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$,

Donc $F(x) = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1)^5 + \frac{9}{5}$.

3) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Domaine de définition des primitives
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto ax + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}$)	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbf{N}^*;\ n \neq 1)$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	$\mathbb{R}$

4) Primitives des fonctions composées

f est une fonction continue sur I

Si ***f*** est de la forme	Alors ***F*** est de la forme
$U'U^n$ ($n \in \mathbf{N}$)	$\frac{1}{n+1}U^{n+1} + k$
$\frac{U'}{U^n} (n \in \mathbf{N}^*; n \neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)U^{n-1}} + k$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U} + k$
$U'\cos U$	$\sin U + k$
$U'\sin U$	$-\cos U + k$

Savoir-faire

A. Application

Exercice 1

Montrer que la fonction définie sur [1 ; +∞ [par $f(x) = \sqrt{x(x-1)^3}$ est dérivable en 1.

Solution

Pour h > 0, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{(1+h)h^3}-0}{h} = \dfrac{h\sqrt{(1+h)h}}{h} = \sqrt{(1+h)h}$;

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\sqrt{(1+h)h} = 0$; d'où la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Exercice 2

f est une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$; $x_0 = 2$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisses x_0.

Solution

- $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{\dfrac{x^2+3}{x+1}-\dfrac{7}{3}}{x-2} = \dfrac{3x^2+9-7x-7}{3(x+1)(x-2)} = \dfrac{3x^2-7x+2}{3(x+1)(x-2)} = \dfrac{(3x-1)(x-2)}{3(x+1)(x-2)} = \dfrac{(3x-1)}{3(x+1)}; (x \neq 2).$

  $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x-1)}{3(x+1)} = \dfrac{5}{9}$; $\quad f(2) = \dfrac{7}{3}$.

- Une équation de la tangente est : $y = \dfrac{5}{9}(x-2) + \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{11}{9}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = |x^2 - 1|$.

Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution

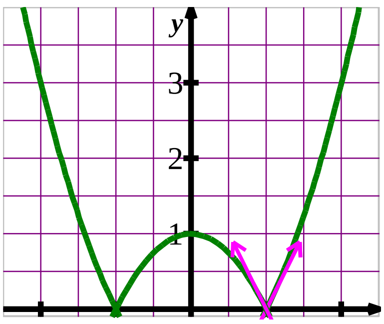
- La fonction peut-être définie comme suit $\begin{cases} x \in]-\infty;-1] \cup [1\,;+\infty[& ; f(x) = x^2-1 \\ x \in [-1\,;1] & ; f(x) = 1-x^2 \end{cases}$; $f(1) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2.$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}-(1+x) = -2.$

  Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

  f n'est pas dérivable en 1.

- f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$;
  f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -2$.
- La représentation graphique de f admet au point d'abscisse 1, deux demi tangentes d'équations :
  y = 2(x -1) à droite
  y = -2(x -1) à gauche
  Le point A(1 ; 0) est un point anguleux.



Exercice 4

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$; b) $f(x) = \sin(x^3)$; c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Solution

Fonction	Dérivée
$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$	$\dfrac{(x^4 - x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$
$f(x) = \sin(x^3)$	$(x^3)'[\cos(x^3)] = 3x^2 \cos(x^3)$
$f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$	$\dfrac{(2x+1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(2x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}$

Exercice 5

Calculer la dérivée 3ème des fonctions suivantes :

$f(x) = (3x + 1)5$; b) $f(x) = \cos(3x + 1)$; c) $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.

Solution

Fonction	Dérivée 1ère	Dérivée 2ème	Dérivée 3ème
$f(x) = (3x + 1)5$	$f'(x) = 15(3x+1)^4$	$f''(x) = 180(3x+1)^3$	$f^{(3)}(x) = 1620(3x+1)^2$
$f(x) = \cos(3x + 1)$	$f'(x) = -3\sin(3x+1)$	$f''(x) = -9\cos(3x+1)$	$f^{(3)}(x) = 27\sin(3x+1)$
$f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$	$f'(x) = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$	$f''(x) = \dfrac{18}{(3x+1)^3}$	$f^{(3)}(x) = \dfrac{-162}{(3x+1)^4}$

Exercice 6

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1 ; -2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2}$.

Déterminer les extremums de f.

Solution

f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition,

- $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1; -2\}$; $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x^2 + x - 2)^2}$.
- $f'(x)$ s'annule pour 0 et 4 et est du signe de $x^2 - 4x$.
- f est donc croissante sur]-∞ ; -2 [, puis sur]-2 ; 0] ;
- Elle est décroissante sur [0 ; 1[, puis sur]1 ; 4]
- Enfin croissante sur [4 ; +∞[.

Ces résultats sont résumés dans le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$		↗	‖	↗	2	↘	‖	↘	$\frac{26}{9}$	↗	

- $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en 0 et 4.

La fonction f admet un maximum relatif en 0, qui est 2 et admet un minimum relatif en 4 qui est $\dfrac{26}{9}$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

a) Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$.

b) Expliciter la dérivée de la fonction f^{-1}.

Solution

a) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et pour tout x de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$: $f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

$= 1 + f^2(x) > 0.$

f est continue et croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$. Donc f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$. Elle admet donc, une fonction réciproque f^{-1}.

b) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \dfrac{1}{1+f^2\left[f^{-1}(x)\right]} = \dfrac{1}{1+\left[f(f^{-1}(x))\right]^2}$, d'où

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Exercice 8

a) Démontrer que pour tout réel x on a : $|\sin x| \leq |x|$.

b) Quelle est la limite de la suite U : $n \mapsto n\sin\frac{1}{n^2}$.

Solution

a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\sin' x = \cos x$, donc $|\sin' x| \leq 1$.
Soit x un réel, en appliquant les inégalités des acroissements finis à la fonction sinus sur l'intervalle I d'extrémités 0 et x, on obtient : $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \times |x - 0|$, on a donc démontré : pour tout réel x : $|\sin x| \leq |x|$.

b) $U_n = n\sin\frac{1}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0$.
On ne peut pas conclure directement ($+\infty \times 0$ est une forme indéterminée) en utilisant l'inégalité établie au a), on peut écrire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$|\sin\frac{1}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow |n|\,|\sin\frac{1}{n^2}| \leq |n|\,|\frac{1}{n^2}| \Leftrightarrow |U_n| \leq n\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow |U_n| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < U_n \leq \frac{1}{n}$.

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 9

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ vérifiant $F(1) = 1$.

Solution

f est définie et continue sur $\mathbf{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbf{R}$.

f s'écrit sous la forme : $\frac{1}{2}\frac{U'}{\sqrt{U}}$ (en posant $U(x) = x^2 + 1$), les primitives de f sont sous la forme : $\sqrt{U}+k$. Donc $F(x) = \sqrt{x^2+1}+k$.

$F(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}+k = 1 \Leftrightarrow k = 1-\sqrt{2}$, d'où $F(x) = \sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}$.

B. Exercices

1. Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$; b) $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$

2. Montrer que la fonction défini sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x(x-1)^3}$ est dérivable en 1.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable en 0.
b) Déterminer $f\,'(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^*$.

4. Dans les deux cas suivants, déterminer si la représentation graphique de f admet une tangente ou des demi -tangentes au point d'abscisse a.

a) $f(x) = x^2 + 2x - |x|$; a = 0; b) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$; a = 2

Pour les exercices 5 à 7, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$; $x_0 = 1$;

6. $f(x) = x\cos x$; $x_0 = \pi$; .

7. $f(x) = x\sqrt{x-1}$; $x_0 = 2$.

8. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x^2+3x-1}$; b) $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)^3$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

9. Même exercice pour :

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

10 Même exercice pour :

a) $f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{4})$; b) $f(x) = \sin^2(2x - \dfrac{\pi}{3})$;

c) $f(x) = \cos(\dfrac{3x-1}{3x+1})$.

11 Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{1-x^5}{1-x}$.

1) Calculer sa dérivée dans $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.
2) En déduire l'égalité :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1-5x^4+4x^5}{(1-x)^2},$$

3) Généraliser le résultat précédent à :
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$,
Puis à : $2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1}$.

12 Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

1) Calculer sa dérivée première $f\,'$ et vérifier la relation : $2\sqrt{1+x^2}\,f\,'(x) = f(x)$.
2) En déduire que la dérivée seconde $f\,''$ vérifie la relation : $4(1 + x^2)\,f\,''(x) + 4x\,f\,'(x) - f(x) = 0$.

13 Déterminer les dérivées successives $f\,'$; $f\,''$ et $f^{(5)}$ de f :

a) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

c) $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$

14 Même question pour:

a) $f(x) = \cos^2(x^2)$; b) $f(x) = \tan^2 x$;
c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

15 Construisez le tableau de variation de la fonction proposée :

a) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$.

Même question pour:

a) $f(x) \dfrac{3x^2-4x}{x+1}$; b) $f(x) = \cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^2}$.

16 Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0\,;2]$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+2)+2 \leq \sqrt{x+2} \leq \frac{1}{4}(x-2)+2.$$

17 Démontrer que pour tous réels x et y, on a: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

18 Déterminer les primitives, en précisant sur quel(s) intervalle(s) elles sont définies, des fonctions :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$; b) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$;

c) $f(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$

19 Même question pour :

a) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$; b) $f(x) = \sin x\cos^3 x$;

c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

20 Déterminer la primitive ***F*** vérifiant

$F(x_0) = y_0$

Pour chacune des fonctions ***f*** définies par :

a) $f(x) = (2x - 1)^3$; $F(0) = 0$;

b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4$; $F(1) = 1$

c) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$; $F(1) = 0$

21 Même exercice pour :

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $F(-1) = 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+2}}$; $F(2) = 4$;

c) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$; $F(2) = 4$.

22 Dans les deux cas suivants, linéariser la fonction ***f*** et déterminer une primitive ***F*** de ***f*** sur **R** :

a) $f(x) = \cos^4 x$; b) $f(x) = \sin^6 x$

CHAPITRE 7

Etude de fonctions

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les fonctions

Soit ***f*** une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J).

1) Domaine de définition

On appelle domaine de définition de ***f*** l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \text{ existe}\}$, noté D_f.

Si cet ensemble n'est pas donné dans l'énoncé, il faut le chercher. Ce peut être **R** , un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

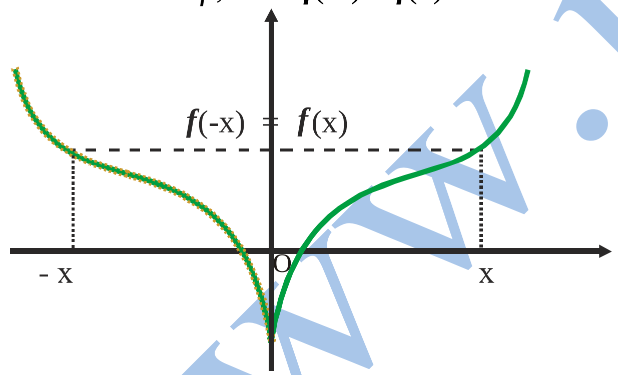
Exemples

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont définies sur **R** .
- La fonction inverse est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

2) Parité

On dit que la fonction ***f*** est paire si ,

- D_f est symétrique par rapport à zéro
- Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = f(x)$

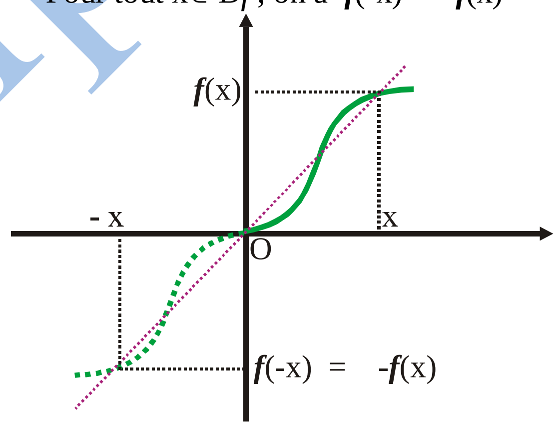


Exemple

$f : x \mapsto x^2$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$;
$\forall x \in D_f$; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$;
Donc; ***f*** est paire

On dit que la fonction ***f*** est impaire si

- D_f est symétrique par rapport à zéro
- Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = -f(x)$



Exemple

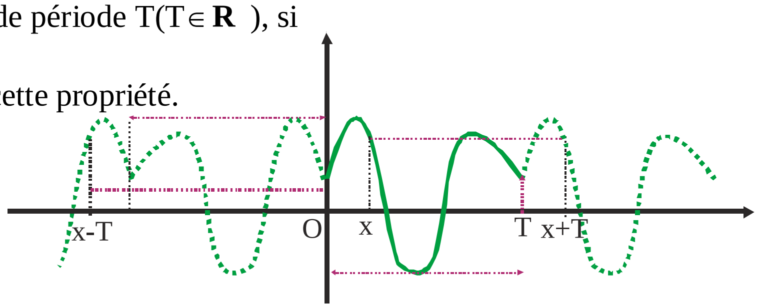
$f : x \mapsto x^3$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$;
$\forall x \in D_f$; ; $(-x)^3 = -(x)^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$;
Donc; ***f*** est impaire

3) Périodicité

On dit qu'une fonction ***f*** est périodique de période T(T∈ **R**), si

- $\forall x \in D_f$; $f(x+T) = f(x)$;
- T est le plus petit élément vérifiant cette propriété.

Alors, le domaine d'étude pourra être réduit à un intervalle de longueur T, puis de compléter le tracé par des translations successives de vecteur $T\vec{i}$.

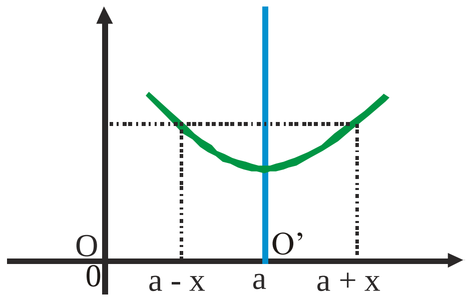


4) Eléments de symétries

Axe de symétrie

Soit f une fonction numérique ; D_f son domaine de définition $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J).

Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : x = a est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :



Méthode 1

Démontrer que : $\forall x \in D_f$; $f(2a - x) = f(x)$

Exemple

Soit $f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$;

La droite d'équation Δ : x = 2 est axe de symétrie de la courbe représentative de f car,

$$f(4-x) = \frac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \frac{4}{-x(4-x)} = f(x)$$

Méthode 2

Démontrer que f est paire dans le repère (O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; 0).**

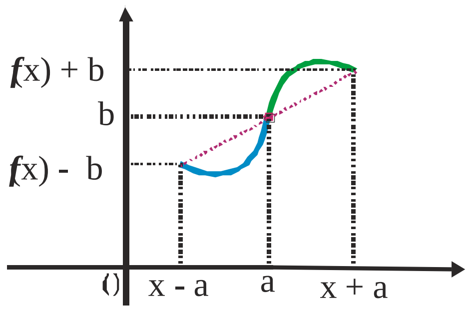
Exemple

Soit $f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; On a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$; soit : X = x - 2 et Y = y. Donc ;

$Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$. $f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $X \mapsto \dfrac{4}{(X+2)(X-2)}$. La fonction f est paire..

Centre de symétrie

Pour démontrer que le point Ω(a ; b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :



Méthode 1

Démontrer que :

$$\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à a} \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemple

Soit $f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$;

Le point Ω (1 ; 2) est centre de symétrie, car

$$\left.\begin{array}{l} f(2-x) = 2 + \dfrac{3}{2-x-1} = 2 - \dfrac{3}{x-1} \\ 4 - f(x) = 4 - (2 + \dfrac{3}{x-1}) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \end{array}\right\} f(2-x) = 4 - f(x)$$

Méthode 2

Démontrer que f est impaire dans le repère (O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; b).**

Exemple

Soit $f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$

Soit : X = x – 1 ; Y = y -2 ;

Donc l'expression de f dans ce nouveau repère est :

$f :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $X \mapsto \dfrac{3}{X}$; c'est une fonction impaire.

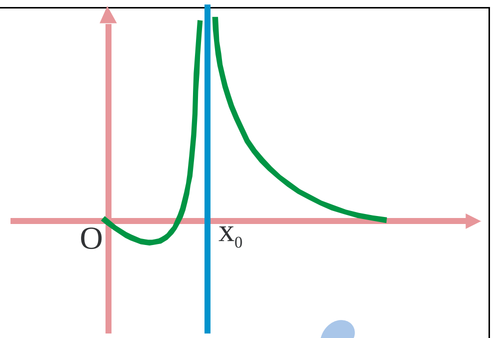
5) Asymptotes

Asymptotes parallèles aux axes de repères :

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $x = x_0$ est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Oy),

Exemple

$f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; donc $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à (Oy),

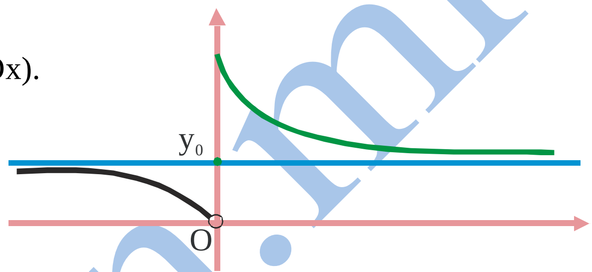


- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Ox).

Exemple

$f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x}$; On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (2 - \dfrac{1}{x}) = 2$;

donc $y = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$,
c'est une droite parallèle à (Ox).



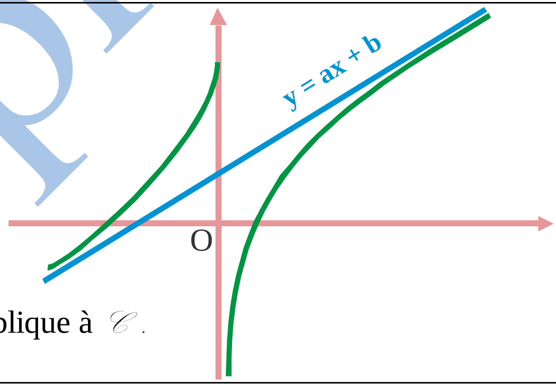
Asymptotes obliques

- Lorsqu'il existe une fonction affine : $x \mapsto ax + b$;
  telle que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$,
  on dit que la droite d'équation : $y = ax + b$
  est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

Exemple

$f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x + 1 - \dfrac{1}{x-3}$; On a : $\lim\limits_{x \to \pm} \dfrac{1}{x-3} = 0$;

donc la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

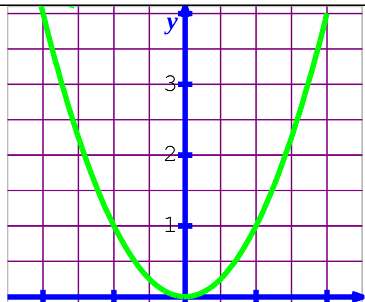


Direction asymptotique

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$
  on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (yy').

Exemple

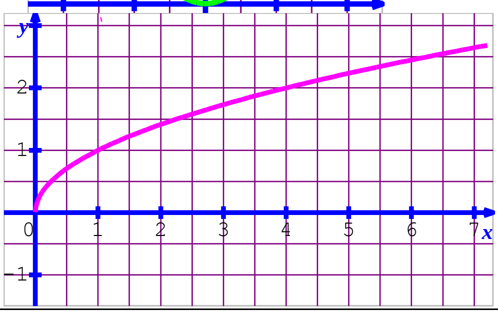
$f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x^2$;



- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
  on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (xx').

Exemple

$f: \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$;



6) Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de **R** .
On suppose que f est dérivable pour tout élément x de I.

- si la dérivé f ’est la fonction nulle sur I, alors est constante sur I.
- si la dérivé f ’est à valeurs positives sur I, alors f est croissante sur I.
- si la dérivé f ’est à valeurs négatives sur I, alors f est décroissante sur I.
- si la dérivée f ’change de signe en un point x_0 de I, pour lequel f est continue, la fonction f admet un point extremum.

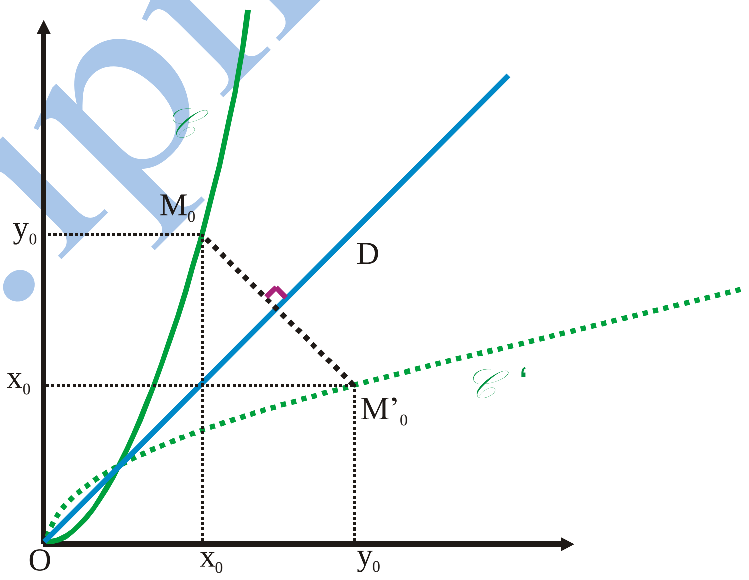
II- Plan d’étude d’une fonction

Pour étudier une fonction, on s’intéresse aux points suivants :

- ensemble de définition ;
- ensemble d’étude (parité ; imparité ; périodicité) ;
- dérivabilité ;
- continuité (aux points où la fonction étudiée n’est pas dérivable) ;
- limites aux bornes de l’intervalle d’étude ;
- sens de variation ;
- tableau de variation ;
- représentation graphique.

III. Fonction réciproque

Soit f une fonction numérique admettant une fonction réciproque f^{-1}.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f , et $\mathscr{C}$’ la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormal.
$\mathscr{C}$ est l’ensemble des points M_0 de coordonnées (x_0 ; y_0) tels que $y_0 = f(x_0)$
On a alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et par suite, le point M_0’(y_0 ; x_0) est élément de $\mathscr{C}$’.
Il en résulte que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d’équation y = x.



Exemple d'étude de fonction rationnelle

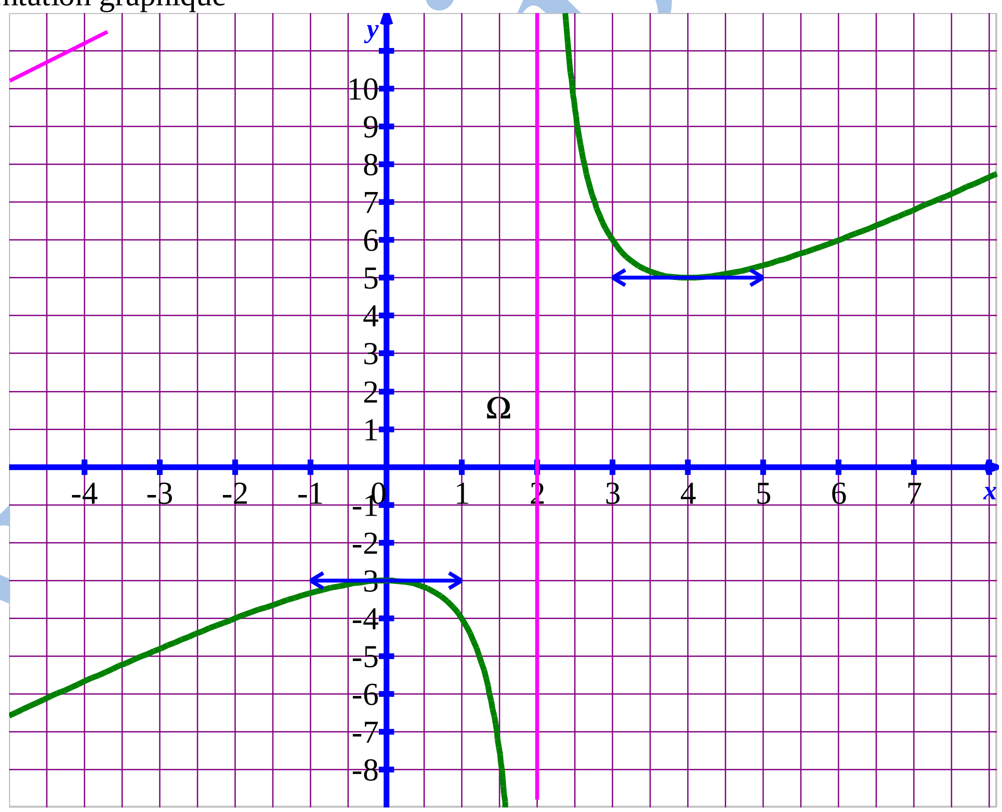
Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f}:\ x \mapsto \dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$

- $D_f = \mathbf{R} \backslash \{2\}$;
- On peut mettre $\boldsymbol{f}(x)$ sous la forme: $\boldsymbol{f}(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$;
- Limites aux bornes: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(2)^+} f(x) = +\infty$.
- Asymptotes : x = 2 est asymptote verticale ; d'après l'écriture de $\boldsymbol{f}$ et comme ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$),

  donc ; y = x – 1 est asymptote oblique.
- La fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$;
- Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

- Représentation graphique



Savoir-faire

A. Applications

Exercice .1

Etudier la fonction ***f*** définie par : $f(x) = \dfrac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$.

Solution

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 1\}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 7$; $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x) = -\infty$;

  $\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x) = +\infty$ .Donc, x = -3 ; x = 1 sont deux asymptotes verticales ; y = 7 asymptote horizontale.
- La fonction ***f*** est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = \dfrac{-6(x+2)(x+5)}{(x^2+2x-3)^2}$;
- Tableau de variation

x	-∞		-5		-3		-2		1		+∞
f ' (x)		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	
f (x)	7	↘	$\frac{25}{4}$	↗	+∞ ‖ -∞	↗	4	↘	-∞ ‖ +∞	↘	7

- Représentation graphique

Exercice .2

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan (unité : 1 cm sur chacun des axes).

1.a) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$.

b) Montrer que la droite D d'équation y = 2x – 1 est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

2) Etudier la variation de la fonction f.

a) Quelles sont les coordonnées des points d'intersections de $\mathscr{C}$, avec les axes des coordonnées ?

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

3.) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 - (7 + m)x + 5 + 3m = 0$.

Solution

- $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

1. a) Ecriture de $f(x)$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{3\},\ f(x) = \frac{2x^2 - 6x - x + 3 + 2}{x-3} = \frac{2x(x-3)}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3} = 2x - 1 + \frac{2}{x-3}\ ;$$

Donc, a = 2 ; b = -1 ; c = 2. On en déduit que : y = 2x - 1 est (A. O), car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$.

2.) Etude de variation de f

- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (3)^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (3)^+} f(x) = +\infty$, d'où x = 3 est (A. V) ;
- f est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-3)^2}$.

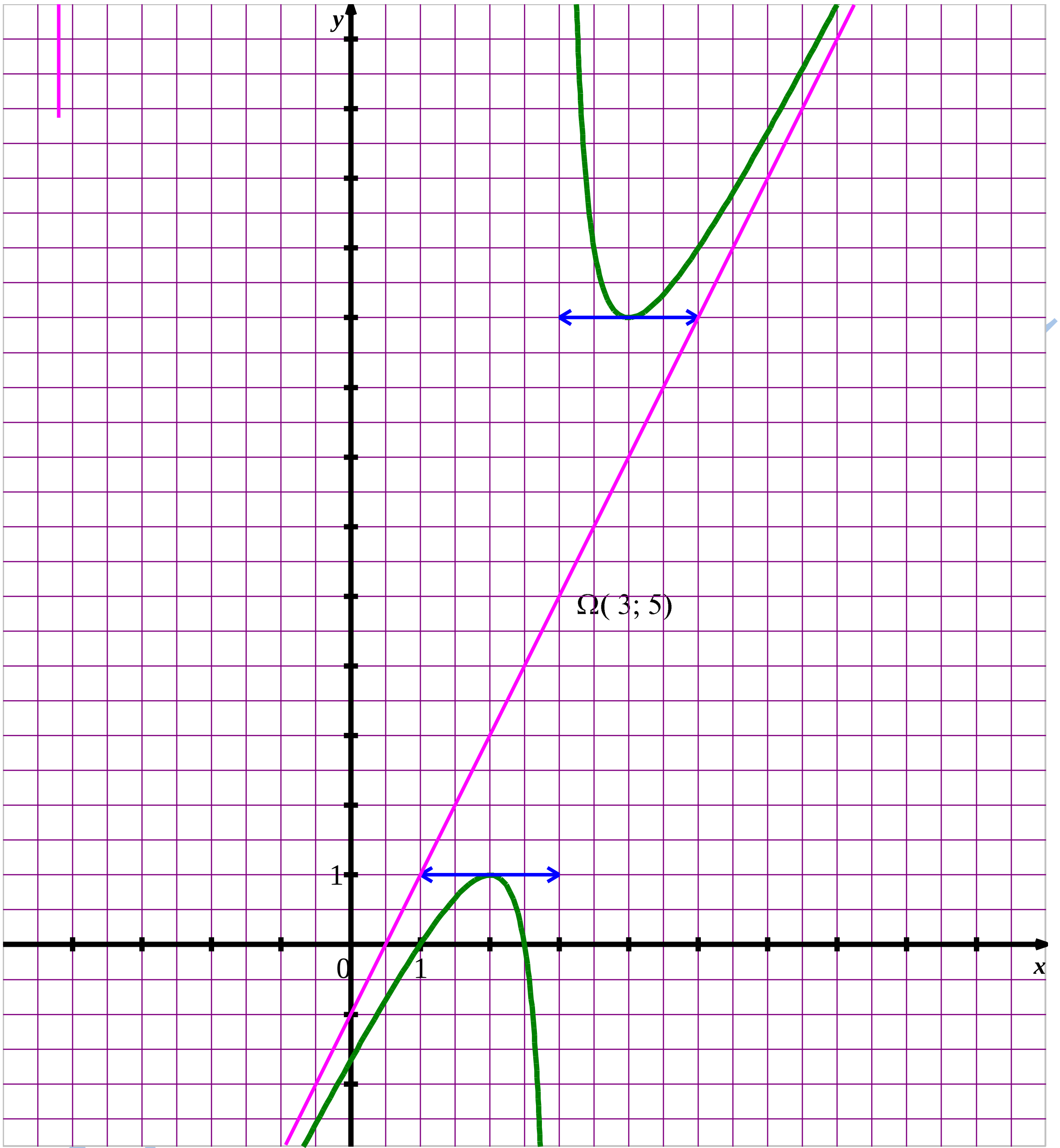
a) Points d'intersections avec les axes : x = 0 $\Leftrightarrow$ $y = -\dfrac{5}{3}$; donc avec (Ox) , on a : $(0\ ;-\dfrac{5}{3})$

y = 0 $\Leftrightarrow$ $2x^2 - 7x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 1 ou $x = \dfrac{5}{2}$; donc avec (Oy) , on a : (1 ; 0) ; $(\dfrac{5}{2}\ ; 0)$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

b) Représentation graphique



- Le point (3 ; 5) est un centre de symétrie pour la courbe de ***f***, c'est le point de concours des asymptotes.

3) Résolution graphique de l'équation : $2x^2 - (7 + m)x + 5 + 3m = 0$

$2x^2 - (7 + m)x + 5 + 3m = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = mx - 3m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = m(x - 3) \Leftrightarrow$

f(x) = $\dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} = m \Leftrightarrow$

- si $m \in]-\infty ; 1[$, il y a deux solutions distinctes,
- si $m = 1$, il y a une solution double,
- si $m \in]1 ; 9[$, il n' y a pas de solution, le nombre de solution est 0.
- si $m = 9$, il y a une solution double,
- si $m \in]9 ; +\infty[$, il y a deux solutions distinctes,

Exercice .3

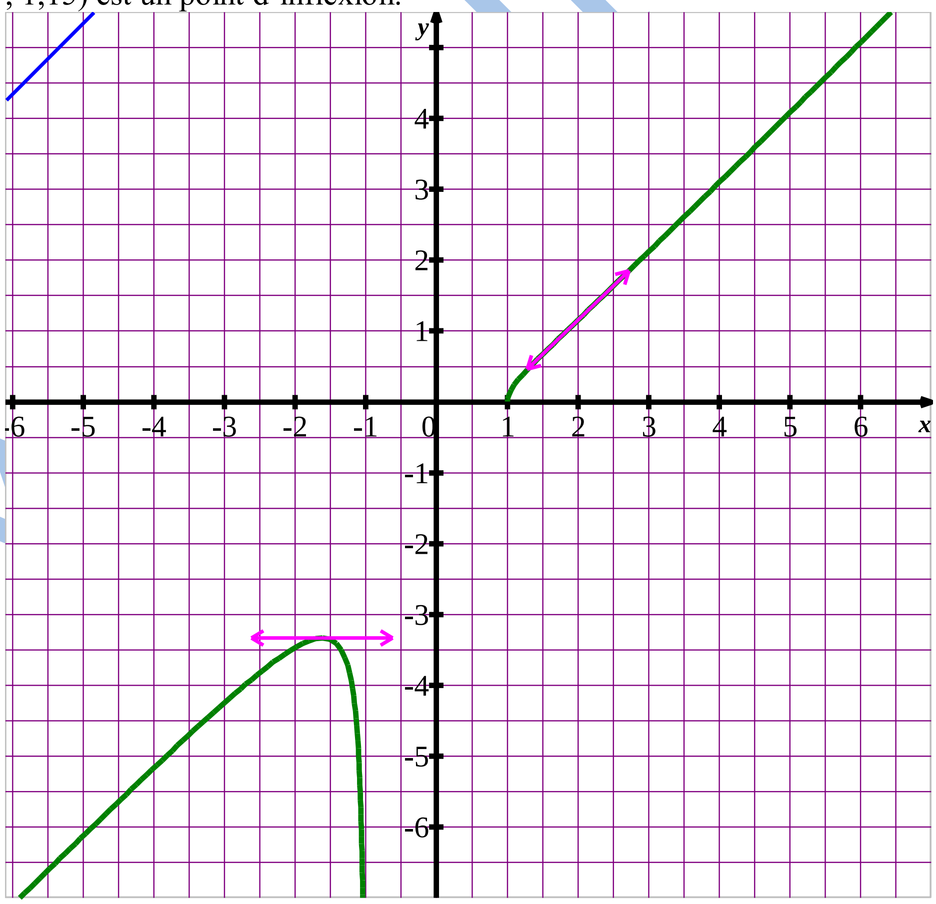
Etudier la fonction $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solution

- $D_f =]-\infty\ ;\ -1[\cup[1\ ;\ +\infty[$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$.
- Recherche d'asymptotes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -1$, donc la droite d'équation $y = x - 1$, est asymptote oblique ; En plus : $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- Dérivée **:** f est dérivable sur son domaine de définition , sa dérivée $f'(x) = \dfrac{2(x^2+x-1)}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-				+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$		0	↗	$+\infty$

- $M = f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{22+10\sqrt{5}}}{2} \approx -3{,}33$; $f(2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$;
- $f'(1) = +\infty$; la tangente au point d'arrêt (1 ; 0) est parallèle à (Oy).;
- le point (2 ; 1,15) est un point d'inflexion.



Exercice .4

Soit f la fonction définie sur **R** , par : $f(x) = \cos(3x)\cos^3 x$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. a) Restreindre le domaine d'étude de f.

b) Etudier les variations de f.

2. Tracer $\mathscr{C}$.

Solution

1. a) Restriction de D_f

- $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \cos(-3x)\cos^3(-x) = \cos(3x)\cos^3 x = f(x)$, d'où f est paire.
- $f(x + \pi) = \cos(3x + 3\pi)\cos^3(x + \pi) = (-1)(-1)^3 \text{co}(3x)\cos^3 x = f(x)$, donc f est π- périodique.

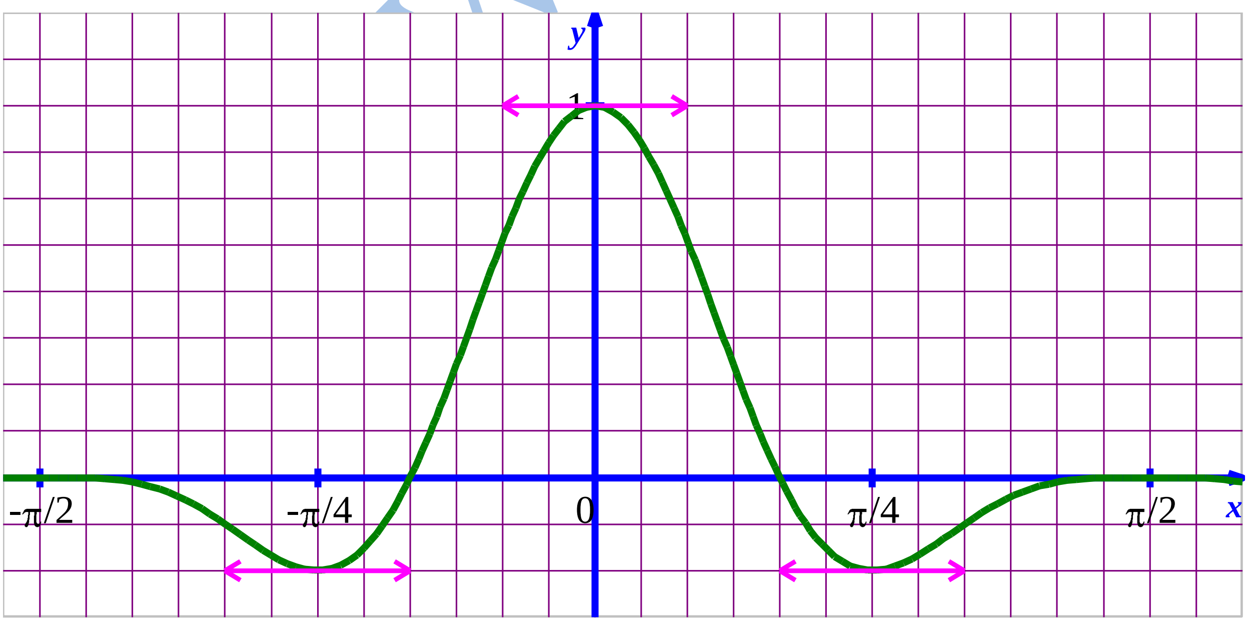
On peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$, puis on obtient ses variations sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$ par parité et sur **R** par périodicité.

b) f est dérivable sur **R** et $\forall$ x **R** , $f'(x) = -3\sin(4x)\cos^2 x$.

- Tableau de variation de f sur $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

2. Représentation graphique de f



Exercice .5

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1) Etudier $\boldsymbol{f}$ et tracer $\mathscr{C}$

2) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est une bijection de $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbf{R}\backslash\{3\}$. Soit f^{-1} la bijection réciproque et $\mathscr{C}^{-1}$ sa représentation graphique.

a) Tracer $\mathscr{C}^{-1}$ sans déterminer f^{-1}

b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

c) Déterminer f^{-1} en donnant l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image d'un élément x.

3) Faire l'étude de f^{-1}, retrouver $\mathscr{C}^{-1}$ et une équation de la tangente de $\mathscr{C}^{-1}$ au point A.

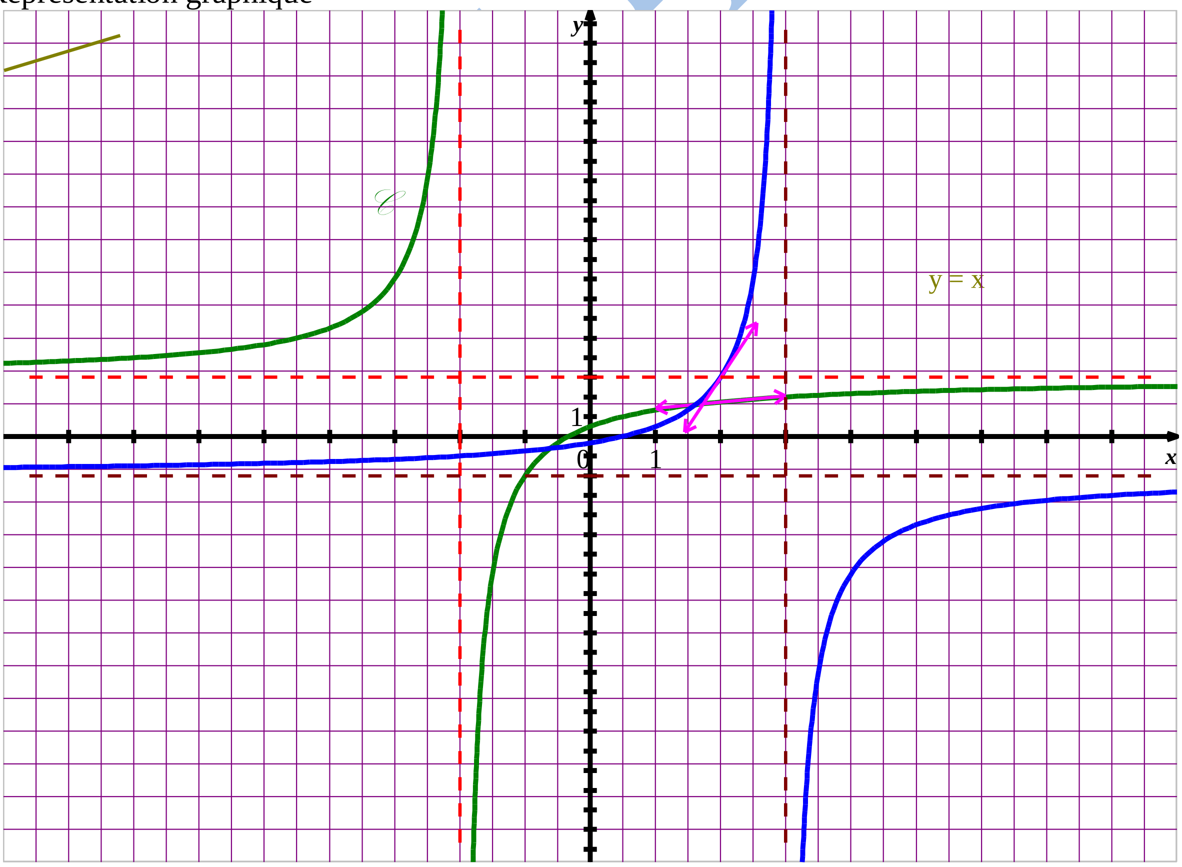
Solution

1) Etude de $\boldsymbol{f}$

- $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty;$.
- Asymptotes : x = -2 est une asymptote verticale ; y = 3 est une asymptote horizontale.
- Dérivée **:** la fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$

- Représentation graphique



2) D'après le tableau de variation de f, on en déduit que f est une bijection de $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbf{R}\setminus\{3\}$ car elle est strictement croissante et continue sur cet intervalle.

Donc, elle admet une fonction réciproque f^{-1}, de $\mathbf{R}\setminus\{3\}$ vers $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$.

a) $\mathscr{C}^{-1}$ est le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la 1ère bissectrice (y = x), (voir représentation).

b) On a : $f'(2) = \dfrac{5}{(2+2)^2} = \dfrac{5}{16}$; $f(2) = \dfrac{7}{4}$, donc $y - \dfrac{7}{4} = \dfrac{5}{16}(x-2)$, c'est l'équation de la tangente en A d'abscisse 2.

c) Comme : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x + 1 = yx + 2y \Leftrightarrow x(3 - y) = 2y - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y-1}{3-y}$

Donc $f^{-1} : \mathbf{R}\setminus\{3\} \to \mathbf{R}\setminus\{-2\}$ est définie par : $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{2x-1}{3-x}$.

- $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}\setminus\{3\}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to(3)^-} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to(3)^+} f(x) = -\infty;$.
- Asymptotes : x = 3 est une asymptote verticale ; y = -2 est une asymptote horizontale.
- Dérivée $(f^{-1})'(x) = \dfrac{(x+2)^2}{5}$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

- La représentation graphique de cette fonction coïncide avec celle obtenue par la symétrie dans la question 1). On en déduit également l'équation de la tangente en A : $y - 3 = \dfrac{16}{5}(x-2)$.

Exercice .6

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Démontrer que cette fonction admet une fonction réciproque sur l'intervalle J à déterminer.
2. Représenter les deux fonctions dans un même repère orthonormé.

Solution

1. Existence de la fonction réciproque

Nous avons $f : \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; 1]$; $x \mapsto \sin x$.

Etant donné la continuité et la monotonie stricte (strictement croissante) sur cet intervalle, donc, cette fonction est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1 ; 1]$. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque continue, qui a le même sens de variation.

On note, ainsi, $f^{-1} : [-1 ; 1] \to [-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$; $f^{-1} : x \mapsto \arcsin x$.

Cette définition se traduit par : $\left.\begin{array}{l} x \in [-1\,;\,1] \\ y = \arcsin x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

- Dérivée, comme $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$.

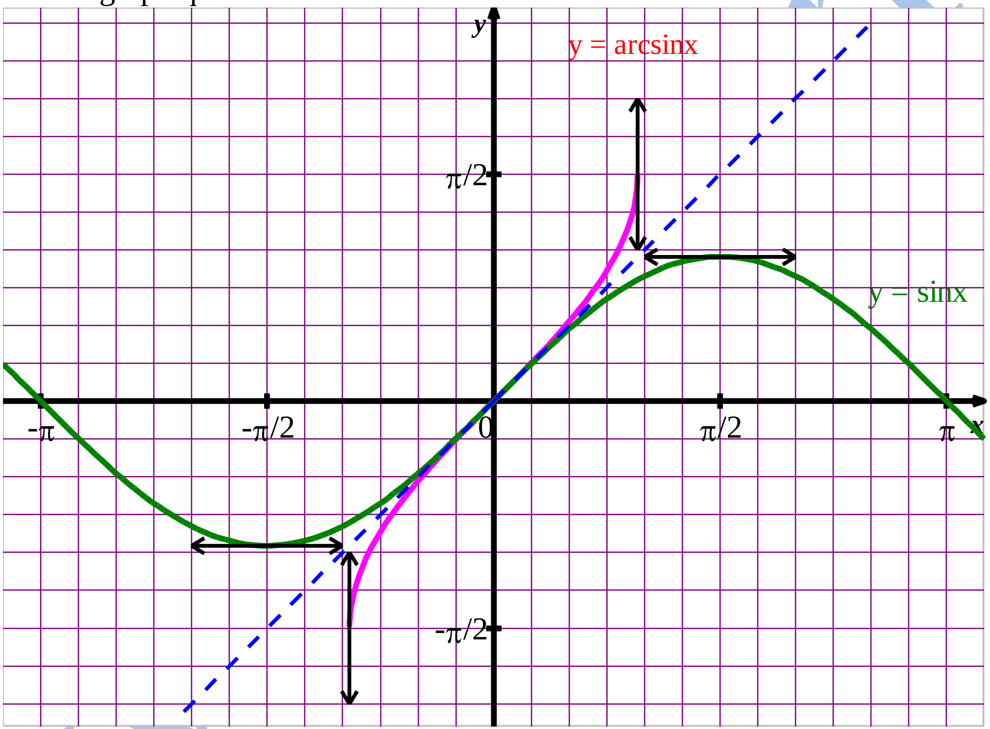
D'après, la relation entre la dérivée d'une fonction et celle de sa réciproque, on a : si $x \in\ ]-1\,;\,1[$,

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$.

Or, si, $\arcsin x = y$, on a : $\sin y = x$, donc $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. Comme y appartient à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif. Il en résulte que $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Par conséquent ;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Représentation graphique



Exercice .7

Etudier la variation de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+6x+8}{x(x-2)}$ et construire sa courbe représentative En déduire la variation de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)}$.

Tracer la courbe représentative et en déduire les valeurs de x comprises entre 0 et 2π telles que : $-15 \le g(x) \le 1$.

Solution

- $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\,;\,2\}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 1$.

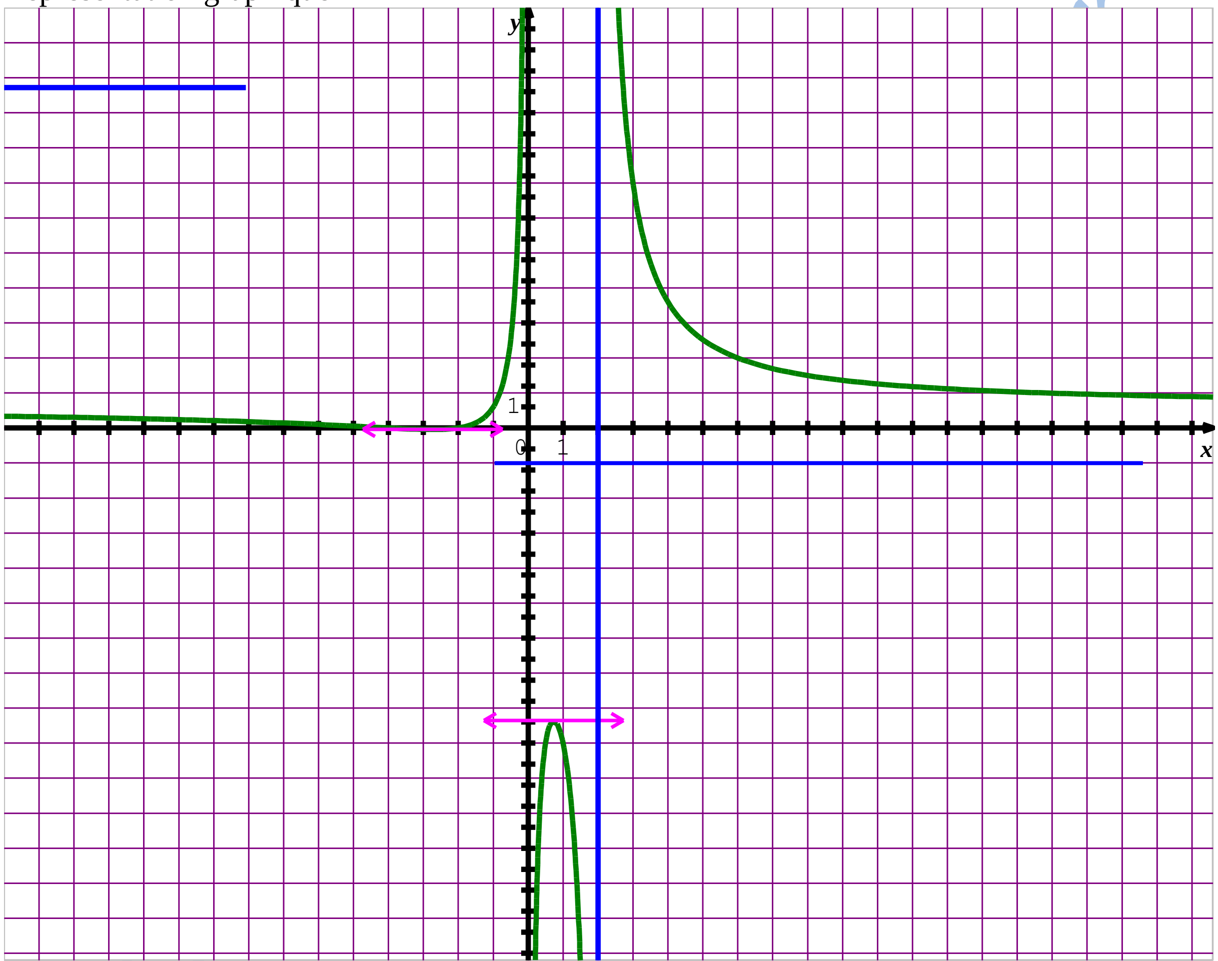
Donc, x = 0 ; x = 2 sont deux asymptotes verticales et y = 1 asymptote horizontale.

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{8(x^2+2x-2)}{[x(x-2)]^2}$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	||	-	
$f(x)$	1	↘	$\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-7-4\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

- Représentation graphique



2) Etude de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)}$

- $D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \,/\, k \in \mathbf{Z}\}$;
- Elle est périodique de période 2π. On peut limiter l'étude à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$.
- $x = -\pi$; 0 ; $x = \pi$ sont des asymptotes verticales
- Variation de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)}$, On a : $f(\sin x) = \dfrac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)} = g(x)$,

d'où $g'(x) = (f'(\sin x))(\sin x)' = \dfrac{8(\sin^2 x + 2\sin x - 2)}{[\sin x(\sin x - 2)]^2}\cos x$

- Tableau de variation de ***g***

x	0		α_1		$\frac{\pi}{2}$		α_2		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
g' (x)	‖	+	0	-	0	+	0	-	‖	-	0	+	‖
g (x)	‖ $-\infty$	↗	$(-1-4\sqrt{2})$	↘	-15	↗	$(-1-4\sqrt{2})$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖

Remarque : $\alpha_1 \simeq \frac{\pi}{4}$; $\alpha_2 \simeq \frac{3\pi}{4}$

- Représentation graphique

Les valeurs de x telles que : $-15 \le \boldsymbol{g}(x) \le 1$: sont, d'après le graphique, les réels x tels que : $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$.

Exercice .8

1) Etudier la variation de la fonction numérique ***f*** définie par : $\boldsymbol{f}(x) = \frac{2}{3}\sqrt{-2x^2 - x + 1}$.

Construire sa courbe $\mathscr{C}_1$ dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

2) On considère la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation : $y = -\frac{2}{3}\sqrt{-2x^2 - x + 1}$ dans le repère précédent.

a) Donner une équation de la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de avec la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.

Solution

Soit P(x) le trinôme $-2x^2 - x + 1$; son discriminant est : $(-1)^2 - 4(-2)(1) = 9 > 0$;

donc, il admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{1+3}{-4} = \frac{-4}{4} = -1$; $x_2 = \frac{1-3}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

On peut donc mettre P(x) sous la forme $(x+1)(x - \frac{1}{2})$; d'où le tableau donnant le signe de P(x).

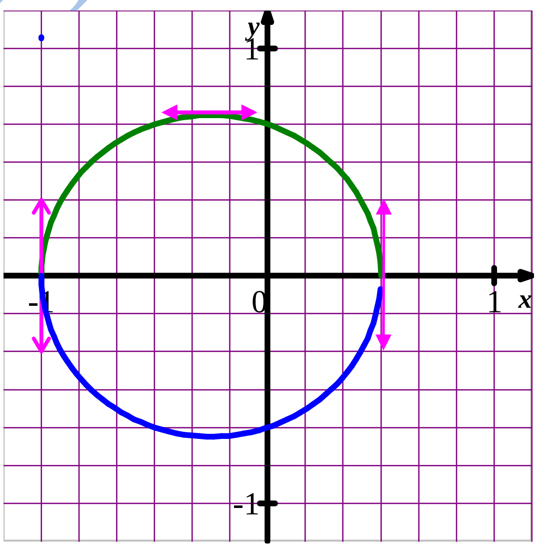
x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(x+1)(x-\frac{1}{2})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) Etude de ***f***

$D_f = [-1 ; \frac{1}{2}]$;

- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^1} f(x) = -\frac{2}{3}$;
- Dérivée **:** la fonction ***f*** est dérivable sur D_f, sa dérivée $f'(x) = \frac{-4x-1}{3\sqrt{-2x^2-x+1}}$.
- Tableau de variation

x	-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
f ' (x)	||	$+\infty$	0	$-\infty$	||
f (x)	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0



- Représentation graphique

  $\mathscr{C}_1$ est représentée en couleur verte.

2) M(x ; y) un point de $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$) signifie que

$y^2 = \frac{4}{9}(-2x^2 - x + 1)$, d'où $9y^2 + 8x^2 + 4x - 4 = 0$ est

l'équation cherchée.

- $\mathscr{C}_2$ est le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à (Ox) ;

  elle est représentée en couleur bleue.

B. Exercices

1. Etudier et représenter les fonctions suivantes : $\boldsymbol{f}(x) = x^2 - 3x + 2$; $\boldsymbol{g}(x) = |x^2 - 3x| + 2$;
$\boldsymbol{f}(x) = x^2(x-1)^2$; $\boldsymbol{f}(x) = |x-2|^3 - |2-x|$.

2. Etudier et représenter les fonctions suivantes

a) $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{x-3}{x}$; b) $\boldsymbol{g}(x) = \dfrac{x+3}{x}$;

c) $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{-3x+1}{|x|-2}$; b) $\boldsymbol{h}(x) = \dfrac{|-3x|+1}{x-2}$;

3. Etudier et représenter les fonctions suivantes :

$\boldsymbol{f}(x) = \sqrt{x^2-3x+5}$; $\boldsymbol{g}(x) = x\sqrt{2x^2-1}$;

$\boldsymbol{f}(x) = 2x - \sqrt{x+1}$; $\boldsymbol{g}(x) = 2x + \sqrt{x+1}$;

$\boldsymbol{f}(x) = -2x + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $\boldsymbol{g}(x) = x\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. Etudier et représenter les fonctions suivantes:

$\boldsymbol{f}(x) = \sin 2x + \cos 3x$; $\boldsymbol{g}(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$; $\boldsymbol{g}(x) = \dfrac{1-\cos x}{2+\cos x}$.

5. On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $[0 ; 2]$

Par : $\forall x \in [0 ; 1[$; $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}$;

$\forall x \in [1 ; 2]$; $\boldsymbol{f}(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x$.

1) Etudier la continuité de $\boldsymbol{f}$ sur $[1 ; 2]$.
2) La fonction $\boldsymbol{f}$ est-elle dérivable pour $x = 1$?
3) Etudier la fonction $\boldsymbol{f}$ et construire la courbe représentative $\mathscr{C}$.

6. Soit la fonction numérique $\boldsymbol{f}$ définie par :

$\boldsymbol{f}(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x-2}$.

1) a) Quel est l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$?
b) Etudier la variation de $\boldsymbol{f}$. Calculer $\boldsymbol{f}(1)$ et $\boldsymbol{f}(4)$.
c) Quelle est la limite de $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{f}(x) - x + 3$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$?
En déduire que la courbe représentative de $\boldsymbol{f}$ admet la droite d'équation $y = x - 3$ pour asymptote. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $\boldsymbol{f}$ dans un plan rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes défins par $(O ; \vec{i})$; $(O ; \vec{j})$?
Déterminer une équation de la tangente en chacun de ces points, à $\mathscr{C}$ et construire ces tangentes.

7. On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par :

$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{x^2-5x-2}{2(x+1)}$

1) Déterminer les réels a ; b et c tels que, pour tout élément x de l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$, on ait : $\boldsymbol{f}(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2) Etudier la fonction $\boldsymbol{f}$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $\boldsymbol{f}$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Montrer que a deux asymptotes et un centre de symétrie.
Tracer $\mathscr{C}$ (on choisira 1 cm pour unité de longueur).

8. Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par

$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\sin x}$.

1) Montrer que $\boldsymbol{f}(x)$ peut se mettre sous la forme : $\dfrac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ En déduire la limite de f(x) quand x tend vers 0.
2) pose $u(x) = 1 - \cos x$ et $v(x) = \sin x \cos x$.
Calculer la dérivée de $\dfrac{u}{v} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x \cos x}$ et, en remarquant que $u'v - uv'$ contient $1-\cos x$ en facteur, montrer que la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ reste positive quand $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Pour x élément de $]-\dfrac{\pi}{2} ; 0[\cup]0 ; \dfrac{\pi}{2}[$, étudier la variation de $\boldsymbol{f}$ et tracer sa courbe représentative.

9. On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par

$$\boldsymbol{f}(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+bx+c}.$$

1) Déterminer les coefficients b et c pour que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction $\boldsymbol{f}$ admette pour asymptote x = -1 et x = 2.
2) Etudier la variation de la fonction $\boldsymbol{f}$ ainsi obtenue et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.
3) On considère la famille des droites $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = m$, où m est un paramètre. Discuter de l'existence et du nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et d'une droite $\mathcal{D}_m$ suivant les valeurs du paramètre m.

   Quelles sont les équations des droites $\mathcal{D}_m$ tangentes à la courbe $\mathscr{C}$? Interpréter ces résultats sur la représentation graphique.
4) Il y a généralement deux points d'intersection M et M'. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [MM'] en fonction de m.
   L'élimination de m, entre les coordonnées de I conduit à une équation cartésienne d'une courbe. Représenter cette courbe dans le même repère que $\mathscr{C}$. Cette courbe est-elle l'ensemble E des points I?

10 Soit $\boldsymbol{f}_m$ la fonction définie par :

$$\boldsymbol{f}_m(x) = \frac{x^2-mx}{x^2-4x+3c},$$ où m est un nombre réel.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la fonction $\boldsymbol{f}_m$:
a) N'admet ni maximum ni minimum.
b) Admet un maximum et un minimum.
c) Admet uniquement un minimum.
2) Soit $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}_m$.
a) Résoudre l'inéquation : $\boldsymbol{f}_4(x) \geq \boldsymbol{f}_{\frac{5}{2}}(x)$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_{\frac{5}{2}}$.
b) Etudier la variation de $\boldsymbol{f}_4(x)$ et représenter $_4$ dans un repère orthonormal.
   Démontrer que $\mathscr{C}_4$ *admet un axe de symétrie.*
c) Etudier la variation de $\boldsymbol{f}_{\frac{5}{2}}(x)$ et représenter $\mathscr{C}_{\frac{5}{2}}$ dans le même repère que $\mathscr{C}_4$.
3) a) Donner, en fonction de m, les coordonnées du point A, intersection de $\mathscr{C}_m$ et de son asymptote parallèle à l'axe yox.
   b) Déterminer les cordonnées du point B, distinct de O et de A, intersection de et de la droite (OA).
   c) Donner les coordonnées du point M de la droite (OA) défini par $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.
   Quel est l'ensemble des points M quand m varie ?

CHAPITRE 8

Fonctions ℓn et exp

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Fonction logarithme Népérien

1) Définition 1

La fonction logartihme néperien est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ qui prend la valeur 0 en 1.

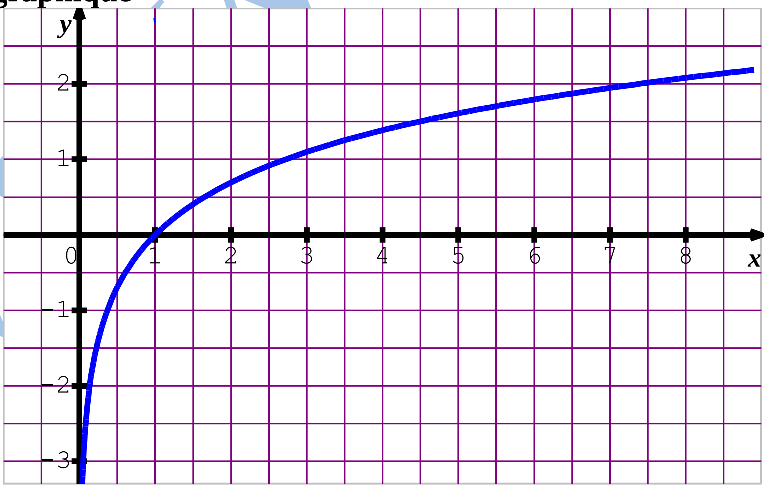
La fonction logarithme néperien est notée ℓn .

2) Propriétés

- le domaine de définition de ℓn est $]\,0\,;+\infty\,[$
- la fonction ℓn est strictement croissante sur $]0\,;+\infty\,[$,
- le signe de $\ell n\, x$ est immédiatement fourni par le sens de variation

x	0		1		$+\infty$
$\ell n\, x$		-	0	+	

3) Représentation graphique



4) Théorème 1

Pour tout réels strictement positif a et b et pour tout entier relatif p on a :

- $\ell n\,(ab) = \ell n\, a + \ell n\, b$ et $\ell n\,(\dfrac{1}{b}) = -\,\ell n\, b$; $\ell n\,(\dfrac{a}{b}) = \ell n\, a - \ell n\, b$
- $\ell n\, a^p = p\,\ell n\, a$ et $\ell n\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\,\ell n\, a$.

5) Théorème 2

Pour tout réel m l'équation $\ln x = m$ a une solution unique dans $]\,0\,;+\infty\,[$. Ainsi la fonction $\ln$ est une bijection de $]\,0\,;+\infty\,[$ dans $\mathbf{R}$.

Le nombre réel sulotion de l'équation $\ln x = 1$ est noté e et on a : $e \simeq 2{,}718281828\ldots$

D'où $\ln(e^p) = p$ (e est appelé base du logarithme néperien).

6) Limites

Théorème 3

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

7) Dérivée et Primitive

Théorème 4

1) La fonction $\ln u$ est dérivable sur tout intervalle où u est dérivable et $u(x) > 0$, et on a :

$[\ln u(x)]' = \dfrac{u'}{u}$.

2) La fonction $\dfrac{u'}{u}$ admet come primitive
$$\begin{cases} \ln u & \text{où } u(x) > 0 \\ \ln(-u) & \text{où } u(x) < 0 \end{cases}$$

II. Fonction exponentielle

1) Définition 2

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, elle est notée exp(x) ou e^x.

Ainsi, $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

2) Propriétés

- exp est définie sur $\mathbf{R}$ et $\exp > 0\ \forall x \in \mathbf{R}$.
- $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$; $\exp(-1) = \dfrac{1}{e}$.
- Pour tout réel x ; $\ln(\exp(x)) = x$ et pour tout réel $x > 0$ $\exp(\ln x) = x$

3) Théorème 5

Pour tout réel a et b et pour tout entier n :

- $\exp(a + b) = \exp(a).\exp(b)$.
- $\exp(a - b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$ et $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp b}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$; $n \in \mathbf{Z}$ et $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$; $n \geq 1$

4) Limites

Théorème 6

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$;
- $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

5) Dérivée

exp est dérivable (donc continue)sur **R** et pour tout réel x : exp'(x) = exp(x) = e^x. L'approximation affine au voisinage de 0 de al fonction exponentièlle est : $h \mapsto 1+h$.
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et pour tout x de I : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

III- Puissance d'un nombre positif

Pour tout a> 0 et pour tout réel b on pose : $a^b = e^{b\ln a}$ (a^b se lit a puissance b).
Cette définition donne un sens à des expressions telle que : $3^{1,8}$; $51^{-\sqrt{2}}$; π^e ; 2^π.
Mais logarithme exige dans a^b (a> 0).

Règle de calcul

Pour tous réels a et a' strictement positifs et quels que soient b et c :

- $a^b \times a^c = a^{b+c}$; $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$; $a^b \times a'^b = (a a')^b$; $(a^b)^c = a^{bc}$; $\ln(a^b) = b\ln a$

1) Définition 4

Pour tout réel a strictement positif $x \mapsto a^x$, appelée fonction exponentielle de base a est la fonction $x \mapsto e^{x\ln a}$. Elle est définie et à valeurs positives sur R , elle est dérivable sur **R** , de fonction dérivée $x \mapsto \ln a\,(a^x)$.

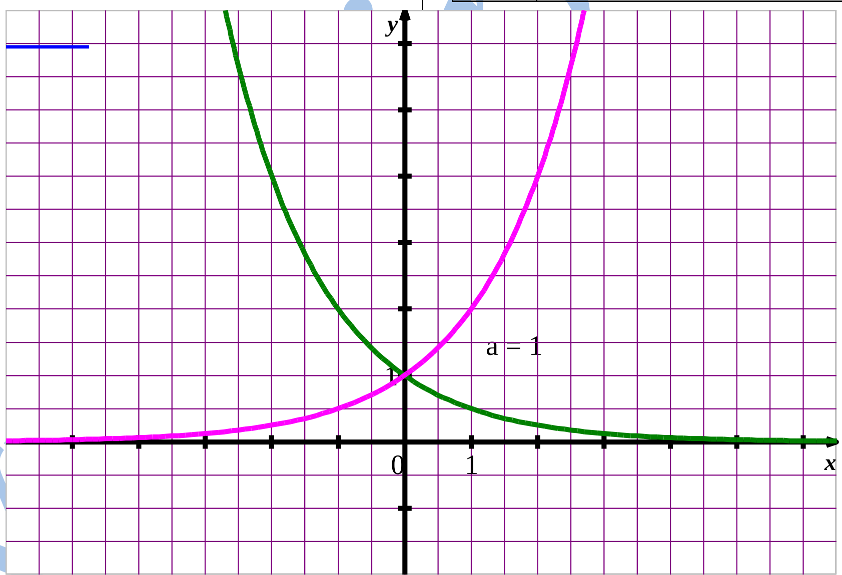
2) Tableaux de variations, courbes représentatives

a > 1

x	-∞	1	+ ∞
a^x	0	↗	+ ∞

0 < a <1

x	-∞		+ ∞
a^x	+ ∞	↘	0



Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme

Pour tout entier naturel n ;

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

Fonction logarithme décimal

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée Log et définie par : $\mathrm{Log}x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ sur]0 ; +∞[.

Remarque : On peut procéder autrement : on définit la fonction exponentielle comme étant l'unique fonction *f* dérivable sur **R** , telle que: *f* ' = *f* et *f*(0) = 1, puis on définit la fonction logarithme népérien comme étant la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur **R** .

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

a) Résoudre l'équation $\ln(x^2 + x + 1) = 0$ et l'inéquation $\ln(x^2 + x + 1) < 0$.

b) Simplifier $\ln a^2b^3$; $6\ln\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$; $\dfrac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$.

c) Résoudre :
- $\ln(x-2)(x-1) = \ln 2$
- $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln 2$.

Solution

a) Résolution demandée

- $\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x+1) = 0$; $S = \{0\ ;\ -1\}$.
- $\ln(x^2 + x + 1) < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 < 1 \Rightarrow x(x+1 < 0$; $S =]0\ ;\ 1[$.

b) Simplification cherchée

- $\ln(a^2b^3) = \ln a^2 + \ln b^3 = 2\ln a + 3\ln b$
- $6\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\right) = -6\ln(\sqrt[3]{a^2b}) = -2\ln(a^2b) = -4\ln a - 2\ln b$.
- $\dfrac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = \dfrac{1}{2}\ln 4 = \dfrac{1}{2}2\ln 2 = \ln 2$.

c) Résolution demandée

- $\ln(x-2)(x-1) = \ln 2$; l'ensemble de définition $E =]-\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$ Ainsi, $x \in E$; et $(x-2)(x-1) = 2 \Leftrightarrow x \in E$ et $x = 0$ et $x = 3$. L'équation (1) à pour solution 0 et 3.
- $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln 2$; l'équation (2) n'admet que $x = 3$ pour solution (elle n'est définie que pour $x > 2$).

Exercice. 2

a) Simplifier les écritures :
- $a = \ln(\sqrt{2})$
- $e^{-\ln 3} = b$
- $c = e^{\ln 2 - \ln 5}$
- $d = \ln\sqrt{e^3}$
- $g = \sqrt[3]{e^4} \times (\sqrt[3]{e})^2$
- $f = \dfrac{e^3\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}$.

b) Résoudre les équations.
- $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$;
- $e^{-x^2-12x-35} = 1$;
- $e^{2x} + e^x - 42 = 0$.

Solution

a) Simplification cherchée

- $a = \ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}\ln e = \dfrac{1}{2}$;
- $b = e^{\ln\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$;
- $c = e^{\ln 2 - \ln 5} = \dfrac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 5}} = \dfrac{2}{5}$;
- $d = \ln\sqrt{e^3} = \dfrac{1}{2}\ln e^3 = \dfrac{3}{2}$
- $g = \sqrt[3]{e^4} \times (\sqrt[3]{e})^2 = \sqrt[3]{e^4} \times \sqrt[3]{e} \times \sqrt[3]{e} = \sqrt[3]{e^4 \times e \times e} = \sqrt[3]{e^6} = e^2$;
- $f = \dfrac{e^2\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}} = \dfrac{e^2 e^{\frac{1}{2}}}{e^{1,2}e^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{\frac{23}{15}}} = e^{\frac{5}{2}-\frac{23}{15}} = e^{\frac{29}{30}}$.

b) Résolution demandée

- $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0 \Rightarrow e^x = 1$ ou $e^x = 2 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2$.
- $e^{-x^2-12x-35} = 1 \Rightarrow -x^2 - 12x - 35 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x + 35 = 0 \Rightarrow x = -7$ ou $x = -5$.
- $e^{2x} + e^x - 42 = 0$; Posons $t = e^x \Rightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow x = \ln 6$;
  ou $t = -7$(rejetée car $t > 0$)

Exercice. 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$; 2) $f(x) = \ln(\cos x)$; 3) $f(x) = e^{x^2+2x+1}$; 4) $f(x) = e^{\sin x}$.

Solution

1) f est définie sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} ;$$

2) f est définie sur $\mathbf{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbf{Z}^*\right\}$ et

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

3) f est définie sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = (2x+2)\, e^{x^2+12x+1}$.

4) f est définie sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = \cos x\, e^{\sin x}$.

Exercice. 4

Chercher les primitives des fonctions f sur I :

1) $f(x) = \tan x$ $\left(x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\right)$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ $(x \in \mathbf{R})$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{3^x}$ $(x \in \mathbf{R})$.

Solution

1) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-(\cos x)'}{\cos x} \Rightarrow F(x) = -\ln(\cos x) + c$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; $1 - f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow F(x) = x - \ln(1+e^x) + c$

3)) $f(x) = \dfrac{1}{3^x} = (\dfrac{1}{3})^x = e^{x\ln\frac{1}{3}} = e^{(-\ln 3)x} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{\ln 3} e^{(-\ln 3)x} + c = \dfrac{-1}{\ln 3} \times \dfrac{1}{3^x} + c$.

Exercice. 5

Etudier et représenter graphiquement les fonctions :1) $f(x) = x - 1 + \ln\dfrac{x-2}{x+2}$; 2) $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

Solution

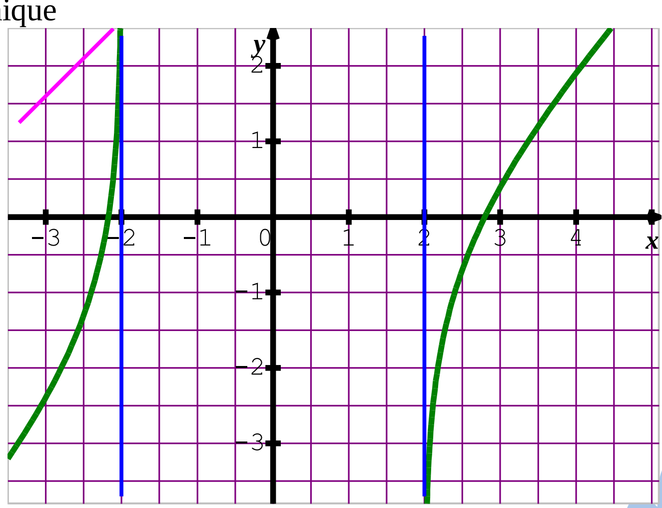
1) $f(x) = x - 1 + \ln\dfrac{x-2}{x+2}$

- $D_f =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x)' = 1 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x^2}{x^2-4}$, $f(x)' > 0$ et donc $f(x)$ est croissante sur D_f.
- $x = -2$; $x = 2$ sont des asymptotes verticales. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x-2}{x+2} = 0 \Rightarrow y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. De plus : sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$; $\dfrac{x-2}{x+2} < 1 \Rightarrow$ $\ln\dfrac{x-2}{x+2} < 0$; il en découle que $\mathcal{C}_f$ est au dessous de Δ.
- Tableau de variation

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)'$	+				+

f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$	╳	$-\infty$ ↗ $+\infty$

- Représentation graphique

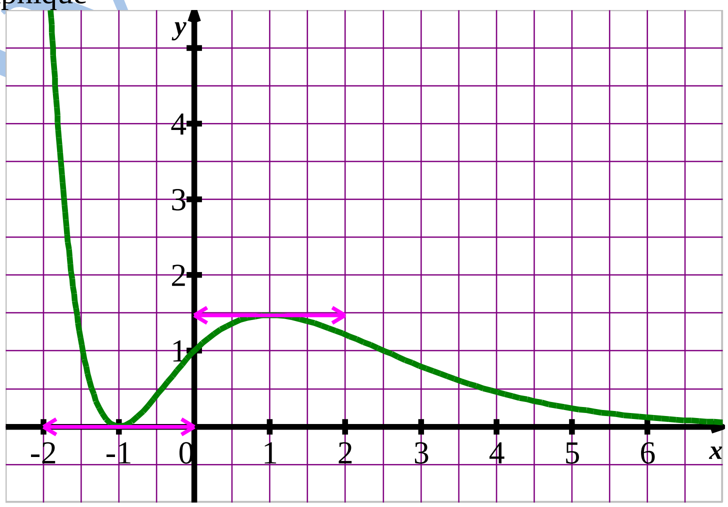


2) $f(x) = (x + 1)^2e^{-x}$

- D_f = **R** • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $f(x)' = 2(x+1)\,e^{-x} - (x+1)^2\,e^{-x} \Rightarrow f(x)' = (1 - x^2)\,e^{-x}$
- $f(x)'$ est du signe de $(1 - x^2)$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Représentation graphique



B. Exercices

1. Résoudre dans **R** chacune des équations proposées

1) $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$;2) $\ln(3x) = 3\ln x$

3) $\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$

4) $\ln(x^2-2x) = \ln(x+10)$.

2. Résoudre dans **R** l'inéquation :
$\ln^2 x - \ln x - 6 > 0$.

3. Déterminer les limites éventuelles de la fonction ***f*** proposée en a :

1) $f(x) = \ln(9-x^2)$; a = 3 ;

2) $f(x) = \ln(1-\ln x)$; a = e ;

3) $f(x) = x - \ln x$; a = +∞ ;

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$; a = 0 ;

4. Déterminer la fonction dérivée de f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x\ln x$; 2) $f(x) = \ln x\,(e^x - 1)$;

3) $f(x) = \ln|x|$

5. a) Justifier le résultat du cours :
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

b) En déduire la limite de $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend vers +∞.

6. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$; En déduire :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

7. On pose pour tout n :
$S_n = \ln 2 + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{2} + \ldots + \ln\dfrac{n+1}{n}$.
Calculer S_1 ; S_2 ; S_3. Que vaut S_{2007} ?

8. Soit ***f*** la fonction définie sur **R** par :
$f(x) = \ln(1+e^x)$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de ***f*** aux bornes.
2. Etudier le sens de variation de ***f***.
3. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet en +∞ une asymptote notée Δ. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ et $\mathscr{C}$.
4. Tracer Δ et $\mathscr{C}$

9. Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de ***f***.
b) Déterminer les limites de aux bornes de D_f
c) Démontrer que ***f*** est strictement croissante.

10 1) Soit x un entier naturel non nul et n le nombre de chiffres de l'écriture décimal de x.
Justifier l'encadrement :

$$n - 1 \leq \text{Log}x \leq n$$

2) En déduire le nombre de chiffres d'écriture décimale de 2^{2003}.

11 Résoudre dans **R** l'équation :
$e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

12 Démontrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ est impaire.

13 Déterminer la limite éventuelle de ***f*** en a :

1) $f(x) = \sqrt{e^{3x}-1}$;a = 0 ; 2) $f(x) = \dfrac{e^x+3}{e^x+2}$; a = +∞

3) $f(x) = e^x\sin x$; a = -∞ ; 4) $f(x) = e^x - x$; a = +∞

14 1) Justifier le résultat du cours : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$,

2) En déduire : a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

15 Déterminer la dérivée de la fonction ***f*** proposée :

1) $f(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$; 2) $f(x) = x^3e^{-x}$;

3) $f(x) = e^{-x^2+x}$

16 Le but de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction exponentielle :

Préciser le signe de ***f*** .

3. Démontrer que pour tout réel x :
f (x) = x + ***f*** (-x).

On note ***f*** la fonction : $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x$.

1) Déterminer ***f*** ’et ***f*** ‘’.Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par ***f*** ; ***f*** ’ et ***f*** ‘’ ?

2) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
Signe de ***f*** ‘’	
Sens de ***f*** ’	
Signe de ***f*** ‘	
Sens de ***f***	
Signe de ***f***	

En déduire le résultat souhaité

3) Quel encadrement de $e^{-0,01}$ obtient-t-on ?

17 Résoudre dans **R** :
1) $3^{2x} = 2^{3x}$; 2) $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$

18 Dresser le tableau de variation et tracer l’allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ***f*** :

1) $f(x) = 2{,}3^x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2^x}$; 3) $f(x) = \frac{1}{3}e^{x\ln 3}$

Pour tout $x \le 0$; $1 + x \le e^x \le 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

19 m étant un nombre réel, on note f_m la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m\ln x$, et $\mathscr{C}_m$ sa courbe.

1.a) déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$

b) Suivant les valeurs de m déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x)$.

2.) Déterminer $f'_m(x)$; Donner suivant les valeurs de m les différents tableaux de variations.

3.) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point A.

4.) Tracer $\mathscr{C}_0$; $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_{-1}$ sur un même graphique.

20 Soit la fonction $f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x}$; $0 < x \le 1$; $f(0) = 0$.

A) Etude d’une fonction auxiliaire : Soit

$U(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x$; pour $0 < x \le 1$.

1) Etudier les variations de ***U***(x) et donner ***U***(1) et $\lim\limits_{x \to 0} U(x)$.

En déduire que ***U***(x) = 0 admet une solution β telle que 0 ,54 ≤ β ≤ 0,55

B) Etude de la fonction ***f*** et sa représentation

1) Montrer que ***f*** est continue en 0 ; Est-elle dérivable en 0 ?

2) Dresser le tableau de variation de ***f*** .

3) Construire la représentation graphique de ***f*** dans un repère orthonormal avec les tangentes aux points 0 et 1 (unité 10 cm sur (Ox) et 20cm sur (Oy)).

CHAPITRE 9

Suites numériques

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les suites

1) Définition d'une suite

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

En général, une suite numérique (U_n) est déterminé par l'un des procèdes suivants :

a) Une formule explicite permettant de calculer U_n en fonction de n.

Exemple

- $U : n \mapsto (-1)^n$, ou par exemple, encore la suite : $f : n \mapsto f(n)$; où f est une fonction usuelles ; ainsi pour la suite $U : n \mapsto \sin(n^2)$; on a $U_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x^2$; U est la restriction à $\mathbb{N}$ de cette fonction f.

b) Le premier terme et une formule de récurrence par exemple la suite définie par :

- $U_0 = 1$, et $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = 1 + (U_n)^2$.

Lorsque E désigne l'ensemble de définition d'une suite (U_n), on peut la noter $(U_n)\ n \in E$.

2) Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi, Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier n ;

Si P(0) est vraie et si pour tout entier naturel p, P(p) implique P(p+1), alors P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout naturel n se fait en deux étapes :

✓ On prouve qu'elle est vraie pour n = 0; (c'est dire au rang 0) ;

✓ On montre qu'elle est héréditaire, c'est –dire que si elle est vraie pour un naturel p quelconque, alors elle est vraie pour p + 1.

Exemple

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$, et pour tout naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 3$. Montrons par récurrence que pour tout naturel n, $U_n = 3 - 2^n$.

- **1^{ere} étape**

  Vérifions l'égalité au rang 0. On a : $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$; et $U_0 = 2$; donc $U_0 = 3 - 2^0$, d'où $U_n = 3 - 2^n$ est vraie pour n = 0.

- **2ème étape**

Soit p un naturel, supposons que l'égalité est vraie au rang p, c'est dire que l'on a : $U_p = 3 - 2^p$;

Par définition de U, on a : $U_{p+1} = 2U_p - 3$, donc il vient $U_{p+1} = 2(3 - 2^p) - 3 = 6 - 2^{p+1} - 3 = 3 - 2^{p+1}$,

Donc, $U_{p+1} = 3 - 2^{p+1}$. donc $U_n = 3 - 2^n$ est vraie pour n = p + 1.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure pour tout naturel n, $U_n = 3 - 2^n$.

3) Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Soit (Un) une suite définie sur $\mathbb{N}$

- (U_n) est majorée si et seulement s'il existe un réel M, tel que pour tout naturel n, $U_n \leq M$

  On dit que M est un majorant de (U_n).
- (U_n) est minorée si et seulement s'il existe un réel m, tel que pour tout naturel n, $U_n \geq m$.

  On dit que m est un minorant de (U_n).
- (U_n) est bornée si et seulement si, elle est à la fois majorée et minorée.

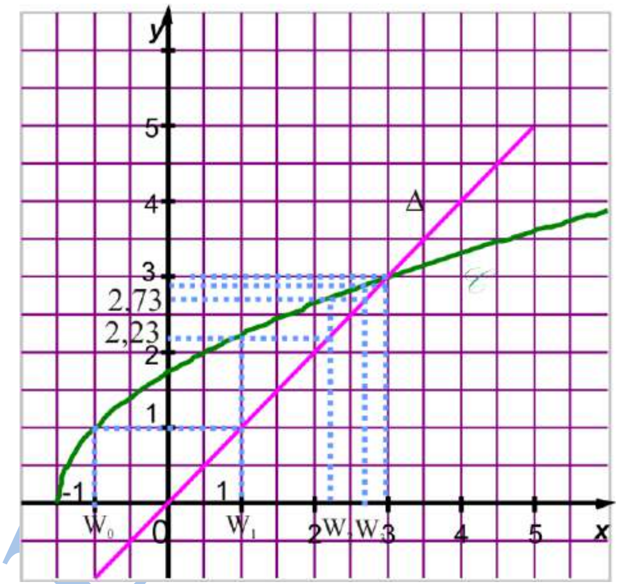
Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, la suite de terme général $U_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

  Donc, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $|U_n| \le \dfrac{1}{n^2}$, d'où $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $|U_n| \le 1$, donc $-1 \le U_n \le 1$.

  La suite (U_n) est majorée par 1 et minorée par -1, donc elle est bornée.
- Soit (W_n) la suite définie par $W_0 = -1$ et $\forall n\in\mathbf{N}$, $W_{n+1} = \sqrt{2W_n+3}$.

  La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{g}$: $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ et (Δ) est la droite d'équation $y = x$.



  On en déduit, une construction sur (OI) des premiers termes de la suite (W_n), ce qui permet de conjecturer que : $\forall n\in\mathbf{N}$, $-1 \le W_n \le 3$.
  Démontrons ce résultat, par récurrence.
  On a : $W_0 = -1$, donc $-1 \le W_0 \le 3$;
  donc $-1 \le W_n \le 3$ est vraie pour $n = 0$,
  Supposons qu'elle est vraie pour $n = k$, donc $-1 \le W_k \le 3$.
  La fonction $\boldsymbol{g}$: $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est croissante sur $[-1 ; 3]$., donc :
  $-1 \le W_k \le 3 \Rightarrow \boldsymbol{g}(-1) \le \boldsymbol{g}(W_k) \le \boldsymbol{g}(3) \Rightarrow$
  $1 \le W_{k+1} \le 3$.
  Donc, $-1 \le W_n \le 3$ est vraie pour $n = k + 1$,
  Donc, $\forall n\in\mathbf{N}$; $-1 \le W_n \le 3$; on en déduit que la suite est majorée par 3 et minorée par -1, donc la suite (W_n) est bornée.

Remarques

1. Certaines suites ne sont pas bornées, c'est le cas de la suite de terme général $U_n = n^2 - 1$ qui est minorée par -1, mais n'est pas majorée.
2. Pour déterminer qu'une suite (U_n) est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
- Etudier la fonction $\boldsymbol{f}$, lorsque la suite est du type $U_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

4) Sens de variation d'une suite

- Une suite (U_n) est croissante si et seulement si, pour tout n, $U_n \le U_{n+1}$
- Une suite (U_n) est décroissante si eut seulement si, pour tout n, $U_n \ge U_{n+1}$
- Une suite (U_n) est strictement croissante si et seulement si, que pour tout n, $U_n < U_{n+1}$
- Une suite (U_n) est strictement décroissante si et seulement si, pour tout n, $U_n > U_{n+1}$
- Une suite (U_n) est constante si et seulement s'il existe un réel k tel que : pour tout naturel n, $U_n = k$
- Une suite (U_n) est monotone si et seulement si c'est une suite croissante ou une suite décroissante.

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, la suite de terme général : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On a : $\forall n\in\mathbf{N}^*$;

  $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n+1}$, Or, $\forall n\in\mathbf{N}^*$; $\dfrac{1}{n+1} > 0$, donc, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$; $U_{n+1} > U_n$.

  On en déduit que la suite (Un) est strictement croissante.

- Soit $(V_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$, la suite de terme général : $V_n = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{2n-1}{2n}$;

  $V_{n+1} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n+1}{2n+2}$; La suite (V_n) est strictement positive et on a : $\forall n\in \mathbf{N}^*$;

  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$; Or $\forall n\in \mathbf{N}^*$; $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$, Donc, $\forall n\in \mathbf{N}^*$; $V_{n+1} < V_n$, on en déduit que la suite (V_n) est strictement décroissante.
- Soit (T_n), la suite définie par $T_0 = 0$ et $\forall n\in \mathbf{N}$, $T_{n+1} = e^{T_n}$.

  Démontrons par récurrence que cette suite est strictement croissante.

  On a : $T_1 = e^{T_0} = e^0 = 1$; d'où $T_1 > T_0$. Soit k un entier naturel, supposons que : $T_{k+1} > T_k$.

  La fonction $g : x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc $T_{k+1} > T_k \Rightarrow g(T_{k+1}) > g(T_k) \Rightarrow$ $e^{T_{k+1}} > e^{T_k} \Rightarrow T_{k+2} > T_{k+1}$ .Donc, $\forall n\in \mathbf{N}$, $T_{n+1} > T_n$; on en déduit que la suite (T_n) est strictement croissante.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (U_n) est monotone, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$
- Comparer à l'unité le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, lorsque la suite (U_n) est strictement positive.
- Etudier le sens de variation de la fonction f, lorsque la suite est du type $U_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence

5) Suites arithmétiques, Suites géométriques

On rappelle dans ce tableau ci-dessous les principaux résultats établis en classe de 6ième concernant les suites arithmétiques et géométriques.

	Suites arithmétiques	**Suites géométriques**
Premier terme	U_0	U_0
Raison	$r\ (r \in ℝ)$	$q\ (q \in ℝ)$
Formule de récurrence	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = q\,U_n$
Formule explicite	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_0q^n$ $U_n = U_pq^{n-p}$
Somme des n premiers termes $(U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1})$	$\frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$	$U_0\frac{1-q^n}{1-q}$; $(q \neq 1)$

On a en particulier,

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}(a \neq 1)$.

Exemple 1

U est une suite arithmétique de raison r, On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

Sachant que $U_0 = 2$, $r = 6$. Calculons U_{29} et S_{30}.

$U_{29} = U_0 + 29r = 2 + 29 \times 6 = 2 + 174 = 176$; $S_{30} = 30\frac{U_0 + U_{29}}{2} = 30\frac{2+176}{2} = 2670$.

Exemple 2

Calculons le 1er terme de la suite géométrique V de raison -3 telle que $V_4 = 81$.

$V_3 = \frac{V_4}{-3} = -27$; $V_2 = \frac{V_3}{-3} = \frac{-27}{-3} = 9$. ; $V_1 = \frac{V_2}{-3} = \frac{9}{-3} = -3$. $V_0 = \frac{V_1}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$.

Exemple 3

V est une suite géométrique de raison q. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$; ($n \in \mathbf{N}^*$).

- Sachant, que $V_0 = 2$; $q = 5$, Calculons V_3 et S_4.

$V_3 = V_0\,q^3 = 2 \times 5^3 = 250$; $S_4 = V_0\frac{1-q^4}{1-q} = 2\frac{1-5^4}{1-5} = 312$.

6) Suites périodiques
Définition
Dire qu'une suite U est périodique de période p, signifie que p est un naturel non nul tel que : pour tout naturel n : $U_{n+p} = U_n$.
Exemple
Soit U la suite (U_n) définie par : $U_{3n} = 2$ et $U_{3n+1} = -3$ et $U_{3n+2} = 7$. Cette suite U_n est périodique de période 3 ; $U_0 = 2$; $U_1 = -3$; $U_2 = 7$; $U_3 = 2$; $U_4 = -3$; $U_5 = 7$; $U_6 = 2$, …

II- Limite d'une suite
1) Suite convergente
Définition
- une suite est convergente si et seulement si, elle admet une limite finie réelle.
- une suite est divergente si et seulement si, elle n'est pas convergente (c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle n'admet pas de limite).

Remarque
On admet que si une suite admet une limite, cette limite est unique.
Exemples
- La suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ a pour limite 0, donc elle est convergente vers 0.
- Soit la suite U définie sur $\mathbf{N}$ par $U_n = \frac{1}{n!}$, pour tout entier naturel non nul n, on a : $n! \geq n > 0$, d'où $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, il résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.
- Soit la suite U définie par $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$. On a : $U_n - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}$; $n + 1 > n > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, d'où $0 < U_n - 2 < \frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.
- Soit la suite U définie sur $\mathbf{N}$ par $U_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
  Donc cette suite est divergente.
- La suite (U_n) de terme général $U_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ n'a pas de limite, elle est divergente.

2) Limite d'une suite du type $U_n = f(n)$
Nous admettons la propriété suivante :
Propriété
Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.
Si f a une limite en $+\infty$, alors (U_n) a une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemple 1
Etudions la limite de la suite U définie par $U_n = \frac{1-2n}{n+1}$. On considère la fonction :
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{1-2x}{x+1}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x} = -2$, Or, $U_n = f(n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2$.
La suite U converge vers -2.
Exemple 2
Soit la suite $W_n = \frac{2n^2+n-3}{5n+4}$, étudions la limite de W_n. On considère la fonction
$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{2x^2+x-3}{5x+4}$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{5} = +\infty$; Or $W_n = h(n)$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$. Donc la suite W diverge vers $+\infty$.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, n'a pas de limite en $+\infty$, cependant la suite (U_n) $n\in \mathbf{N}^*$ de terme général $U_n = \sin(\pi n)$ dont les termes sont nuls converge vers 0.

3) Limites et opérations sur les suites

On a déjà vu en classe de 6ème la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites.

Définitions

Soit $(U_n)_{n\in E}$ et $(V_n)_{n\in E}$ deux suites. E l'ensemble de définition des suites (U_n) et (V_n).

- La somme de U_n) et (V_n) est la suite de terme général $U_n + V_n$.
- Le produit de (U_n) et (V_n) est la suite de terme général $U_n V_n$.
- Le quotient de (U_n) et (V_n) est la suite de terme général $\frac{U_n}{V_n}$ (si pour tout élément n de E, on a $V_n \neq 0$).

Exemple

- Calculons la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ de terme général : $U_n = e^{-n} + \frac{2n-3}{n+1}$.

  $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n} = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ de terme général : $V_n = (n-1)(1 - \cos\frac{1}{n})$.

  On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\cos\frac{1}{n}) = 0$; On ne peut donc conclure directement.

  On remarque que : $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$, $V_n = \frac{n-1}{n} n(1-\cos\frac{1}{n})$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$, $V_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$, or

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

4) Croissances comparées des suites (a^n) , (n^α) et $\ln$

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites. On en déduit le tableau suivant :

Suites	Conditions	Limites
Suites géométriques (ou exponentielles) $(a^n)_{n\in \mathbf{N}^*}$;$a \in \mathbf{R}$	$a \leq -1$ $-1 < a < 1$ $a = 1$ $a > 1$	Pas de limite 0 1 $+\infty$
Suites puissances $(n^\alpha)_{n\in \mathbf{N}^*}$, $\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$	0 1 $+\infty$
Suites logarithmes $(\ln n)_{n\in \mathbf{N}^*}$,		$+\infty$

De même, les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de type (a^n) , (n^α) et $\ln n$.

5) Propriétés

1) Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$

2) Si $a > 1$, et $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0$,

3) Si, $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = +\infty$

Exemples

- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{2}} = 0$.
- Calculons la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de terme général : $U_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

$$U_n = \frac{3^n(1-\frac{2^n}{3^n})}{3^n(1+\frac{2^n}{3^n})} = \frac{1-(\frac{2^n}{3^n})}{1+(\frac{2^n}{3^n})} = \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{2}{3})^n}, \text{ or } \lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n = 0, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de terme général $V_n = n^3 - 2^{n+2}$.

  On a, $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $V_n = 2^n(\frac{n^3}{2^n} - 2^2) = 2^n(\frac{n^3}{2^n} - 4)$,

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n^3}{2^n} - 4) = -4$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

6) Suites et inégalités

- Si une suite (U_n) convergente est minorée par un réel m, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq m$.
- Si une suite (U_n) convergente est majorée par un réel M, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq M$.
- Si (U_n) et (V_n) sont des suites convergentes telles que : pour tout entier naturel n, $U_n \leq V_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Théorème des gendarmes

Si (U_n), (V_n) et (W_n) sont des suites telles que : pour tout entier naturel n, $V_n \leq U_n \leq W_n$, et si (V_n) et (W_n) convergent vers un même réel ℓ, alors (U_n) est convergente et admet pour limite ℓ.

Exemples

Etudions la convergence de la suite W définie par : $W_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$.

Soit n un nombre entier naturel non nul, On a : $\frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$. Donc, la suite (W_n) converge vers 1.

7) Image d'une suite par une fonction

On admet la propriété suivante : a et b désignent chacun un réel.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si (U_n) est une suite d'éléments de I telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = b$.

Exemples

- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ de terme général $V_n = (1+\frac{1}{n})^n$,

On a : $(1+\frac{1}{n})^n = e^{\ln(1+\frac{1}{n})^n}$, Or $\ln(1+\frac{1}{n})^n = n\ln(1+\frac{1}{n})$, donc $(1+\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$,

donc $V_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. Posons $U_n = n\ln(1+\frac{1}{n})$ et $f : x \mapsto e^x$. On a : $V_n = f(U_n)$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$; Or $n\ln(1+\frac{1}{n}) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$;

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = e$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = e$, donc,

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = e$.

8) Théorème de la convergence monotone

On admet les propriétés suivantes :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

Exemple 1

Soit la suite V définie par $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = \sqrt{2+V_n} \end{cases}$.

Etudions la convergence de cette suite.

Démontrons par récurrence que pour tout n élément de $\mathbf{N}$ on a : $V_n \leq 2$.

- On a : $V_0 = -1$; $V_0 \leq 2$. Supposons que pour un élément p de $\mathbf{N}$ on a : $V_p \leq 2$.
  D'où $2 + V_p \leq 2 + 2$, donc $2 + V_p \leq 4$, d'où $\sqrt{2+V_p} \leq \sqrt{4}$; donc $\sqrt{2+V_p} \leq 2$, d'où $V_{p+1} \leq 2$.

  Par conséquent, on a pour tout élément n de $\mathbf{N}$, $V_n \leq 2$.
- Démontrons par récurrence que V est croissante.

$V_1 = \sqrt{2+V_0} = \sqrt{2+(-1)} = \sqrt{1} = 1$; $V_1 - V_0 = 1 - (-1) = 2 > 0$. Supposons que : pour un élément p de $\mathbf{N}$, $V_{p+1} - V_p > 0$,

Donc, $V_{p+2} - V_{p+1} = \sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p} = \dfrac{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p}\right)\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}$

Donc $V_{p+2} - V_{p+1} = \dfrac{2+V_{p+1} - (2+V_p)}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)} = \dfrac{V_{p+1} - V_p}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}$, or $V_{p+1} - V_p > 0$, et $\sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p} > 0$, donc $\dfrac{V_{p+1} - V_p}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)} > 0$; d'où $V_{p+2} - V_{p+1} > 0$.

Par conséquent, pour tout n élément de $\mathbf{N}$, $V_{n+1} > V_n$, la suite V est donc croissante.

Conclusion

V étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

Exemple 2

Soit la suite W définie par $\begin{cases} W_0 = 12 \\ W_{n+1} = 0,25W_n + 3 \end{cases}$

Etudions la convergence de cette suite.
Démontrons par récurrence que pour tout n élément de **N** on a : $W_n \geq 4$.

- On a : $W_0 = 12 \Rightarrow W_0 \geq 4$. Supposons que pour tout élément p de **N** , $W_p \geq 4$.
  $W_{p+1} = 0,25\ W_p + 3$ comme $W_p \geq 4 \Rightarrow 0,25\ W_p \geq 0,25 \times 4 \Rightarrow 0,25\ W_p \geq 1 \Rightarrow$
  $0,25\ W_p + 3 > 1 + 3 \Rightarrow 0,25\ W_p + 3 > 4 \Rightarrow W_{p+1} \geq 4$.
  Par conséquent, pour tout n élément de **N** , $W_n \geq 4$.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $W_{n+1} - W_n = 0,25W_n + 3 - W_n = \frac{1}{4}W_n - W_n + 3 = \frac{-3}{4} W_n + 3 = 3(1 - \frac{1}{4} W_n)$
  $= \frac{3}{4}(4 - W_n)$

On a démontré que $\forall\ n \in \mathbf{N}$; $W_n \geq 4$, donc $4 - W_n \leq 0$, d'où $\frac{3}{4}(4 - W_n) \leq 0$; donc $W_{n+1} \leq W_n$;

La suite (W_n) est donc décroissante.
Conclusion (W_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

III- Complément sur les suites

1) Suites définies par récurrence

On admet la propriété suivante :
f est une fonction continue sur un intervalle K, U une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$. Si U est convergente, alors sa limite est une solution α de l'équation $f(x) = x$.
On dit que x est un point fixe de la fonction ***f***.
Cette propriété ne permet pas de démontrer qu'une suite est convergente, mais de calculer la limite d'une suite, sachant qu'elle est convergente.
Cette propriété est une implication, sa contraposée donne la remarque suivante :

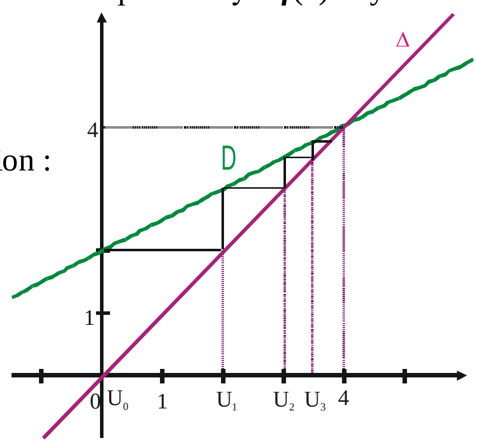
Remarque

f est une fonction continue sur un intervalle K, U une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$; si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solutions dans K, alors la suite U est divergente.

Exemple 1

Soit la fonction ***f*** : $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$, (D) et ($\Delta$) les droites d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = x$.

Ces droites se coupent au point d'abscisse 4.
La construction sur (OI) des premiers termes de la suite (U_n) permet de conjecturer que cette suite est croissante et converge vers 4. L'équation $f(x) = x$ a une solution : 4, donc si la suite (U_n) est convergente,elle converge vers 4.



- Démontrons que la suite (U_n) est convergente ;

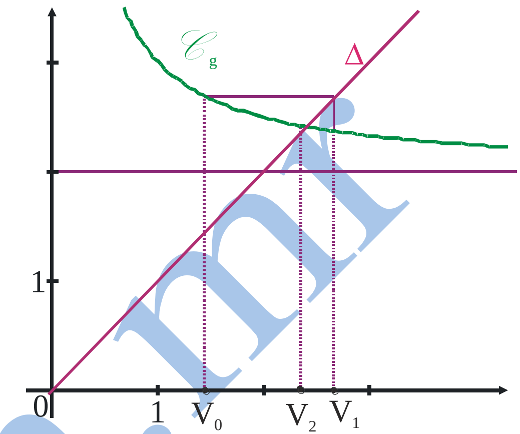
  On a : $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}U_n + 2 - 4$
  $= \frac{1}{2}U_n - 2 = \frac{1}{2}(U_n - 4)$,

On en déduit que : $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_n - 4 = \frac{1}{2^n}(U_0 - 4)$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc la suite (U_n) converge vers 4.

Exemple 2

Etudions la limite de la suite (V_n) définie par $V_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$; $V_{n+1} = 2 + \frac{1}{V_n}$.

- ✓ Soit la fonction $\boldsymbol{g} : \mapsto 2 + \frac{1}{x}$; ($\mathscr{C}_g$) sa courbe représentative et (Δ) la droite d'équation $y = x$.
- ✓ La construction sur (OI) des premiers termes de la suite (V_n) permet de conjecturer que cette suite est convergente.



- L'équation $\boldsymbol{g}(x) = x$ a deux solutions $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.
- Démontrons que : $\forall n \in \mathbf{N}$; $V_n \geq \sqrt{2}$.

On a : $V_0 = \sqrt{2}$; $\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$; supposons que : $V_k \geq \sqrt{2}$.

$V_{k+1} = 2 + \frac{1}{V_k}$; $V_k \geq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{V_k} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$2 < 2 + \frac{1}{V_k} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{k+1} > 2 \Rightarrow V_{k+1} \geq \sqrt{2}$.

Donc, $\forall n \in \mathbf{N}$, $V_n \geq \sqrt{2}$. La suite (V_n) est positive, d'où si la suite (V_n) est convergente, elle converge vers $1 + \sqrt{2}$. Démontrons que la suite V_n est convergente.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\boldsymbol{g}$ sur l'intervalle $[\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$.

On a : $\boldsymbol{g}'(x) = \frac{-1}{x^2}$, donc $\forall x \in [\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$, $|\boldsymbol{g}'(x)| = \frac{1}{x^2}$.

$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$; donc $\forall x \in [\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$, $|\boldsymbol{g}'(x)| \leq \frac{1}{2}$, on obtient ; $\forall n \in \mathbf{N}$,

$|\boldsymbol{g}(V_n) - \boldsymbol{g}(1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |V_n - (1 + \sqrt{2})|$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbf{N}$,

$|V_{n+1} - (1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |V_n - (1 + \sqrt{2})|$, on en déduit que :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $|V_n - (1 + \sqrt{2})| \leq (\frac{1}{2})^n |V_0 - (1 + \sqrt{2})| \Leftrightarrow |V_n - (1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2^n}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left|V_n - (1 + \sqrt{2})\right| = 0$; d'où $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 1 + \sqrt{2}$ .Donc, la suite (V_n) converge vers $1 + \sqrt{2}$.

Exemple 3

Etudions la convergence de la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{Un} \end{cases}$.

- ✓ Considérons la fonction $\boldsymbol{g} : x \mapsto x + \frac{1}{x}$, on a : $U_{n+1} = \boldsymbol{g}(U_n)$.
- ✓ Résolution de l'équation $\boldsymbol{g}(x) = x$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} = x$; c'est-à-dire $\frac{1}{x} = 0$, cette équation n'admet pas de solution, donc la suite U est divergente.

2) Suites adjacentes

Définition

Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(V_n - U_n) = 0$.

3) Théorème des suites adjacentes

Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

De plus, si (U_n) est croissante, (V_n) décroissante, alors en notant ℓ leur limite commune : pour tout entier naturel n, $U_0 \le U_n \le \ell \le V_n \le V_0$ et ℓ est l'unique réel tel que pour tout entier naturel n,
$U_n \le \ell \le V_n$.

Exemple

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbf{N}$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$; $V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Par définition de (U_n) on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)!}$, donc $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!}$, d'où $U_{n+1} - U_n > 0$,

Donc, $U_{n+1} > U_n$, ce qui implique que la suite (U_n) est strictement croissante.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $V_n - U_n = \frac{1}{nn!}$, ce qui met en évidence que la suite $(V_n - U_n)$ converge vers 0.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}) - (U_n + \frac{1}{nn!})$,

$$= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!},$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!},$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{nn!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 n!} = \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2 n!}$$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)^2 n!} \Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0 \Rightarrow V_{n+1} < V_n$.

Ce qui prouve que la suite (V_n) est strictement décroissante.

En résumé, (Un) est croissante, (V_n) est décroissante et $(V_n - U_n)$ converge vers 0, ce qui permet de conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

(U_n) est la suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{(U_n)^2+1}}$, exprimer son terme général en fonction de n.(On pourra s'aider du calcul des premiers termes).

Solution

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{(U_n)^2+1}}$, après calcul on obtient, $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $U_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$,Ce qui nous invite à démontrer par récurrence que pour tout naturel n $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

La propriété est vraie pour n = 0, car $U_0 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$.

Supposons la propriété vraie pour un naturel p, $U_p = \dfrac{1}{\sqrt{p+1}}$ et démontrons la pour p+ 1.

$$\text{On a : } U_{p+1} = \frac{U_p}{\sqrt{U_p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{p+1}})^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p+1}+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)\times(\frac{1}{p+1}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{p+1}{p+1}+p+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+(p+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(p+1)+1}},$$

D'après le principe de récurrence, nous avons démontré : pour tout naturel n : $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice. 2

Donner un majorant et un minorant de la suite définie par son terme général U_n.

1) $U_n = -\dfrac{1}{n+1}$; 2) $U_n = \sin n$.

Solution

1) $U_n = -\dfrac{1}{n+1}$; la suite est définie sur **N** pour tout naturel n, on a : $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $-1 \leq -\dfrac{1}{n+1} < 0$,

Donc, $-1 \leq U_n < 0$. On en déduit que -1 est un minorant de la suite U et que 0 est un majorant.

2) Un = sinn , la suite U est définie sur **N** pour tout naturel n, on a : $-1 \leq U_n \leq 1$, on peut alors affirmer que la suite U est bornée par -1 et 1.

Exercice. 3

Etudier le sens de variation de la suite :U : $n \mapsto \dfrac{3n+5}{n+1}$.

Solution

La suite est défins sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel n,

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{3(n+1)+5}{(n+1)+1} - \dfrac{3n+5}{n+1} = \dfrac{3n+8}{n+2} - \dfrac{3n+5}{n+1} = \dfrac{(3n+8)(n+1)-(3n+5)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{-2}{(n+2)(n+1)}$

D'où $U_{n+1} - U_n < 0$, donc U est strictement décroissante.

Exercice. 4

Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite U.

1)$U : n \mapsto \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3}$; 2)$U : n \mapsto \dfrac{3n^2+2n+1}{5n-3}$

Solution

1)$U : n \mapsto \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3}$; cette suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ et pour tout naturel n : $-1 \leq \cos\dfrac{n\pi}{3} \leq 1$;

Donc si de plus, $n \neq 0$; $\dfrac{1}{n}\times(-1) \leq \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3} \leq \dfrac{1}{n}\times 1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{1}{n}U_n \leq \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n} = 0$. On en déduit que U converge vers 0.

2)$U : n \mapsto \dfrac{3n^2+2n+1}{5n-3}$; cette suite est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout naturel n,

$U_n = \dfrac{3n^2+2n+1}{5n-3} = \dfrac{3n^2(1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2})}{5n(1-\frac{3}{5n})} = \dfrac{3n}{5}\dfrac{(1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2})}{(1-\frac{3}{5n})}$;

Lorsque $n\to+\infty$; les suites $\dfrac{2}{3n}$; $\dfrac{1}{3n^2}$; $\dfrac{-3}{5n}$ ont pour limites 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{5}n = +\infty$.

D'où la suite U diverge vers $+\infty$

Exercice. 5

U est la suite définie par son premier terme U_0 et pour tout naturel n, $U_{n+1} = 2U_n e^{-U_n}$.

On suppose que la suite U converge vers un réel ℓ .

Soit f la fonction $x \mapsto 2xe^{-x}$.

1) Justifier que la suite : $n \mapsto f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$.

2) En utilisant le fait que (U_n) et (U_{n+1}) ont la même limite, déterminer les valeurs possibles du réel ℓ.

Solution

1) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$. De plus la fonction f : $x \mapsto 2xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en ℓ , donc $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$. Il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l)$, c'est –dire que la suite : $n \mapsto f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$.

2) la suite (U_{n+1}) qui est égale à la suite $n \mapsto f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$; puisque les suites (Un+1) et (Un) ont la même limite ℓ ; il vient $f(\ell) = \ell$, c'est –dire $2\ell e^{-\ell} = \ell$ soit $2\ell e^{-\ell} - \ell = 0$, soit

$\ell\,(2\,e^{-\ell} - 1) = 0$ soit $\ell = 0$ ou $2\,e^{-\ell} - 1 = 0$; $2\,e^{-\ell} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\ell} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{e^{\ell}} = 1 \Leftrightarrow 2 = e^{\ell}$

$\Leftrightarrow \ell = \ln 2.$

Finalement les valeurs possibles du réel ℓ sont 0 et $\ln 2$.

Exercice. 7

On définit les suites U et V par $U_0 = 1$; $V_0 = 2$, et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$,

$V_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5}$.

1) On pose W = V – U, démontrer que la suite est géométrique. Préciser la limite de W et exprimer W_n en fonction n.
2) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de W_n. En déduire le sens de variation des suites U et V.
3) Justifier que U et V sont convergentes et ont la même limite qui sera notée ℓ..
4) On pose T = 3U + 10V. Démontrer que la suite T est constante. En déduire la valeur de ℓ..

Solution

1) Pour tout entier naturel n,

$$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} - \frac{U_n + 2V_n}{3}$$

$$= \frac{3U_n + 12V_n - 5U_n - 10V_n}{15} = \frac{-2U_n + 2V_n}{15} = \frac{2}{15}(V_n - U_n).$$

Donc, $W_{n+1} = \dfrac{2}{15}W_n$. d'où W est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$. Comme : $\left|\dfrac{2}{15}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to} W_n = 0$. De plus, $W_n = W_0\left(\dfrac{2}{15}\right)^n = (V_0 - U_0)\left(\dfrac{2}{15}\right)^n = (2 - 1)\left(\dfrac{2}{15}\right)^n = \left(\dfrac{2}{15}\right)^n$

2) Pour tout entier naturel n,

- $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \dfrac{U_n + 2V_n - 3U_n}{3} = \dfrac{2V_n - 2U_n}{3} = \dfrac{2}{3}(V_n - U_n) = \dfrac{2}{3}W_n$
- $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} - V_n = \dfrac{U_n + 4V_n - 5V_n}{5} = \dfrac{U_n - V_n}{5} = -\dfrac{1}{5}(V_n - U_n) = -\dfrac{1}{5}W_n$

D'après la question 1), la suite W est à termes strictement positifs, on en déduit on en déduit que : (U_n) est strictement croissante et (V_n) est strictement décroissante.

3) D'après les deux questions précédentes, la suite U est croissante et le suite V est divergente, alors le suite V – U a pour limite 0, on en déduit que U et V sont adjacentes.

Ce qui explique que les suites U et V sont convergentes et ait la même limite ℓ.

4) $T_{n+1} = 3U_{n+1} + 10V_{n+1} = 3 \times \dfrac{U_n + 2V_n}{3} + 10\dfrac{U_n + 4V_n}{5} = U_n + 2V_n + 2U_n + 8V_n = 3\,U_n + 10\,V_n = T_n$.

Donc, (T_n) est une suite constante. On en déduit , en particulier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T_0 = 3U_0 + 10V_0 = 23$, d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 3\,\ell + 10\,\ell = 13\,\ell$.. Donc, ℓ vérifie $13\,\ell. = 23$ d'où $\ell = \dfrac{23}{13}$.

Exercice. 8

Soit (Un) la suite définie par $U_0 = 5$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbf{N}$, $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

2 .a) Justifier que la suite (U_n) est convergente et que sa limite, notée ℓ , est supérieure ou égale à 2.

b) Démontrer que ℓ vérifie : $\ell = \sqrt{2+\ell}$, en déduire la valeur de ℓ.

Solution

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbf{N}$, $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

1) $U_0 = 5$ et $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$; donc $2 \leq U_1 \leq U_0$. La propriété demandée est vérifiée pour n = 0.

Soit p un entier naturel quelconque : si $2 \leq U_{p+1} \leq U_p$, alors $4 \leq 2 + U_{p+1} \leq 2 + U_p \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{2+U_{p+1}} \leq \sqrt{2+U_p} \Rightarrow 2 \leq U_{p+2} \leq U_{p+1}$.

Donc, la propriété est héréditaire, d'après le principe de récurrence, on peut affirmer que pour tout n de $\mathbf{N}$; $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

2.a) D'après la question 1) (U_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente, sa limite ℓ vérifie

$\ell \geq 2$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2+\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2+\ell \Leftrightarrow (\ell + 1)(\ell - 2) = 0$,

d'où $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Or $\ell \geq 2$, donc $\ell = 2$

B. Exercices

1. On considère la suite U définie sur **N** par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{9}{6-U_n}$.

Démontrer par récurrence que : pour tout n élément de **N**, $U_n < 3$.

2. Déterminer que pour tout naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. Dans chacun des cas suivants, étudier si la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est majorée, minorée.

a) $U_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$; b) $U_n = n(\dfrac{1}{2}+(-)^n)$.

c) $U_n = \dfrac{2+\sin n}{3-\cos n}$; d) $U_n = n\cos^2(\dfrac{n\pi}{4})$

4. Déterminer un majorant et un minorant de la suite U : $n \mapsto \dfrac{-3+e^{-n}}{2+\sin n}$.

5. U est la suite définie sur **N** par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n - 1$. Montrer que U est bornée par -2 et 1.

6. Démontrer que les suites suivantes sont bornées

a) $U_n = \dfrac{2n-3}{5n-2}$; b) $U_n = \ln(n+1) - \ln n$

c) $U_n = \sqrt{n^2+2} - n$; d) $U_n = \dfrac{2n+\cos n}{n^2}$

7. On considère la suite définie par :

$$x_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$$

Calculer les cinq premiers termes. Etudier le sens de variation de cette suite.

9 U est la suite définie sur **N** par :

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

Montrer que l'on a pour tout n de **N**, $1 \le U_n < 2$.

Etudier le sens de variation de la suite U.

10 Soit la suite (U_n) définie par :

$U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = 2U_n - 4$.

Conjecturer à l'aide d'une représentation graphique le sens de variation de la suite (U_n).

Démontrer cette conjecture.

Même question pour la suite (V_n) définie par

$V_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $V_{n+1} = \dfrac{2+3V_n}{2+V_n}$.

11 On sait que les suites U, V, W définies ci-dessous sont convergentes. Calculer leur limite.

U) $\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = U_n(1+U_n) \end{cases}$; V) $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = \sqrt{2+V_n} \end{cases}$;

W) $\begin{cases} W_0 = 12 \\ W_{n+1} = 0,25(1+W_n) \end{cases}$

12 Dans chacun des cas suivants préciser la on *f* telle que : $U_n = f(n)$, puis déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$.

a) $U_n = n - \dfrac{1}{n+1}$; b) $U_n = \dfrac{3n^2-1}{(2n+1)^2}$

c) $U_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$; d) $U_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+\sqrt{n}}$

13 $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Etudier la convergence de la suite (U_n) et de la suite V_n de terme général :

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} U_p \; .$$

14 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$.

8.

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$.

a) $U_n = \dfrac{n}{n+1}$; b) $U_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$

c) $U_n = \dfrac{e^n}{n!}$; d) $U_n = n - \ln(1+n)$

15 Dans chacun des cas suivants, utiliser les propriétés de comparaison pour étudier la limite de la suite $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$.

a) $U_n = \text{con} - n$; b) $U_n = n + (-1)^n \cos n$

c) $U_n = \ln n + (-1)^n$; d) $U_n = (-)^n - 3^n$

e) $U_n = \dfrac{\sin n^3}{1+n}$; f) $U_n = 1 + \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$

g) $U_n = \dfrac{n(1-\cos n)}{n^2+1}$; h) $U_n = (\dfrac{3}{4})^n \sin n$

16 Soit $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et $\forall\, n\in \mathbf{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n^2+2}$.

a) Démontrer que: $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $U_{n+1} < \dfrac{U_n}{2}$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

17 Soit a un nombre réel tel que : $0 \le a \le 1$ et (U_n) la suite définie par $U_0 = a$ et $\forall\, n\in \mathbf{N}$,

$U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$.

A) Conjecturer graphiquement la limite de cette suite.

B) On pose $U_0 = \cos\alpha$ ($\alpha \in [0 ; \dfrac{\pi}{2}]$).

a) Démontrer que : $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $U_n = \cos(\dfrac{\alpha}{2^n})$,

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

18 Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies dans $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} 0 < U_0 < V_0 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que les suites (U_n) et (V_n) sont strictement positives.

2. a) calculer $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$ et en déduire que : $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $U_n \le V_n$.

a) $U_n = 5(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^n$; b) $U_n = 7(-0,75)^{n+1}$

c) $U_n = 25 + (\dfrac{\pi}{3})^{2n}$; d) $U_n = 25 - (\dfrac{3}{\pi})^n$

e) $U_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; f) $U_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

19 Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \dfrac{U_n+2}{2U_n+1}$.

1. a) Justifier que pour tout n de $\mathbf{N}$; U_n est strictement positif.

b) si la suite (Un) converge, quelle est sa limite ?

2.) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction

$f : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ et la droite d'équation $y = x$

(on se limitera au cadrage : $0 \le x \le 2,2$ et $0 \le y \le 1,5$)

Visualiser graphiquement U_1 ; U_2 ; U_3 ; et U_4.

Que peut-on conjecturer au sujet de la convergence de la suite ?

3.) Pour démontrer la conjecture, on considère la suite (V_n) définie pour tout n de $\mathbf{N}$, $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+1}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

Quelle est sa limite ? Exprimer V_n en fonction de n.

b) Exprimer U_n en fonction de V_n. En déduire la limite de (U_n). Enfin, exprimer U_n en fonction de n.

20 On considère la suite U définie sur par $U_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = U_n^2 - Un + 3$.

1) Démontrer que la suite U est croissante.

2. a) On suppose dans cette question que la suite U converge vers un réel l. Donner alors, une équation du second degré vérifiée par l.

b) En déduire que la suite U est divergente.

b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

c) Démontrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbf{N}$,

$0 \leq V_n - U_n \leq (\frac{1}{2})^n (V_0 - U_0)$

En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$.

CHAPITRE 10

Calcul intégral

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Notion d'intégrale

a et b sont deux réels d'un intervalle I et f une fonction continue sur I
L'intégrale de a à b de la fonction f est le réel F(b) – F(a), où F est une primitive quelconque de f sur I.

Définition
a et b sont deux réels d'un intervalle I et f une fonction continue sur I..

Notation

L'intégrale de a à b de la fonction f se note $\int_a^b f(t)dt$ et se lit : ''somme de a à b de f(t)dt ''

Dans cette écriture, la lettre t est une variable muette qui peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, hormis a, b et f, déjà choisies pour désigner des objets précis.

On peut écrire : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \dots$

On écrit souvent le réel F(b) – F(a) sous la forme condensée : $[\mathbf{F}(t)]_a^b$, et on écrit

$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

Exemple

$\int_0^{\pi} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$.

II. Intégrale et primitive

Théorème
F est une fonction continue sur un intervalle I.
La primitive de f qui s'annuelle en un point a de I est la fonction G définie sur I par :

G(x) = $\int_a^x f(t)dt$.

Exemple

La fonction $\ln$ est sur]0 ; +∞ [la primitive, nulle en 1, de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, donc pour tout réel

$x > 0$; $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

A retenir

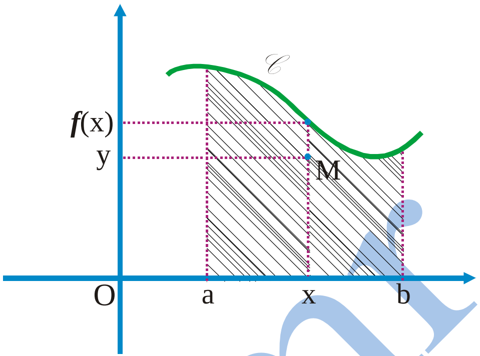
La dérivée sur I de la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la fonction $g : x \mapsto f(x)$; donc

G'(x) = f(x).

III. Aires et Intégrales

Théorème

f est une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ; b], $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de ***f*** dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$. Alors, l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = a et x = b est $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt$



Remarque

Le domaine D peut aussi être décrit comme :

l'ensemble des points M(x ; y) avec

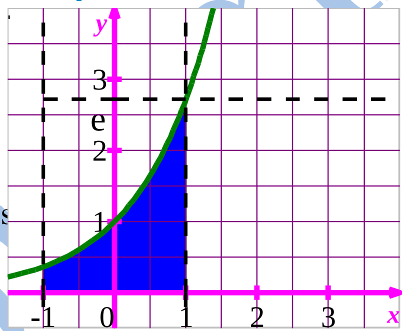
$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le \boldsymbol{f}(x) \end{cases}$$

Exemple

f(x) = e^x, $\mathscr{C}_{\boldsymbol{f}}$ est la représentation graphique de ***f*** dans un repère orthogonal.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathscr{C}_{\boldsymbol{f}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = -1 et x = 1.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(t)dt = \int_{-1}^{1} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} \simeq \text{ 2,35 unités d'aires}$$



IV. Propriétés de l'intégrale

1) Linéarité

Théorème

Soient ***f*** et ***g*** deux fonctions continues sur un intervalle I.

a et b deux réels de I, et α et β deux réels quelconques, alors ;

$$\int_a^b (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g})(t)dt = \alpha\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt + \beta\int_a^b \boldsymbol{g}(t)dt .$$

Exemple

$$\int_0^{\pi} (2\sin t - 3t)dt = 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt - 3\int_0^{\pi} t\,dt = 2\left[-\cos t\right]_0^{\pi} - 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = 4 - 3\frac{\pi^2}{2}$$

2) Relation de Chasles

Théorème

f est une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a ; b ; c de I, on a :

$$\int_a^c \boldsymbol{f}(t)dt = \int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt + \int_b^c \boldsymbol{f}(t)dt .$$

En posant a = b = c dans le théorème précédent on obtient : $\int_a^a \boldsymbol{f}(t)dt = 0$.

En utilisant ce théorème avec : a = c , on obtient : $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = -\int_b^a \boldsymbol{f}(t)dt$.

3) Comparaison d'intégrales

Théorème

f est une fonction continue sur un intervalle I. a et b sont deux réels de I avec a ≤ b :

Si ***f*** est positive sur I, alors $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt \ge 0$.

Remarque

si ***f*** est négative sur I, alors $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt \le 0$.

Conséquences

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I, avec $a \le b$ et

Si $f \le g$ sur I alors, $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

4) Intégrales et valeur absolue

Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a ; b] On a : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

5) Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b appartiennent à I (a < b).
Si, sur l'intervalle [a ; b], on a : $m \le f \le M$, alors :

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

6) Valeur moyenne

Définition

f est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], avec a < b.

la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

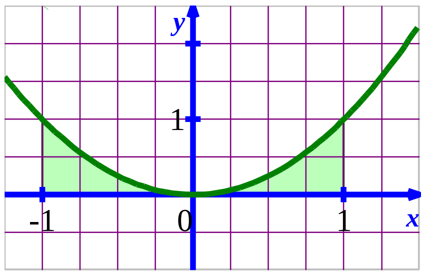
V. Propriétés des intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques

1) Si f est une fonction continue et paire sur un intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$

Exemple

$$\int_{-1}^{1} t^2dt = 2\int_0^1 t^2dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

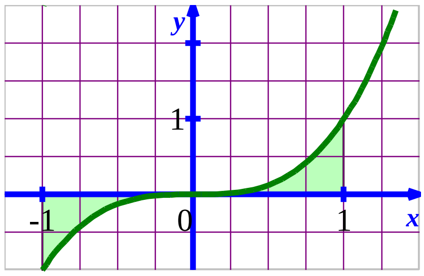


2) Si f est une fonction continue et impaire sur un intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Exemple

$$\int_{-1}^{1} t^3dt = 0 \quad ; \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0$$

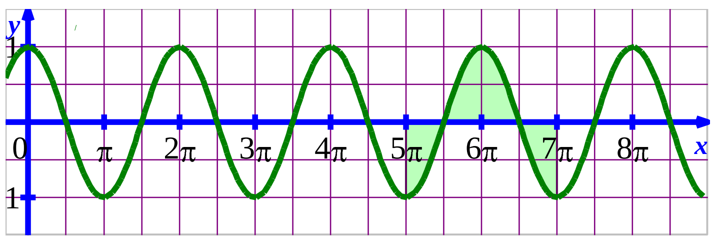


c) Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et de période T, alors, pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Exemple

$$\int_{5\pi}^{7\pi} \cos t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0.$$



6. Calculs d'intégrales

1) Utilisation de primitives

La connaissance d'une primitive F de la fonction f sur [a ; b] permet la calcul de $\int_a^b f(t)dt$;

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (D'après la définition de l'intégrale).

Exemple

Calculons l'intégrale J = $\int_0^2 (x\sqrt{x^2+3})\,dt$.

On remarque que la fonction h définie par h(x) = $x\sqrt{x^2+3}$, peut s'écrire : h (x) = $\frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} f'$, une primitive de $f^{\frac{1}{2}} f'$ est $\frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}}$; donc une primitive H de h sur **R** est

H(x) = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}$; D'où :

J = H(2) – H(0) = $\frac{7}{3}\sqrt{7} - \sqrt{3}$.

2) Changement de variable

λ et μ sont deux nombres réels, $\lambda \neq 0$.

Soit f une fonction continue sur I. a et b deux réels tels que : $\lambda a + \mu \in I$ et $\lambda b + \mu \in I$, calculons $\int_a^b f(\lambda x + \mu)dx$, connaissant une primitive F de f.

Puisque f a pour primitive F, alors $x \mapsto F(\lambda x + \mu)$ a pour dérivée $x \mapsto \lambda f(\lambda x + \mu)$.

Donc, $x \mapsto f(\lambda x + \mu)$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \mu)$, ce qui donne le résultat cherché :

$$\int_a^b f(\lambda x + \mu)dx = \frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda x + \mu)\right]_a^b = \frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda b + \mu) - F(\lambda a + \mu)\right].$$

Exemple

Soit à calculer $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur]0 ; +∞[; (2 × 1 + 1)∈]0 ; +∞[; (2 × 2 + 1)∈]0 ; +∞[.

Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{x}$, alors $x \mapsto \frac{-1}{2x+1}$ a pour dérivée $x \mapsto 2 \times \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2x+1}$; donc

$$\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{2} \times \frac{1}{2x+1}\right]_1^2 = \frac{-1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1}{15}.$$

3) Intégration par parties

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I, si les fonctions dérivées f 'et g' sont continue sur I, alors, pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple

Calculer I = $\int_0^{\pi} x\sin x dx$ et J = $\int_1^2 x\ln x dx$.

Calcul de $I = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

Posons : $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin x$
Donc ; $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x$

D'où $I = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx$

$= \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$= \pi$

Calcul de $J = \int_1^2 x\ln x\,dx$: Posons : $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = x$. Donc ; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$

D'où $J = \int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \dfrac{x}{2}dx$

$= \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

VII. Approximation d'une intégrale : Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$, celui-ci est subdivisé en n intervalles $[a_i ; a_{i+1}]$ de longueur égale ($\dfrac{b-a}{n}$), avec $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ $(a_0 = a ; a_n = b)$.

Théorème

Soit f une fonction continue monotone sur $[a ; b]$,

- Si f est croissante, alors $\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right) \le \int_a^b f(t)dt \le \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$;
- Si f est décroissante, alors
$\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right) \le \int_a^b f(t)dt \le \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$;

✓ Les expressions $A_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $B_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)$ sont deux valeurs approchées de $\int_a^b f(t)dt$ à $|B_n - A_n|$ près, c'est dire à $\dfrac{b-a}{n}\times|f(b) - f(a)|$ près.

Exemple

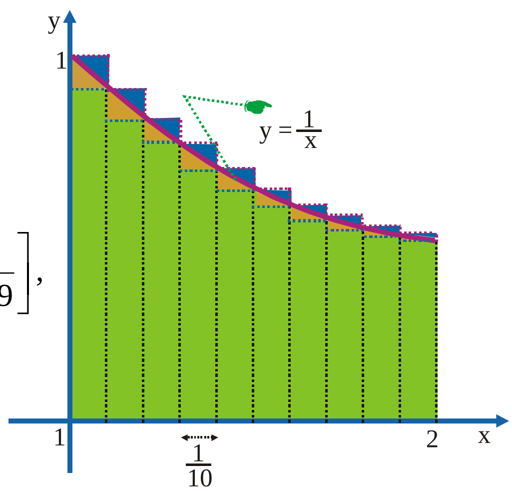
Trouver par cette méthode un encadrement de $\ln 2$ à 0,05 près. Par définition $\ln 2 = \int_1^2 \dfrac{1}{t}dt$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, donc d'après le théorème $\dfrac{2-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}} \le \ln 2 \le \dfrac{2-1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}$;

$\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\right) - \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n}$.

Pour obtenir des valeurs approchées à 0,05 près, il suffit de prendre n = 10 ;

$\dfrac{1}{10}\left[\dfrac{1}{1,1}+\dfrac{1}{1,2}+\ldots+\dfrac{1}{1,9}+\dfrac{1}{2}\right] \le \ln 2 \le \dfrac{1}{10}\left[\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1,1}+\ldots+\dfrac{1}{1,8}+\dfrac{1}{1,9}\right]$,

D'où $0,6687714 \le \ln 2 \le 0,7187714$

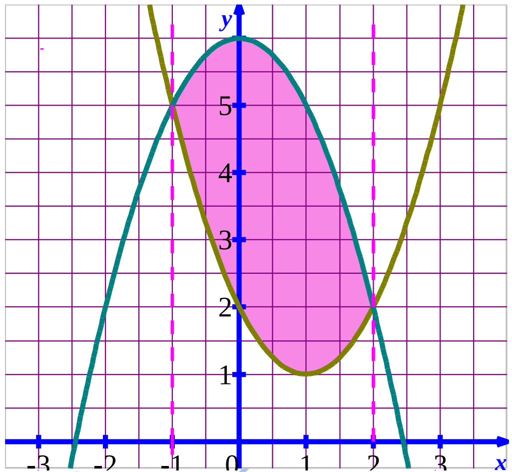


VIII. Calcul d'aires et de volumes

1) Calcul d'aires

Soit ***f*** et ***g*** deux fonctions continues sur [a ; b], telles que : pour tout x de[a ; b], $f(x) \leq g(x)$.
dans un repère orthonormé, l'aire de la surface limitée par les représentations graphiques de ***f*** et ***g*** et les deux droites d'équations respectives x = a et x = b est $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exemple



Soient ***f*** et ***g*** deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 + -2x + 2$
$g(x) = -x^2 + 6$. Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la surface limitée par les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
(courbes respectives de ***f*** et ***g*** dans un repère orthonormé).
Nous avons : $f'(x) = 2x - 2$; $g'(x) = -2x$

Tableau de variation de *f*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Tableau de variation de *g*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$

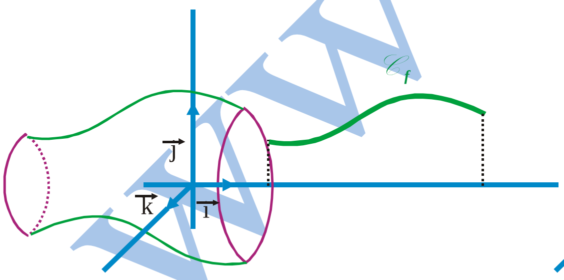
En plus, les abscisses des points d'intersections vérifient l'équation : $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6$, soit $2x^2 - 2x - 4 = 0$, d'où $x^2 - x - 2 = 0$, on en déduit les coordonnées des points d'intersections A(-1 ; 5) et B(2 ; 2). Sur l'intervalle [-1 ; 2]

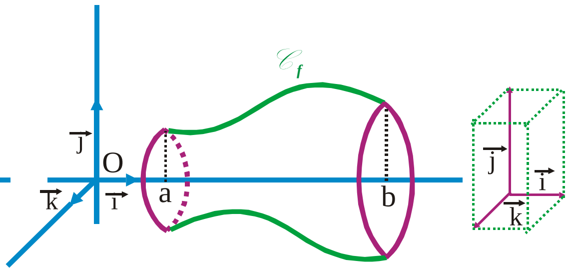
$f(x) \leq g(x)$; Donc ; $\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 6 - x^2 + 2x - 2)dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$;

$$\mathcal{A} = \left[\frac{-2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{-16}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4\right] = 9(\text{unités d'aires})$$

2) Calcul de volumes

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
Soient ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle I, et a , b des réels de I tels que $a \leq b$.
Le solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{C}_f$ autour de l'axe des abscisses, et limité par les plans d'équation x = a ; x = b, a pour volume : $\int_a^b \pi f^2(t)dt$ unité de volume.





L'unité de volume est celle du pavé droit d'arêtes [O ; A] ; [O ; B] et [O ; C] ;

Exemple

Soit la $\mathcal{C}$ courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$. Par rotation autour de l'axe $(O ; \vec{i})$, le domaine plan limité par, la droite $(O ; \vec{i})$ et les droites d'équations x = -1 et x = 1 engendre un solide de révolution, noté $\mathcal{S}$. Calculons le volume de $\mathcal{S}$. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur **R** , et en particulier sur [-1 ; 1]. Le volume de $\mathcal{S}$ est :

$$\int_{-1}^{1} \pi(e^x)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi e^{2x} dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2})$$

$\approx 11{,}394$ UV

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

Calculer les intégrales A ; B ; C et D proposées :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx \quad ; \quad B=\int_0^1\frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)}dx$$

$$C=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx \quad ; \quad D=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$$

Solution

- La fonction ***f*** définie par ***f***(x) = sin²x cosx peut s'écrire ***f***(x) =U'U² / U(x) = sinx.

  Donc ***f*** a pour primitive F = $\frac{U^3}{3}$, d'où A = $\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$.

- La fonction ***f*** définie par ***f***(x) = $\frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3}$ peut s'écrire ***f***(x) = $\frac{U'(x)}{U^3(x)}$; avec U(x) = x^4 + $4x^2$ +2.

  Donc, ***f*** a pour primitive F = $\frac{-1}{2U^2}$; d'où B = $\left[\frac{-1}{2(x^4+4x^2+2)^2}\right]_0^1=\frac{-1}{98}+\frac{1}{8}=\frac{45}{392}$.

- La fonction ***f*** définie par ***f***(x) = $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ peut s'écrire ***f*** = -U'e^U ; avec U(x) = $\frac{1}{x}$.

  Donc ***f*** a pour primitive : F = - e^U, d'où C = $\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2=-e^{\frac{1}{2}}+e=e-\sqrt{e}$.

- La fonction ***f*** définie par ***f***(x) = $\frac{\ln x}{x}$ peut s'écrire ***f*** = U'U / U (x) = ln x.

  Donc ***f*** a pour primitive F = $\frac{U^2}{2}$, d'où D = $\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}\left[\ln^2 e-\ln^2 1\right]=\frac{1}{2}$.

Exercice. 2

Calculer les intégrales proposées à l'aide d'une intégration par parties.

$$A=\int_0^{\pi}x\cos x dx \quad ; \quad B=\int_{-1}^0(x+2)e^{x+1}dx \quad ; \quad C=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x dx .$$

Solution

- $A=\int_0^{\pi}x\cos x dx$; Posons U'(x) = cosx $\Rightarrow$ U(x) = sinx ; V(x) = x $\Rightarrow$ V'(x) = 1.

  Donc ; A = $[x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx=[x\sin x]_0^{\pi}-[-\cos x]_0^{\pi}=-2$.

- $B=\int_{-1}^0(x+2)e^{x+1}dx$; Posons ***f*** '(x) = e^{x+1} $\Rightarrow$ ***f***'(x) = e^{x+1} ; **g**(x) = x + 2 $\Rightarrow$ **g'**(x) =1.

  Donc ; B = $\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 e^{x+1}dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^0-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^0$

  $=[2e-1]-[e-1]=2e-1-e+1=e.$

- $C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$. Posons $f\,'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$; $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$,

  Donc; $C = \left[-x^2 \cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-1}^{0} -2x \cos x dx = \left[x^2 \cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$.

  Calculons maintenant : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$ en utilisant une deuxième intégration par parties .

  Posons $U'(x) = \cos x \Rightarrow U(x) = \sin x$; $V(x) = x \Rightarrow V'(x) = 1$.

  Donc ; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = \left[x \sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \left[x \sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

  $$= \frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}\sin(-\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{-\pi}{3}) = 0 \;;$$

  D'où $C = \left[-x^2 \cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + 2\times 0 = -(\frac{\pi}{3})^2 \cos(\frac{\pi}{3}) + (-\frac{\pi}{3})^2 \cos(\frac{-\pi}{3}) = 0$.

Remarque :
Nous pouvions trouver la valeur de cette intégrale directement en remarquant que C est de la forme $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ avec f impaire.

Exercice. 3
Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x$.
a) Linéariser f en utilisant les formules d'Euler.
b) Calculer l'intégrale A définie par $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$.

Solution

a) Pour tout réel, on a : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, donc

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 4\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + 3\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

b) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice. 4
Calculer la valeur moyenne de la fonction f entre a et b dans les deux cas suivants :
a) $f(x) = 3x^2$; $a = 0$; $b = 2$; b) $f(x) = \sin x$; $a = 0$; $b = 2\pi$.
Solution

a) $m = \dfrac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2 dx = \dfrac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2 = \dfrac{1}{2}[8-0] = 4$;

b) $m = \dfrac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} \sin x dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\left[-\cos 2\pi + \cos 0\right] = \dfrac{1}{2\pi}\times 0 = 0$.

Exercice. 5

Majorer et minorer : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, puis déduisez-en que la suite (I_n) converge vers 0.

Solution

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x} \le 1 \Rightarrow \frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$;

Donc ; $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (Théorème des Gendarmes).

Donc (I_n) converge vers 0.

Exercice. 6

Trouver une primitive sur l'intervalle] 0 ; +∞ [de la fonction $\ln$ x.

Solution

La fonction $\ln$x est continue sur] 0 ; +∞ [, elle a donc des primitives. Sa primitive nulle en 1 est la fonction F définie sur] 0 ; +∞ [par : F(x) = $\int_1^x \ln dt$.

Pour calculer cette intégrale, nous utiliserons une intégration par parties.

Posons : $\boldsymbol{f}'(t) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{f}(t) = t$; $\boldsymbol{g}(t) = \ln t \Rightarrow \boldsymbol{g}'(t) = \frac{1}{t}$;

Donc ; F(x) = $[t\ln]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}tdt = [t\ln]_1^x - \int_1^x dt = [t\ln]_1^x - [t]_1^x \Rightarrow$ F(x) = x $\ln$x – x + 1.

Exercice. 7

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' les courbes respectives des fonctions $\boldsymbol{f}(x) = (x-1)^2$ et $\boldsymbol{g}(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'; puis tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' dans un repère orthonormé (unité 0,5 cm).

b) Calculer l'aire du domaine défini par $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \boldsymbol{f}(x) \le y \le \boldsymbol{g}(x) \end{cases}$

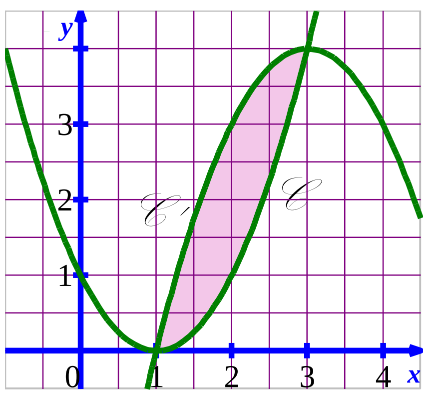
Solution

a) Coordonnées des points d'intersection : (1 ; 0) ; et (3 ; 4).

b) A = $\int_1^3 (\boldsymbol{g}(x) - \boldsymbol{f}(x))dx = \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5 - x^2 + 2x - 1)dx$

$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3$

$= \left(\frac{-54}{3} + 36 - 18\right) - \left(\frac{-2}{3} + 4 - 6\right) = \frac{8}{3}UA = \frac{8}{3}0,25 = \frac{2}{3}cm^2$.



Exercice. 8
r et h sont deux réels strictement positifs.

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur l'intervalle [0 ; h] par : $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{r}{h}x$.

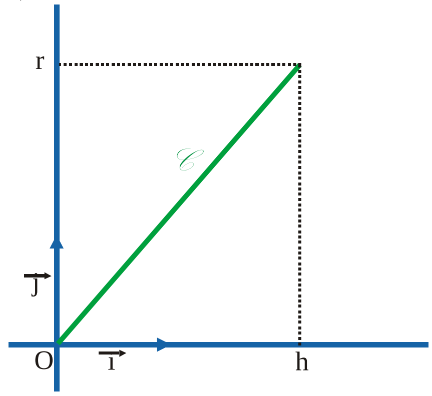
a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de $\boldsymbol{f}$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$.

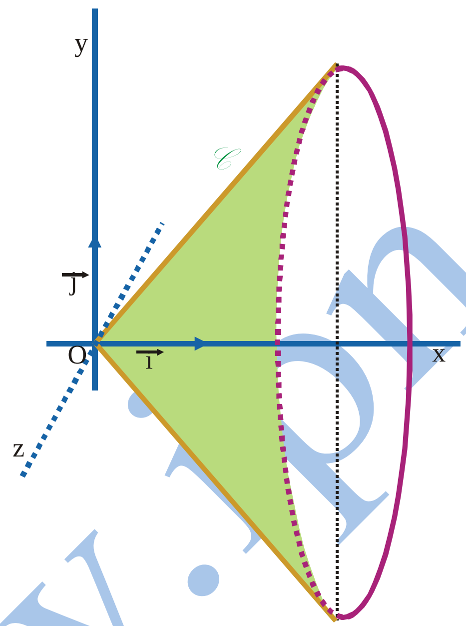
Le solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O\,;\,\vec{i}\,)$ est un cône de révolution de hauteur h et sa base a pour rayon r.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce cône.

Solution

a) Voici la construction demandée





b) $\mathcal{V} = \int_0^h \pi \boldsymbol{f}^2(x)dx = \int_0^h \pi \dfrac{r^2}{h^2}x^2dx = \pi\dfrac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \pi\dfrac{r^2}{h^2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\dfrac{r^2}{h^2}\times\dfrac{h^3}{3} \Rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

B. Exercices

1. Calculer les intégrales :

$I=\int_{-3}^{2}2x^4$; $J=\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt$; $K=\int_3^{1}\frac{dx}{1+x}$

$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(1+\tan^2 u\right)du$; $M=\int_0^{2}e^x dx$; $N=\int_1^{2}\frac{dx}{x^2}$

2. Calculer les intégrales :

$A=\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt$; $B=\int_1^4\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$;

$C=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{\frac{1}{t^2}}}{t^3}dt$; $D=\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

$E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; $F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$

3. Transformer les fonctions à l'aide d'une formule trigonométrique et calculer l'intégrale :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$; b) $\int_0^{\pi}\cos^3 x\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 2x\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^5 x\,dx$

$E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

4. Linéariser pour calculer les intégrales :

$I=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$; $J=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^4 x\,dx$; $L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx$

5. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$A=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$; $B=\int_1^{e}\ln t\,dt$;

$C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx$; $D=\int_1^{2}\frac{\ln x}{x^2}dx$

$E=\int_1^{2}x\ln x\,dx$; $F=\int_5^{10}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

6. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales A et B définies par : $A=\int_0^1 x^2e^x dx$; $B=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$.

7. On pose :

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\,dx$; $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x\,dx$.

a) Calculer A + B ;

b) Calculer A – B en utilisant une intégration par parties ;

c) Déduire des questions a)et b) les valeurs de A et B.

8. Pour tout naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer

que l'on a : pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $I_n = e - n\,I_{n-1}$

b) Calculer I_0, puis I_1 ; I_2 ; I_3.

9. $I_n=\int_0^{e}(\ln x)^n dx$, où n est un entier naturel non nul.

a) En utilisant une intégration par parties, trouvez une relation entre I_{n-1} et I_n.

b) Déduisez- en la valeur de I_4.

10 1) Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par : $f(x)=\frac{x^3-3x^2+x}{1-x}$;

Déterminer les réels a ; b ; c ; d tels que l'on ait, pour tout $x \neq 1$:

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$.

b) Calculer $I=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$.

2) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties :

$J=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(3x^2-6x+1\right)\ln(1-x)dx$

11 $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases}0\le x\le\pi\\0\le y\le\sin x\end{cases}$

1) l'unité graphique est 2cm. Représenter $\mathcal{D}$. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en cm^2.

2) L'unité est $\frac{6}{\pi}$cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées. Représenter $\mathcal{D}$. Quelle est l'aire de $\mathcal{D}$ en cm^2 ?.

12 f est la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$. $\mathcal{D}$ est le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite des abscisses, les droites d'équations : x = 1 et x = e. l'unité graphique est 3cm.

a) Représenter $\mathcal{D}$ b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en cm^2.

13 1) Etudier la fonction numérique f qui, au réel x associe : $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, puis tracer sa représentation
graphique dans un repère orthonormé.
2) Déterminer l'aire du domaine constitué par les points M(x ; y), dont les coordonnées vérifient :
$$\begin{cases} 2 \le x \le e^2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

14 Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$, Etudier f et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2) Calculer l'aire de la partie de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ définie par :
$\begin{cases} 0 \le x \le \lambda \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ où λ est un réel strictement positif.
Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$?

15 a) Donner le tableau de variation de la fonction $f : [0\ ;\ \pi] \mapsto \sin^2 x$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f (l'unité graphique est 9 cm) dans un repère orthonormé.
b) Montrer que pour tout réel x :
$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$
c) Calculer le volume en cm^3 du solide $\mathscr{S}$ engendré par la révolution autour de la droite des abscisses (Ox) de la plaque définie par :
$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin^2 x \end{cases}$$

16 Dans les cas suivants, calculer les valeurs moyennes de la fonction f entre a et b.

a) $f(x) = \cos x;\ \ a = \dfrac{\pi}{4}\ \ ;\ b = \dfrac{3\pi}{4};$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2};\ \ a = 1;\ b = 2;$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}};\ \ a = 0;\ b = 8\ ;$

d) $f(x) = e^{-x};\ \ a = 0;\ b = e.$

17 Dans chaque cas, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = xe^{2x}\ ;\ \ I = \mathbf{R}\ ;$

b) $f(x) = x^2\ln x\ ;\ \ I = [1; +\infty[$

c) $f(x) = (1+x)\ln x\ ; I =]0;1]\ ;$

d) $f(x) = e^x \cos x\ ; I = \mathbf{R}\ ;$

18 On considère les intégrales :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2};\ \ J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4}.$$
1.a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?
b) Calculer I .
2.a) Soit la fonction $f : [0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}] \to \mathbf{R}.\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

Démontrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle :
$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$
b) Déduisez du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J

19 On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier ses variations.
Montrer que sa représentation graphique $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes obliques d'équations :
y = 2x – 1 ; et y = 2x.
2. Construisez $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
(prendre 2 cm comme unité graphique).
Démontrer que le point $\Omega(0\ ;\ -\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.
3. Soit α un réel supérieur à $\ln 2$.
Calculer l'aire, $\mathscr{A}_\alpha$ du domaine plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équation y = 2x ; x = $\ln 2$ et x = α (on remarquera que : $\dfrac{e^x}{e^x - 1}$ est de la forme $\dfrac{U'}{U}$) ? Ecrivez $\mathscr{A}_\alpha$ sous la forme $\mathscr{A}_\alpha = \ln\varphi(\alpha)$ et étudier la limite de la fonction : $\alpha \mapsto \mathscr{A}_\alpha$ lorsque α tend vers $+\infty$.

20 Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}};\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x+1}}$$
1. Soit f la fonction telle que:
$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^n})$.Déterminer la fonction dérivée de f, calculer U_0.
2. Calculer U_1. calculer U_2 à l'aide d'une intégration par parties.
3. Démontrer que:$\forall x \in [0\ ;\ 1],\ 0 \le \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$
Déduisez- en que la suite (U_n) converge vers 0.

CHAPITRE 11

Equations différentielles

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. L'équation y' +ay = 0 (a réel)

Théorème 1

Les fonctions solutions de l'équation différentielle du premier degré $y' + ay = 0$ (a réel) sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-ax}$ (A réel quelconque).

Il existe une unique solution de cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 des réels donnés).

Cette fonction est la fonction $x \mapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}$.

II. L'équation y'' +ay' +by = 0 (a, b des réels)

Théorème 2

1) Les équations de référence

Equations de référence	**fonctions solutions**
(ω un réel non nul)	(A , B réels quelconques)
$y''= 0$	$y = Ax + B$
$y''- \omega^2 y = 0$	$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
$y''+ \omega^2 y = 0$	$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

2) Résolution de l'équation du second degré y'' + ay' + by = 0

L'idée générale

- Procéder à un changement de fonction pour ramener la résolution de cette équation différentielle à une équation de référence.
- Exprimer alors les solutions de l'équation différentielle et les interpréter à l'aide de l'équation caractéristique associée à savoir l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ (inconnue r).

Le changement de fonction

Soit y une fonction affine sur $\mathbf{R}$, et α un réel, on définit alors la fonction Z par $Z = ye^{-\alpha x}$, les rudiments de calcul différentiel permettent d'avancer que :

y est une solution de l'équation différentielle $y''+ ay' + by = 0$ équivaut à : Z est solution de l'équation :

$Z'' + (a +2\alpha)Z' +(\alpha^2 + a\alpha + b)Z = 0$. Prendre $\alpha = -\dfrac{a}{2}$ s'impose ; nous voilà amenés à une équation de référence, résumons :

$$y''+ ay' + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = ye^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\dfrac{a^2-4b}{4})Z \end{cases} \quad \text{(E)}$$

L'équation caractéristique

Considérons l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r appelée équation caractéristique, le discriminant de cette équation est égal à $a^2 - 4b$, de ce fait l'ensemble (E) des solutions précédentes s'écrit :

$$(E')\begin{cases} y = Ze^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z \end{cases}$$; Il n'y a plus qu'à résoudre grâce au théorème 2 l'équation de référence

$Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et

a interpréter les résultats obtenus à l'aide des racines de l'équation caractéristique.

III- Les résultats

Théorème 3

Equation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$	**Fonctions solutions** $(y'' + ay' + by = 0)$
2 racines réelles distinctes r_1 ; r_2.	$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
1 racine réelle double r	$y = (Ax + B)e^{rx}$
2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$; $\alpha - i\beta$;	$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Démonstration

- $\Delta > 0$: Ecrivons $\Delta = \omega^2$; ω un réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors : $r_1 = \frac{-a+\omega}{2}$; $r_2 = \frac{-a-\omega}{2}$.

De, $Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et du théorème 2 nous tirons : $Ae^{\frac{\omega}{2}x} + Be^{-\frac{\omega}{2}x}$ (A ; B réels)

Avec $Z = ye^{\frac{a}{2}x}$, il vient : $y = Ae^{(\frac{-a+\omega}{2})x} + Be^{(\frac{-a-\omega}{2})x}$; soit $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ (A ; B réels).

- $\Delta = 0$: la racine double de l'équation caractéristique est $r = -\frac{a}{2}$.

Nous avons, alors $Z'' = 0$ d'où $Z = Ax + B$ (A, B réels)

La relation $y = Ze^{-\frac{a}{2}x} = Ze^{rx}$ conduit immédiatement à $y = (Ax + B)e^{rx}$ (A, B réels).

- $\Delta < 0$: Ecrivons cette fois $\Delta = -\omega^2$; ω réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors,

$r_1 = \frac{-a+i\omega}{2}$; $r_2 = \frac{-a-i\omega}{2}$

Avec $Z'' = -(\frac{\omega}{2})^2 Z$ et le théorème 2 il vient :

$Z = (A\cos\frac{\omega}{2}x + B\sin\frac{\omega}{2}x)$ (A ; B réels), puis $y = e^{\frac{-a}{2}x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$; (A ; B réels) ;

dès lors qu'on écrit : $r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha = \frac{-a}{2}$; $\beta = \frac{\omega}{2})$.

IV- Avec les conditions initiales

Théorème 4

Il existe une unique solution de l'équation différentielle y'' - ay' + by = 0 satisfaisant aux conditions initiales : $y(x_0) = y_0$: $y'(x_0) = y'_0$; x_0 ; y_0 ; y'_0 des réels donnés.

V- Equation avec second membre

Exemple

I) Soit l'équation différentielle (E) $y' - 2y = e^x$. 1) Vérifier que la fonction **g :** $x \mapsto -e^x$ est solution de (E). 2) Montrer qu'une fonction ***f*** est solution de (E). si et seulement si ***f*** – **g** est solution de $y' - 2y = 0$ (E') 3) Résoudre E' puis E.	II) On considère l'équation différentielle (1) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ 1) Déterminer un polynôme ***g*** du premier Degré solution de (1). 2) Démontrer qu'une fonction f est solution (1) si et seulement si ***f*** – ***g*** est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ (2). 3) En déduire les solutions de (1).
Solution	**Solution**
Avec $g(x) = -e^x$, il vient $g'(x) = -e^x$, d'où $g'(x) - 2g(x) = e^x$, la fonction $g(x) = -e^x$ est donc solution de E. Comme $g'(x) - 2g(x) = e^x$ pour tout réel x, il est équivalent de dire $f'(x) - 2f(x) = e^x$ ou $f'(x) - 2f(x) = g'(x) - 2g(x)$ d'une autre manière : ***f*** solution de E $\Leftrightarrow$ $(f - g)' - 2(f - g) = 0$. Ainsi ***f*** est solution de E $\Leftrightarrow f - g$ solution de (E'). Les fonctions solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ étant les fonctions : $x \mapsto Ae^{2x}$ (A réel). On en déduit que les solutions de(E) sont les fonctions $A(e^{2x} - e^x)$.	Posons $g(x) = ax + b$ avec a, b réels, la fonction $x \mapsto (ax + b)$ est solution de (1) signifie que : $-a - 6(ax + b) = -6x - 1$; on en déduit aisément que a = 1 ; b = 0 ; la fonction $x \mapsto x$ est solution de (1). L'égalité $g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6x - 1$ vraie pour tout x, montre que ***f*** solution de (1) équivaut à $f'' - f' - 6f = g'' - g' - 6g$ ou encore $(f - g)'' - (f - g)' - 6(f - g) = 0$. Ceci établi l'équivalence ***f*** est solution de (1) $\Leftrightarrow$ $f - g$ est solution de (2) les solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x}$. On en déduit que les solutions de (1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x} + x$: A et B réels quelconques.

Savoir-faire

A. Applications

I) Exemples prototypes

Exemple. 1 Résoudre : y'' -3y' - 4y = 0	**Exemple. 2** Résoudre : y'' + 4y' + 4 = 0
Solution	**Solution**
L'équation caractéristique r^2 -3r -4 = 0 admet deux solutions réelles : r_1 = -1 ; r_2 = 4. Les fonctions solutions de l'équation différentielle y'' -3y' -4y = 0 sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{4x}$, A et B des réels quelconques	L'équation caractéristique r^2 +4r + 4 = 0 admet une solution réelle double r = -2. Les solutions de l'équation différentielle y'' + 4y' + 4y = 0 sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)\,e^{-2x}$ (A ; B réels quelconques).

Exemple. 3

Résoudre : y'' +2y' + 5y = 0

Solution

Les racines de l'équation caractéristique
r^2 +2r + 5 = 0 sont les complexes conjuguées :
-1 +2i et -1–2i.
Nous en déduisons les fonctions solutions de cette équation différentielle qui sont
$x \mapsto e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ (A ; B réels).

Exemples

1) Déterminer la fonction y telle que : y'' + 2y' + 2y = 0 ; y(0) = 1 ; y'(0) = -1.	2) Le plan étant muni d'un repère oerthonormal (xOy), existe-t-il une fonction f ayant les propriétés suivantes et si oui l'expliciter : ***f*** est solution de E : y'' - 3y' + 2y = 0 la courbe représentative de ***f*** passe le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à (Ox).
Solution	**Solution**
L'équation caractéristique : r^2 + 2r +2 = 0 a pour solution -1 + i et -1 – i. Les solutions de l'équation sont alors $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$. Les conditions : y(0) = 1 et y'(0) = -1 conduisent à A = 1 et B = 0, donc la fonction cherchée est : $f(x) = e^{-x}\cos x$.	Les conditions ci-dessus peuvent être résumées en : ***f*** est solution de y'' - 3y' + 2 = 0 et ***f***(0) = 1 ; ***f*** '(0) = 0. Le théorème 4 affirme l'existence et l'unicité d'une telle fonction. **Explicitons** L'équation caractéristique r^2 -3r + 2 = 0 a pour racines 1 et 2. Il existe donc deux réels A et B tels que $f(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$. Les conditions ***f***(0) = 1 et ***f*** '(0) = 0 conduisent à A + B = 1 et A + 2B = 0 d'où A = 2 et B = -1. La fonction ***f*** est alors définie par **f**(x) = $2e^{x} - e^{2x}$.

II) Situations conduisant à une équation différentielle

Exemples

A) Un corps de masse m lâché sans vitesse initiale subit en chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse v : F = -kv (où k coefficient de forme est positif).

1) Montrer que la fonction du temps $x \mapsto v(t)$ est une solution sur [0 ; +∞[
   de l'équation différentielle y' + $\frac{k}{m}$y = g (où g est l'accélération de la pesanteur).
2) Trouver une fonction constante solution de cette équation.
   En déduire que : $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-k}{m}t})$, et interpréter $v = \frac{mg}{k}$.

Solution

Le bilan des forces appliquées sur le corps se résume au poids et à la force de freinage.
Le théorème fondamental de la dynamique permet alors d'écrire la relation (valable à chaque instant t) :
mg –kv(t) = mγ(t) (où γ(t) est l'accélération à l'instant t).
En tenant compte de γ(t) = v'(t) on obtient

$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$.

Il est facile de voir que la fonction constante $t \mapsto \frac{mg}{k}$

est une solution particulière de l'équation différentielle (1) : $y' + \frac{k}{m}y = g$.

Comme la solution générale de l'équation sans second membre est $y = A\,e^{-\frac{k}{m}t}$,

la solution générale de (1) est : $t \mapsto Ae^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$,

la condition initiale v(0) = 0 conduit à : $A = \frac{-mg}{k}$,

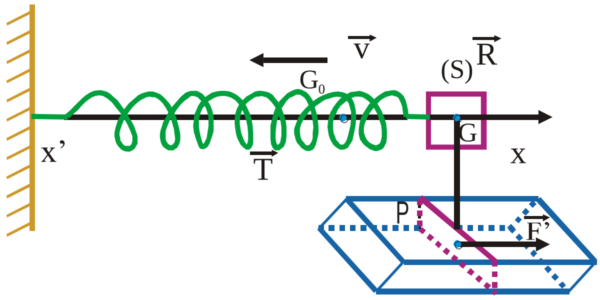
d'où l'expression de v : $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-k}{m}t})$,

on vérifie que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = v = \frac{mg}{k}$,

v apparaît donc comme la vitesse limite du corps.

B) Oscillateurs mécaniques amortis

On considère le dispositif ci-contre, le solide (S) de masse m peut coulisser sans frottement suivant un axe horizontal ; le solide est muni d'une palette de masse négligeable trempant dans un liquide , la force de frottement qu'exerce le liquide sur la palette est proportionnelle à la vitesse de cette dernière , elle est de la forme : $\vec{F}' = -f\,\vec{v}$.



- La raideur du ressort est égale à k.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

Solution

1) Choix du repère

L'axe horizontale (xx') est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$) où O est le point G_O correspondant à la position du centre d'inertie G du solide. Lorsque le ressort n'est pas tendu.

La position de g est alors repérée en fonction du temps t par son abscisse x(t) dans un repère : $\overrightarrow{G_OG_t} = x(t).\vec{i}$.

2) L'équation du mouvement

- Bilan des forces exercées sur le système ''Solide ; Palette''.

Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ de l'axe orthogonal à l'axe, à la force $\vec{T}$ exercée par le ressort : $\vec{T} = -k\overrightarrow{G_OG} = -k\,x(t).\vec{i}$ et enfin à la force $\vec{F}'$ exercée par le liquide : $\vec{F}' = -f\,\vec{v} = -f\,x'(t).\vec{i}$.

Le théorème du centre d'inertie conduit à écrire $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}' = m\vec{a}_G$; où $\vec{a}_G$ est le vecteur accélération de G : $\vec{a}_G = x''(t).\vec{i}$.

Par projection orthogonal sur l'axe (O ; $\vec{i}$) on obtient :

$-kx(t) - f\,x'(t) = mx''(t)$

Soit $mx'' + f\,x' + kx = 0$; et c'est l'équation du mouvement.

B. Exercices

1. Résoudre les équations différentielles

1) $y' - 3y = 0$; 2) $y' + \frac{1}{2}y = 0$; 3) $5y' - 2y = 0$

4) $\frac{2}{3}y' + y = 0$; 5) $3y' + 4y = 0$; 6) $2y' + y\sqrt{2} = 0$

2. Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie la condition initiale :

1) $y' + 2y = 0$; $y(0) = 1$; 2) $y' - 5y = 0$; $y(2) = 7$
3) $2y' - 3y = 0$; $y(2) = e$; 4) $7y' + 4y = 0$; $y(7) = e^5$
5) $y' + 0{,}5y = 0$; $y(2) = 1$; 6) $0{,}4y' - 1{,}5y = 0$; $y(0) = 1$
7) $y'\sqrt{2} - y = 0$; $y(0) = e^2$; 8) $y' - \pi y = 0$; $\ln(y(2)) = \pi$

3. Résoudre les équations différentielles

1) $y'' = y$; 2) $y'' + y = 0$; 3) $y'' - 2y = 0$
4) $y'' + 3y = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
6) $y'' + y' + y = 0$; 7) $y'' + 4y' - 5y = 0$
8) $y'' + 4y' + 5y = 0$.
9) $y'' - 2y' + y = 0$; 10) $y'' - 0{,}1y' - 0{,}2y = 0$.
11) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 12) $y'' - 4y' - 4y = 0$;
13) $2y'' - 5y' - 3y = 0$; 14) $2y'' + y'\sqrt{2} + y = 0$;
15) $4y'' + 4y' + y = 0$; 16) $9y'' + 6y' + y = 0$;

4. Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales données.

1) $y'' + 4y = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = -1$; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$;
2) $y'' - \pi y = 0$; $y(0) = \pi$; $y'(0) = \pi$;
3) $y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 1$; $y'(\pi) = 0$;
4) $4y'' + 121y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 11$;
5) $y'' - y' - 2y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
6) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = -1$;
7) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
8) $y' - 4y' - 13y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$;
9) $2y'' + y' - 10y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;
11) $y'' - 4y' = 0$; $y(0) = 8$; $y'(0) = 4$
12) $y'' - 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;
13) $8y'' = y'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = \frac{1}{2}$;
14) $5y'' - 3y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

5. Expliciter la fonction solution de :

$$\begin{cases} y'' + \pi y' - e^{1995}y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

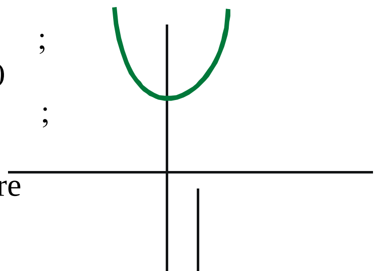
6. a) Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$
b) déterminer les solutions g qui vérifient $g(0) = 3$ et $g'(0) = 0$.
c) Déterminer le signe de $g(x)$.

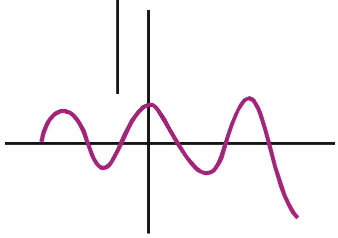
7. On considère l'équation différentielle :
$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$.
Où g désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivables sur **R** que l'on cherche à déterminer g' et g'' sont la dérivée et la dérivée seconde de $g(x)$.
1) Résoudre cette équation différentielle
2) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :
- La courbe représentant cette fonction passe par le point I(0 ; 4),
- La tangente à cette courbe en ce point a pour cœfficient directeur le nombre 2.(le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$).

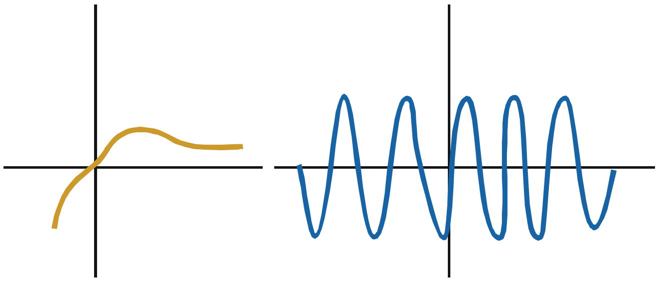
8. 1) Montrer que si y est une solution d'une équation différentielle du second degré $y'' + ay' + b = 0$ (a , b réels), Il en est de même que la dérivée y'.
2) En déduire qu'une primitive de la fonction de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (A ; B ; α ; β réels) est encore de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x + \mu\sin\beta x)$ (λ et μ réels).

9. Résoudre l'équation différentielle $y''' + y'' = 0$ (poser Z= y'' et résoudre l'équation différentielle dont Z est solution).

10 On a considéré une solution de chacune des équations différentielles suivantes :
1) $y'' + 2y' + y = 0$;
2) $y'' - 2y' + 2y = 0$
3) $0{,}01y'' + y = 0$;
4) $0{,}01y'' - y = 0$.
Les figures ci-contre donnent sommairement l'allure des courbes représentatives de ces fonctions.
Associer chaque courbe à son équation différentielle.







11 Résoudre les équations différentielles avec second membre:

1) $y' = x + \sin x$; 2) $y' = \sin 3x$; 3) $xy' = 1$
4) $y'\sqrt{x} = 1$; 5) $y'' = 2x^3 - 5x2 + 7x - 1$
6) $y'' = \sin x + \cos x$; 7) $y'' = e^{2x} + e^{-2x}$;
8) $y'' = 1 + \tan^2 x$

12 On considère l'équation différentielle
$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$ (E)
où f désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivable que l'on cherche à déterminer f' et f'' sa dérivée 1ère et sa dérivée seconde.
Déterminer les nombres réels a ; b et c pour que la fonction numérique définie par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) dans **R**
Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle :
$h'' - 3h' + 2h = 0$ (E_2)
Résoudre (E_2). En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1).
Déterminer la solution particulière φ de l'équation (E_1) telle que : $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(0) = 0$.

13 Pour chacune des équations différentielles, déterminer une fonction g de la forme indiquée qui soit solution de l équation (E), puis montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si ($f - g$) est une solution de l'équation sans second membre associée à (E), en déduire tous les solutions de (E).

1) $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$ (E); g est un polynôme de degré 2
2) $y' + 2y = e^{-2x}$ (E) ; $g : x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$ (a ; b réels)
3) $y' + y = \sin x$ (E) ; $g : x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x$ (λ ; μ réels)
4) $2y' - 3y = 6(x2 + x - 1)$ (E) ; $g : x \mapsto P(x)e^{-3x}$; P étant un polynôme

5) a) $y' + y = x^3 + 2$ (E_1) ; b) $y'' - 4y = x^3 - 1$ (E_2) g polynôme de degré 3.
6) a) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$ (E_1)
b) $y'' + 2\sqrt{3}\,y' - y = \cos x$ (E_2)
$g : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$
7) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$; (E) ; $g : x \mapsto Ae^{4x}$ (A réel).
8) $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$; (E) ;
$g : x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$; (A ; B réels).

14 On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E).
1) Soit g une fonction dérivable et f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}g(x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si
$g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
2) En déduire toutes les solutions de (E).

15 A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E).
1.a) Quelles sont les solutions de (E) ?
b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse x = 0 la même tangente que la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de $y = e^{2x}$. On dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangentes.
2) Représenter dans un même repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont on précisera les positions relatives.
3) λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -\lambda 2e^{2x} + 2\lambda e^{2x}$.
a) Montrer que h_λ est solution de (E).
b) Soit $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de h_λ , Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun entre montrer que ces courbes sont tangentes en ce points.
c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}'$
B) Soit E' l'équation différentielle :
$y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$ (E').
1) Trouver un polynôme du second degré (***P***) solution de l'équation (E).
2) On pose : $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.
Montrer que f est solution de E' si et seulement si g est solution de E. En déduire les fonctions f solutions de (E').

Calcul vectoriel 1

CHAPITRE 12

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Angles orientés dans le plan orienté

1) Modulo [2π] et modulo π.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ (\pi) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha \quad (2\pi) \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + \pi\ (2\pi) \end{array} \right.$

2) Double d'un angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, $2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est toujours mesuré modulo 2π

3) Remplacement par un vecteur colinéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $\forall k \in \mathbb{R}_+^*\ :\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ k\vec{v}) = (k\vec{u}\ ;\ \vec{v})$
- $\forall k \in \mathbb{R}_-^*\ :\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ k\vec{v}) + \pi = (k\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi,$
- $\forall k \in \mathbb{R}^*\ :\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ k\vec{v}),$
  $= (k\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ ;\ [\pi]$
- $\forall k \in \mathbb{R}^*\ :\ :\ 2(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 2(\vec{u}\ ;\ k\vec{v}) = 2(k\vec{u}\ ;\ \vec{v}),$

4) Colinéarité - Orthogonalité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

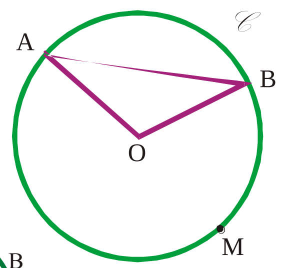
- $(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires$) \Leftrightarrow (2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = 0)$
- $(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux$) \Leftrightarrow (2(\vec{u}\ ;\vec{v}) = \pi)$

5) Théorème de l'angle inscrit

Soit [AB] une corde sur un cercle de centre O.

Pour tout point M de $\mathscr{C}$ (différent de A et B) on a :

$2(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$.

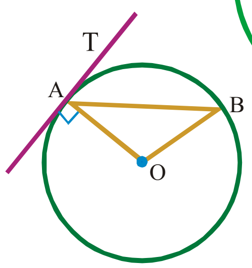


6) Théorème de la tangente

Soit [AB] une corde sur un cercle de centre O.

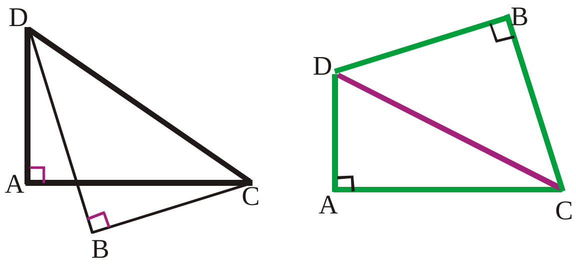
Pour tout point T distinct de A, de la tangente à $\mathscr{C}$ en A, on a

$2(\overrightarrow{AT}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$



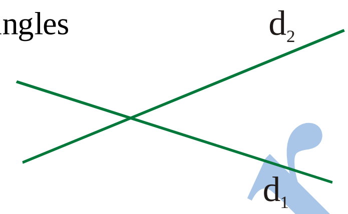
II. Cocyclicité remarquable

Les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse sont cocycliques



1) Angles orientés de droites

Soit d_1 et d_2 deux droites $(d_1 ; d_2)$ et $(d_2 ; d_1)$ désignent les deux angles orientés définis par d_1 et d_2.



- $(d_1 ; d_2) = (\vec{u}_1 ; \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de d_1 ;
  $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 ;
- $(d_1 ; d_2) = -(d_2 ; d_1)$
- Un angle orienté de deux droites est toujours mesuré modulo π
- L'écriture (AB ; CD) désigne un angle orienté de deux droites (AB) et (CD) lorsqu'elles sont définies
  (AB ; CD) = (BA ; DC) = (AB ; CD) !
- d étant une droite, on a: $(d; d) = 0$
- d_1 ; d_2 ; d_3 étant trois droites, on : $(d_1 ; d_2) = (d_1 ; d_3) + (d_3 ; d_2)$ (Relation de Chasles)
- d_1 ; d_2 étant deux droites, on : (d_1 et d_2 sont parallèles) $\Leftrightarrow$ $(d_1 ; d_2) = 0$
  (d_1 et d_2 sont perpendiculaires) $\Leftrightarrow$ $(d_1 ; d_2) = \dfrac{\pi}{2}$
- Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques ou alignés si et seulement si (CA ; CB) = (DA ; DB).
- Trois points distincts deux à deux A ; B ; C sont alignés si et seulement si (AB ; BC) = 0.

III. Barycentre dans le plan ou dans l'espace

1) Barycentre de (n) points pondérés

Soit A un point du plan ou de l'espace, soit α un réel.
Le couple $(A ; \alpha)$ est- appelé point pondéré.
Soit $(A_1 ; \alpha_1)$; $(A_2 ; \alpha_2)$;… ; $(A_n ; \alpha_n)$ (n) points pondérés dans le plan ou dans l'espace, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.

Le pont G est le barycentre du système $\{(A_k\ ;\ \alpha_k)\ ,\ 1 \le k \le n\}$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, avec $\alpha \neq 0$, alors G est appelé isobarycentre des points A_1 ; A_2 ; … ; A_n .

Des opérations qui conserve G

- **Homogénéité**

En multipliant tous les réels α_1 ; α_2 ; … ; α_n par un même réel non nul, alors G est conservé.

- **Associativité**

En remplaçant certains points par leur barycentre partiel affecté de la somme non nulle de leurs coefficients, alors G est conservé.

2) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A_1 ; A_2 ; …A_n ; n points dans le plan ou dans l'espace. Soit α_1 ; α_2 ; … ; α_n ; n réels.

Pour tout point M du plan ou de l'espace, on pose : $\boldsymbol{f}(M) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$. ***f*** ainsi définie est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système : $\{(A_k\ ;\ \alpha_k)\ ,\ 1 \le k \le n\}$.

En plus

<table>
<tr><th>Si</th><th>alors</th></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k \neq 0$</td><td>$\boldsymbol{f}(M) = (\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k)\overrightarrow{MG}$ avec,
$G = \text{bar}\ \{(A_k\ ;\ \alpha_k)\ ,\ 1\le k\le n\}$
Par exemple : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MG}$
Avec
$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k = 0$</td><td>$\boldsymbol{f}$(M) est indépendant de M
Par exemple : $\boldsymbol{f}(M) = 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\boldsymbol{f}(A)$
$= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$</td></tr>
</table>

3) Barycentre de deux points

Soit A ; B deux points distincts donnés dans le plan ou dans l'espace,
Soit α ; β deux réels donnés tels que : $\alpha+\beta\neq 0$

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha+\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha+\beta\neq 0 \Leftrightarrow$ G ; A ; B sont alignés

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha+\beta\neq 0 \Leftrightarrow$ G Appartient à la droite (AB).

4) Barycentre de trois points

Soit A ; B ; C trois points dans le plan ou l'espace, Soit α ; β ; γ trois réels tels que : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

$G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \Leftrightarrow$ G ; A ; B ; C sont coplanaires.

5) Affixe d'un barycentre dans le plan complexe

Soit A_1 ; A_2 ; …A_n ; n points dans le plan complexe, d'affixe respectives Z_1 ; Z_2 ; …Z_n .

Soit α_1 ; α_2 ; … ; α_n ; n réels tels que : $\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k\neq 0$,

$G = \text{bar}\ \{(A_k\ ;\ \alpha_k)\ ,\ 1\le k\le n\}$ si et seulement si $Z_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k Z_k}{\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k}$.

IV. Déterminant dans le plan

1) Déterminant dans une base quelconque $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ dans le plan vectoriel

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, et

- $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x.y' - x'y$
- $\det(\vec{v}\ ;\vec{u}\ ) = -\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$
- $\det(\alpha\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) = \det(\vec{u}\ ;\alpha\vec{v}\ ) = \alpha\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ ;\ \forall\ \alpha\in\mathbf{R}$.
- $\det(\vec{u}\ ;\vec{0}) = \det(\vec{0}\ ;\ \vec{u}\ ) = 0$
- $\det(\vec{u}\ ;\vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \det(\vec{u}\ ;\ \vec{w})$
- ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) $\Leftrightarrow \det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$

2) Une autre expression de det $(\vec{u}\,;\vec{v})$ dans une base orthonormale $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

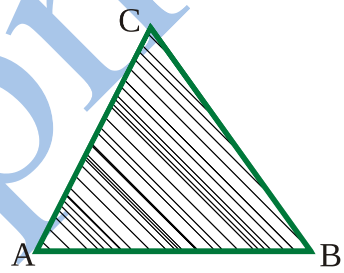
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

a) Aire d'u triangle dans le plan

Soit ABC un triangle d'aire S.

On a :

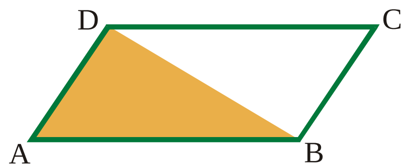
$$S = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})\right|$$



b) Aire d'un parallélogramme dans le plan

Soit ABCD un parallélogramme d'aire S,

on a $S = \left|\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})\right|$.



Savoir-faire

A. Applications

Exercice 1

1) Dans un plan complexe, on considère quatre points A ; B ; C ; D distincts deux à deux et non alignés trois à trois.
   On désigne par a ; b ; c ; d leurs affixes respectives.
   Montrer que A ; B ; C ; D sont cocycliques si et seulement si $(\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b})$ est un réel non nul.
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on donne les points A(2) ; B(4i) ; C(3 + 3i). Montrer que les points O ; A ; B ; C sont cocycliques.

Solution

1) A ; B ; C ; D sont cocycliques $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD})\ [\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg(\frac{d-a}{c-a}) = \arg(\frac{d-b}{c-b})\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(\frac{d-a}{c-a}) - \arg(\frac{d-b}{c-b}) = 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left[(\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b})\right] = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b}) \in \mathbf{R}^*$$

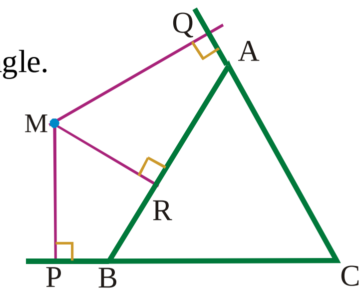
2) $\left(\frac{Z_A - Z_0}{Z_B - Z_0}\right)\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = \left(\frac{2}{4i}\right)\left(\frac{4i-3-3i}{2-3-3i}\right) = \left(\frac{1}{2i}\right)\left(\frac{-3+i}{-1-3i}\right)$

$$= \frac{-3+i}{6-2i} = \frac{(-3+i)(6+2i)}{40} = \frac{-20}{40} = \frac{-1}{2} \in \mathbf{R}^*$$

Donc, les points O ; A ; B ; C sont cocycliques.

Exercice 2

ABC un triangle. M un point du plan distinct des sommets du triangle.
M se projette orthogonalement sur
(CB) ; (CA) ; (AB) respectivement en P ; Q ; R.



1) Montrer que : $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{QR})$
2) En déduire que les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si, M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution

1) $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MR}) + (\overrightarrow{MR}\ ;\ \overrightarrow{MB})$ (Chasles)

$= (\overrightarrow{QA}\ ;\ \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{PB})$ (les points M ; A ; Q ; R d'une part et les points M ; B ; P ; R d'autre part sont les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse), d'où

$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{CB})$

$= (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{QR})$ (Chasles)

$= (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{QR})$ (Chasles)

Donc ; $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{QR})$.

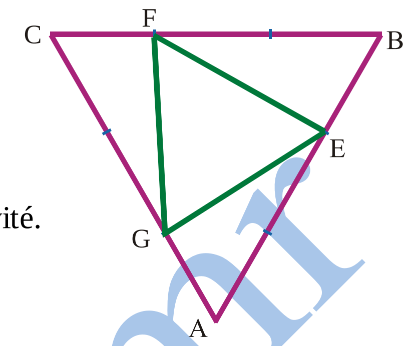
2) Les points P ; Q ; R sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{PR}\ ;\ \overrightarrow{QR}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow$ les points M ; A ; B ; C sont cocycliques.

Donc les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
(Dans ce cas : la droite (PQR) est appelée la droite de Simson définie par le point M relativement au triangle ABC).

Exercice 3

ABC un triangle.

$E=\begin{array}{c|c}A&B\\\hline 1&2\end{array}$; $F=\begin{array}{c|c}B&C\\\hline 1&2\end{array}$; $G=\begin{array}{c|c}C&A\\\hline 1&2\end{array}$



On désigne par a ; b ; c ; e ; f ; g les affixes respectives des points A ; B ; C ; E ; F ; G dans le plan complexe.
Montrer que les triangles ABC et EFG ont le même centre de gravité.

Solution

L'affixe du centre de gravité de ABC est $\dfrac{a+b+c}{3}$

L'affixe du centre de gravité de EFG est $\dfrac{e+f+g}{3}$. Or $e=\dfrac{a+2b}{3}$; $f=\dfrac{b+2c}{3}$; $g=\dfrac{c+2a}{3}$.

Donc, $\dfrac{e+f+g}{3}=\dfrac{\dfrac{3a+3b+3c}{3}}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}$. Donc, ABC et EFG ont même centre de gravité.

Exercice 4

dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

on donne les points : A(2 + i) ;B(1 + 2i) ; C(3 + 3i).

L'unité graphique est le centimètre.

1. Calculer l'aire S du triangle ABC.
2. Calculer AB et AC.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte du sinus de l'angle $\hat{A}$ géométrique du triangle ABC.

Solution

1) $S=\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})\right|cm^2$; Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\2-1\end{pmatrix}=\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\3-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

Donc, $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}$ = -2– 1 = -3. D'où, S = $\dfrac{3}{2}$ cm^2.

2) $AB=|Z_B-Z_A|=|1+2i-2-i|=|-1+i|=\sqrt{2}$;

$AB=|Z_A-Z_C|=|2+i-3-3i|=|-1-2i|=\sqrt{5}$;

3) On a: $S=\dfrac{1}{2}AB\times AC\times \sin A\ cm^2=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin A\ cm^2=\dfrac{3}{2}cm^2$, d'où, $\sin A=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

B. Exercices

1. Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

2. Montrer que les symétriques de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport à ses côtés appartiennent au cercle Γ circonscrit à ce triangle.
2) On pose $\Gamma_1 = S_{AB}(\Gamma)$; $\Gamma_2 = S_{AC}(\Gamma)$;
$\Gamma_3 = S_{BC}(\Gamma)$.
Montrer que les cercles : Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 . sont concourantes en un point à préciser.

3. On construit un quadrilatère ABCD. I est le point d'intersection de ses diagonales.
P ; Q ; R ; S sont les projetés orthogonaux de I respectivement sur (AB) ; (BC) ; (CD) ; (DA).
Montrer les relations :

- $(PS\ ;\ PQ) = (AD\ ;\ AC) + (BD\ ;\ BC)$
- $(PQ\ ;\ RS) = (CB\ ;\ CA) + (DB\ ;\ DA)$

2) En déduire que P ; Q ; R ; S sont cocycliques si et seulement si (AC) et (BD) sont orthogonaux.

4. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ de centre O. la tangente à $\mathscr{C}$ en C coupe (AB) en T. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB). Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.
Démontrer que les points B ; D ; E ; T sont cocycliques.

5. Dans le plan complexe, on donne les points A ; B ; C ; D d'affixes respectives :
3 + i ; 1 + 5i ; 4 + 4i ; 1 + i.
1) Démontrer que les points A ; B ; C ; D sont cocycliques.
2) Soit G = $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$
Calculer l'affixe du point G.

6. Le plan complexe P est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on note f l'application qui a tout point M d'affixe Z ≠ -1 ; associe le point M' d'affixe Z' tel que :
Z' = $\dfrac{1}{\overline{Z}+1} - 1$. Soit I le point d'affixe -1.
1) Vérifier que pour tout point M distinct de I, on a, M' qui est distinct de I.
2) Déterminer $(\overrightarrow{IM}\ ;\ \overrightarrow{IM'})$. que peut-on en déduire pour les points I ; M ; M' ?

7. TRAP est un trapèze, dont les bases (TR) et (AP) vérifient $\overrightarrow{RT} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.
Déterminer des réels α ; β ; γ de sorte que :
P = Bar $\begin{array}{c|c|c} A & R & T \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

8. Soit trois points A ; B ; C non alignés et soit un réel k de l'intervalle [-1 ; 1]. On considère G_k le barycentre du système :
$\{(A\ ;\ k^2+1)\ ;\ (B\ ;\ k)\ ;(C\ ;\ -k)\}$.
1) Représenter les points A ; B ; C, le milieu de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2) Justifier l'existence de G_k, pour tout k de [-1 ; 1] et démontrer que : $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$
3) Soit N un point de la droite (BC). N peut-il être un point G_k ? Justifier.
4) Etablir le tableau des variations de la fonction ***f*** définie sur [-1 ; 1] par :
$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$.
5) En déduire l'ensemble des points G_k, lorsque k décrit [-1 ; 1].

9. 1) Construire un triangle ABC tel que :
AC = 15 ; AB = 9 ; BC = 32.Quelle ests sa nature ?
2) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que :
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$
3) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$
4) Démontrer que Γ est aussi caractérisée par :
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

10 ABCD un tétraèdre,
K = bar $\{(A;2)\ ;\ (D;1)\}$ et
G = bar $\{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ 2)\ ;\ (D\ ;-1)\}$.
Montrer que le milieu I du segment [GK] appartient au plan (ABC).

11 Soit un tétraèdre ABCD, on considère
E = bar $\{(A\ ;\ -1)\ ;\ (B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;-3)\}$;
F milieu de [ED].
G = bar $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (D\ ;\ 2)\}$;

$H = \text{bar}\{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ -3)\}$.

1) Démontrer que F ; G ; H sont alignés ?
2) Les points B ; C ; F ; G sont-ils coplanaires.

12 Le théorème de Ménélaïs (vers l'an 100).
On considère un triangle ABC et trois points P ; Q ; R sur (BC), (AC) et (AB) respectivement, distincts des points A ; B ; C.

1) Justifier l'existence des trois réels non nuls, p ; q ; r tels que :
   $P = \text{bar}\{(B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ -p)\}$;
   $Q = \text{bar}\{(C\ ;\ 1)\ ;\ (A\ ;\ -q)\}$
   $R = \text{bar}\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ -r)\}$
2) Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$), déterminer les coordonnées des points R ; Q, puis P.
3) Déterminer $\det(\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PR})$. En déduire que les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si pqr = 1.
4) **Application**
   On donne R symétrique de B par rapport à A et Q milieu de [AC]. (RQ) coupe (BC) en P. Quelle est la position de P sur la droite (BC) ?

13 Dans l'espace, comparer l'isobarycentre des quatre sommets d'un tétraèdre avec celui des sommets du tétraèdre formé des centres de gravité de chacune de ses faces.

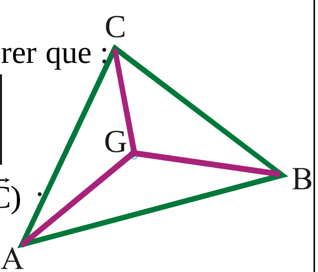
14 Montrer les propriétés du déterminant suivant :

- $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{0}) = 0$
- $\det(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -\det(\vec{u}\ ;\vec{v})$;
- $\det(\alpha\vec{u};\vec{v}) = \det(\vec{u}\ ;\alpha\vec{v}) = \alpha\det(\vec{u}\ ;\vec{v})\ ;\forall\alpha\in\mathbf{R}$
- $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \det(\vec{u}\ ;\ \vec{w})$

15 ABC un triangle. G un point situé à l'intérieur de ce triangle.

1) On se propose de montrer que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \text{Aire GBC} & \text{Aire GCA} & \text{Aire GAB} \\ \hline\end{array}$$



On pose $x = \det(\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GC})$;
$y = \det(\overrightarrow{GC}\ ;\ \overrightarrow{GA})$;
$z = \det(\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GB})$.

a) Expliquer pourquoi x ; y ; z ont le même signe.

b) On pose : $\vec{u} = x\overrightarrow{GA} + y\overrightarrow{GB} + z\overrightarrow{GC}$.

Montrer que $\vec{u}$ est colinéaire à chacun des vecteurs $\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GC}$. En déduire la valeur de $\vec{u}$ et conclure

2) Application

a) Soit G le centre de gravité de ABC.
Montrer que aire(GBC) = aire(GCA) = aire (GAB).
En déduire que: $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

b) Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Soit r le rayon de ce cercle.
Vérifie que :

- $\text{aire(GBC)} = \dfrac{rbc}{2}$
- $\text{aire(GCA)} = \dfrac{rca}{2}$
- $\text{aire(GAB)} = \dfrac{rab}{2}$

En déduire que :
$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline BC & CA & AB \end{array}$

c) Soit H l'orthocentre du triangle ABC.
Montrer que : $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$
En déduire que: $H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{array}$

CHAPITRE 13

Calcul vectoriel 2

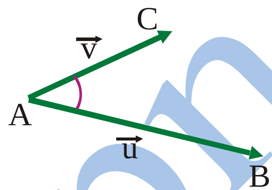
Faire savoir

L'essentiel du chapitre

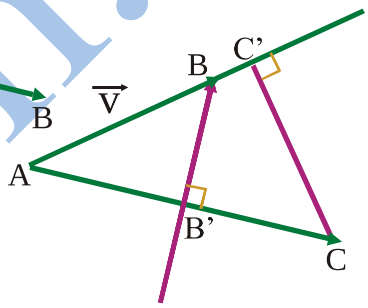
I. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace

1) Définitions (équivalentes) - Orthogonalité

- Soit $\vec{u}$ un vecteur ; $\vec{u}.\vec{o} = \vec{o}.\vec{u} = 0$
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ;
  avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
  On a : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos B\hat{A}C$.



- Avec B' projeté orthogonal de B sur la droite (AC) et C' projeté orthogonal de C sur la droite (AB),
  On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Avec : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal du plan on a : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$

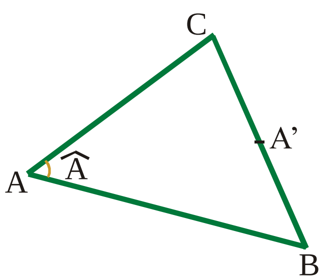
  $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $x.x' + y.y' = 0$.
- Avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal de l'espace on a : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$.

  $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $x.x' + y.y' + z.z' = 0$.

2) Relations fondamentales dans un triangle

Soit ABC un triangle, A' milieu de [BC].

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$
- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.



3) Distance dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormal.

- Si $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$ dans un repère orthonormal du plan,
  alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$; $B(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère orthonormal de l'espace,
  alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

4) Equation cartésienne d'une droite dans le plan, d'un plan dans l'espace

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné dans un repère orthonormal du plan.

  L'ensemble des points M(x ; y) tels que : ax + by + c = 0, c $\in$ **R** (donné) est une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné dans un repère orthonormal de l'espace.

  L'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que ax + by + cz + d = 0, d$\in$ **R** (donné) est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

4) Distance d'un point à une droite, d'un point à un plan

- Soit A(x_0 ; y_0) un point donné et $\mathcal{D}$ une droite donnée d'équation cartésienne ax +by +c = 0, dans un repère orthonormal du plan

  Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ alors .

On a : AH est la distance de A à $\mathcal{D}$ et AH = $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Soit A(x_0 ; y_0 ; z_0) un point donné et $\mathcal{P}$ un plan donné d'équation cartésienne ax + by + cz + d = 0, dans un repère orthonormal de l'espace.

  Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ alors.

  (Si A $\in \mathcal{P}$ alors H = A et Si A $\notin \mathcal{P}$ alors H $\in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$).

  On a : AH est la distance de A à $\mathcal{P}$ et AH = $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) Fonction scalaire de Leibniz

Soit A_1 ; A_2 ; … ; A_n n points dans le plan ou dans l'espace.Soit α_1 ; α_2 ; α_3 ; … ; α_n n réels.

Pour tout point M du plan ou de l'espace, on pose :f (M) = $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\|\overrightarrow{MA_k}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k MA_k^2$.

f ainsi définie est appelée fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A_k;\alpha_k)\ ;\ 1\le k\le n\}$.

En plus

Si	alors
$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$	f (M) = $(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)$ MG^2 + f(G), avec G = bar$\{(A_k;\alpha_k)\ ;\ 1\le k\le n\}$. Par exemple : f (M) = MA^2 + 2MB^2 + MC^2 + MD^2 = 5MG^2 + f (G). Avec $G = \text{bar}\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$
$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 0$	f (M) = $2\overrightarrow{MI}.\vec{u} + f(I)$, où I est un point quelconque et $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{IA_k}$ qui ne dépend pas de I. Par exemple : f (M) = $3MA^2 - MB^2 - MC^2 - MD^2 = 2\overrightarrow{MA}.\vec{u} + f(A)$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$.

En plus, avec :

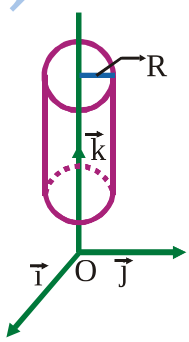
- k réel
- L_k l'ensemble des points M du plan tels que $\boldsymbol{f}$ (M) = k
- S_k l'ensemble des points M de l'espace tels que $\boldsymbol{f}$ (M) = k

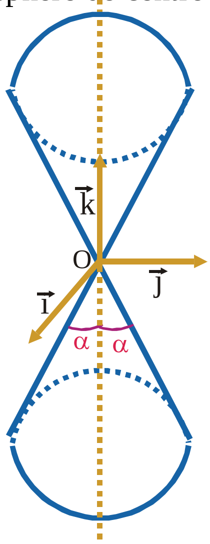
On a :

Si	**alors**	
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$	L_k est • soit vide, • soit réduit à G. • soit un cercle de centre G	S_k est • soit vide • soit réduit à G • soit une sphère de centre G
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$	$\forall$ k $\in \mathbb{R}$; L_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.	$\forall$ k $\in \mathbb{R}$; S_k est un plan de vecteur normal $\vec{u}$.
	$\vec{u}$ étant le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$	

7) Equation cartésienne d'un cercle, d'une sphère, d'un cylindre, d'un cône

- Soit $\Omega(x_0 ; y_0)$ dans un repère orthonormal du plan et R un réel strictement positif.
  L'ensemble M(x ; y) tels que: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre Ω et de rayon R.
- Soit $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ dans un repère orthonormal de l'espace et R un réel strictement positif.
  L'ensemble M(x ; y ; z) tels que: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ est la sphère de centre Ω et de rayon R.
- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
  Le cylindre de rayon R,
  admettant l'axe des côtes
  pour axe de révolution,
  a pour équation cartésienne :
  $x^2 + y^2 = R^2$.





- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
  Un cône de révolution de sommet O,
  admettant l'axe des côtes pour axe de révolution,
  a pour équation cartésienne :
  $x^2 + y^2 - \beta z^2 = 0$, où β est un réel strictement positif.
  ($\beta = \tan^2\alpha$ où 2α est l'angle au sommet du cône).

II. Représentation paramétrique de droites et de plans dans l'espace

Position relative de droites et de plans dans l'espace

1) Equation paramétrique d'une droite dans l'espace

- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné. Soit $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point donné.

L'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $\left| \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad t \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + ct \end{array} \right.$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace

- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

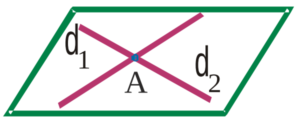
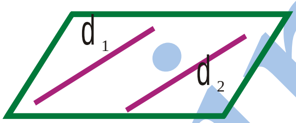
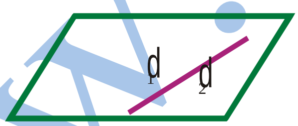
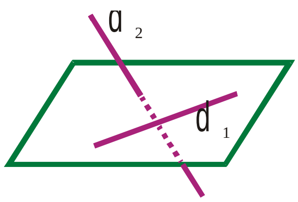
Soit $\vec{u}_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix};\vec{u}_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires donnés.

Soit $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ un point donné. L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que:

$$\begin{cases}x=x_0+a_1t_1+a_2t_2\\y=y_0+b_1t_1+b_2t_2\\z=z_0+c_1t_1+c_2t_2\end{cases};\ (t_1;t_2)\in\mathbf{R}^2$$ est le plan contenant A et de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

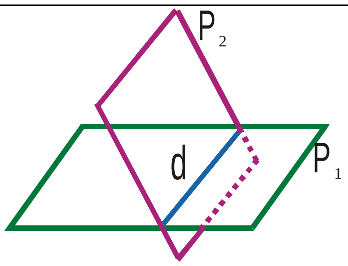
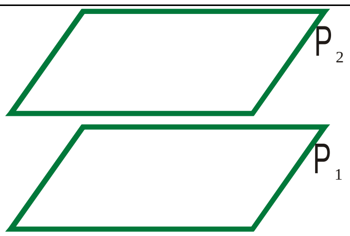
3) Positions relatives de deux droites dans l'espace

Soit $\mathcal{d}_1$ et $\mathcal{d}_2$ deux droites dans l'espace.

coplanaires		non coplanaires
Sécantes  $\mathcal{d}_1\cap\mathcal{d}_2=\{A\}$	Strictement parallèles ($\mathcal{d}_1 // \mathcal{d}_2$)  $\mathcal{d}_1\cap\mathcal{d}_2=\varnothing$  $\mathcal{d}_1=\mathcal{d}_2$ Confondues	Aucun plan ne contient les deux droites  $\mathcal{d}_1\cap\mathcal{d}_2=\varnothing$

4) Positions relatives de deux plans dans l'espace

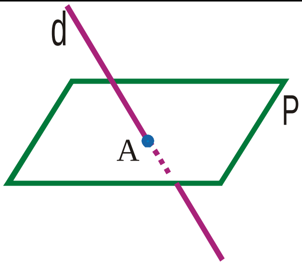
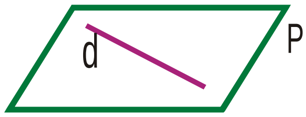
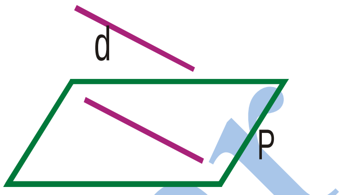
Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans l'espace

Sécants	Parallèles ($\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$)	
 $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\mathcal{d}$	 $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\varnothing$ (strictement parallèles)	 $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2$. Confondue.

Dans tout plan de l'espace, les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent.

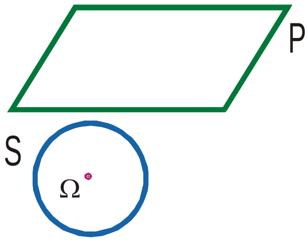
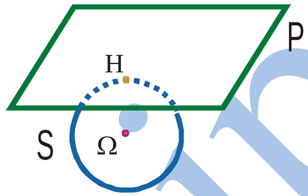
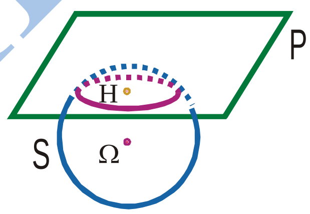
5) Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Soit $\mathscr{d}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

Sécants	Parallèles ($\mathscr{d}$ // $\mathcal{P}$)	
 $\mathscr{d} \cap \mathcal{P} = \{A\}$.	 $\mathscr{d}$ incluse dans $\mathcal{P}$. ($\mathscr{d} \subset \mathcal{P}$)	$\mathscr{d}$ est parallèle strictement à une droite incluse dans $\mathcal{P}$.  $\mathscr{d} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

6) Positions relatives d'une sphère et d'un plan dans l'espace

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R Soit $\mathcal{P}$ un plan. Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.

Disjoints	Sécants	
 $\Omega H > R$ $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.	 $\Omega H = R$ $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}$.	 $\Omega H < R$ $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathscr{C}$ (un cercle)

III. Orientation de l'espace – Produit vectoriel

L'observateur d'Ampère met ses pieds en O, la tête dirigée dans le sens du vecteur $\vec{k}$, son regard dans le sens du vecteur $\vec{i}$; il lève la main gauche qui correspond alors au sens du vecteur $\vec{j}$ sur la figure 1.

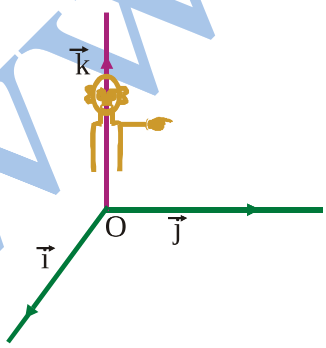


Fig. 1

La main gauche et le vecteur $\vec{j}$ sont dans le même demi espace de frontière (xoz).

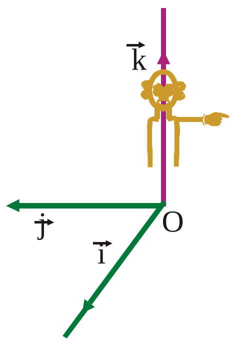


Fig.2

La main gauche et le vecteur $\vec{j}$ ne sont pas dans le même demi espace de frontière (xoz).

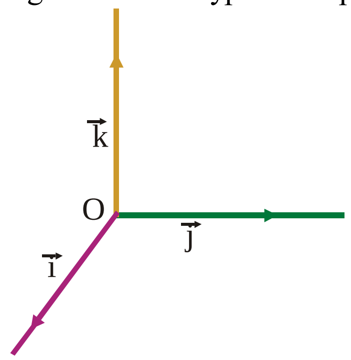
Alors, le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ sur la figure 1 est un repère direct de l'espace et la base $(\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ est une base directe et le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ sur la figure 2 est un repère indirect de l'espace et la base $(\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ est une base indirecte.

1) Orientation de l'espace

L'espace est orienté lorsque on y distingue ces deux types de repères :

- repères directs
- repères indirects

- La représentation standard d'un repère direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ de l'espace est



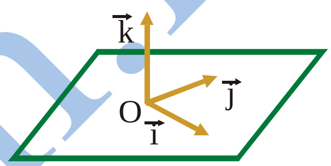
2) Orientation d'un plan dans l'espace

Soit $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ un repère d'un plan $\mathcal{P}$ de l'espace.

Soit $\vec{k}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Si : le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ est un repère direct de l'espace,

alors : le repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ est un repère direct du plan $\mathcal{P}$.



3) Produit vectoriel de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ($\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) est un vecteur.

Si	alors
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\vec{u}\wedge\vec{v}\ =\ \vec{0}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	• La direction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$: $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal au plan de base $(\vec{u};\vec{v})$. • Le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$: $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe. • La norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\lVert\vec{u}\wedge\vec{v}\rVert=\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert\lvert\sin(\vec{u}\ ;\vec{v})\rvert$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}\ ;\vec{v}\ ;\ \vec{w}$ et le réel α :

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$ • $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace, on a :

- $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ ▪ $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ ▪ $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
- $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$ ▪ $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$ ▪ $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$

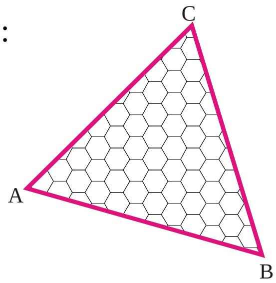
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ de l'espace, alors

- $x_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy'$
- $y_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = zx' - xz'$
- $z_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

- **Aire d'un triangle**

Soit ABC un triangle d'aire $\mathcal{S}$ on a :

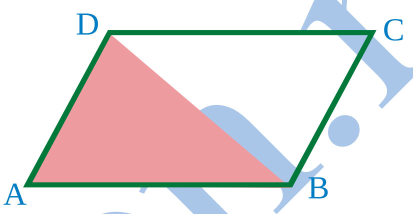
$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$$



- **Aire d'un parallélogramme**

Soit ABCD un parallélogramme d'aire $\mathcal{S}$ on a :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$$



IV. Projection

1) Projections dans l'espace (projections ponctuelles)

Soit $\mathcal{P}$ un plan et d une droite tels que : $\mathcal{P} \cap d = \{A\}$.

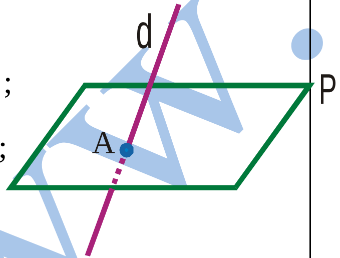
- La projection p_1 sur $\mathcal{P}$ parallèlement à d est définie par :

  M$\in \mathcal{P} \Leftrightarrow p_1$(M) = M ;

  M$\in d \Leftrightarrow p_1$(M) = A ;

  (M$\notin \mathcal{P} \cup d$; p_1(M) = M')

  $\Leftrightarrow$ (M'$\in\mathcal{P}$ et (MM') // d)



- $p_1 \circ p_1 = p_1$

- La projection p_2 sur d parallèlement à $\mathcal{P}$ est définie par :

  M$\in d \Leftrightarrow p_2$ (M) = M ;

  M$\in \mathcal{P} \Leftrightarrow p_2$ (M) = A ;

  (M$\notin d \cup \mathcal{P}$; p_2 (M) = M') $\Leftrightarrow$

  (M'$\in d$ et (MM') // $\mathcal{P}$)

- $p_2 \circ p_2 = p_2$

❖ La projection ponctuelle conserve le barycentre.

2) La projection vectorielle

Soit p une projection ponctuelle et A un point donné d'image A' par p. Notons M' l'image par p d'un point M quelconque.

On appelle projection vectorielle associée à p, l'application notée Π définie par :

$\Pi\,(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel α, on a :

$\Pi(\vec{u}+\vec{v}) = \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{v})$ et $\Pi(\alpha\vec{u}) = \alpha\,\Pi(\vec{u})$.

On résume ces propriétés en disant que Π est une application linéaire.

Savoir- faire

A . Applications

Exercice 1

ABCD un carré de centre O. On pose AB = a (a> 0).

1) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2$.
2) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = -4a^2$.
3) Que représente Δ pour Γ?

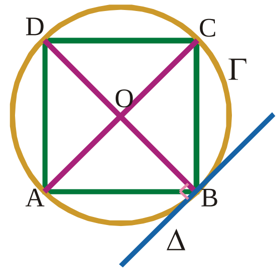
Solution

1) On a $O = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

$AA^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2$

Donc, Γ est le cercle de centre O passant par A,

d'où (Γ est le cercle circonscrit au carré ABCD).



2) on a : 1 + 1 + 1 – 3 = 0, donc Δ est une droite de vecteur normal

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DB}$

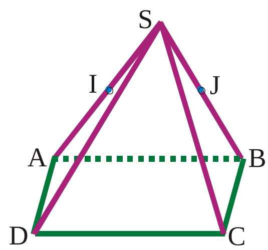
D'où Δ est une droite perpendiculaire à la droite (BD).

Or ; $BA^2 + BB^2 + BC^2 - 3BD^2 = a^2 + a^2 - 3(2a^2) = -4a^2$,

donc $B \in \Delta$, d'où Δ est la perpendiculaire à (BD) en B.

3) Δ est la tangente à Γ en B.

Exercice 2



La pyramide SABCD est à base rectangulaire.

I et J les milieux respectifs de [SA] et [SB].

Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC).

Solution

On a : I $\in$plan (DIJ) ; or I $\in$(SA) et (SA) $\subset$ plan(SAC) ; donc I $\in$plan(SAC),

d'où I $\in$ plan(SAC) $\cap$ plan(DIJ).

On a : C $\in$plan (SAC); or (DC) // (AB) et (AB) // (IJ), donc (DC) // (IJ), d'où (DC) // plan (DIJ); or D$\in$plan (DIJ), donc (DC) $\subset$ plan (DIJ), d'où C$\in$plan (DIJ), donc C$\in$plan (DIJ) $\cap$ plan(SAC).

Donc l'intersection des plans (DIJ) et (SAC) est la droite (IC).

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal .

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation x + y + 3 = 0.

Soit Γ l'ensemble d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

1) Montrer que Γ est une sphère, préciser son centre Ω, et ses coordonnées.

2) Déterminer la position relative de Γ et $\mathcal{P}$.

3) Déterminer les plans tangents à Γ et parallèles à $\mathcal{P}$.

Solution

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (1)^2$; donc Γ est la sphère de rayon R = 1 et de centre $\Omega(1 ; 0 ; 0)$.

2) La distance de Ω au plan $\mathcal{P}$ est : $\dfrac{|1+0+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > R$; donc $\mathcal{P} \cap \Gamma = \varnothing$.

3) Un plan est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si il a une équation de la forme x + y + d = 0 ; $d \in \mathbf{R}$.

Le plan est tangent à Γ si et seulement si $\dfrac{|1+0+d|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}} = R = 1 \Leftrightarrow$

$|1+d| = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + d = \sqrt{2}$ ou $1 + d = -\sqrt{2} \Leftrightarrow d = -1 + \sqrt{2}$ ou $d = -1 - \sqrt{2}$.

Donc, il existe deux plans tangents à Γ et parallèles à $\mathcal{P}$ qui sont :

$\mathcal{P}_1 : x + y - 1 + \sqrt{2} = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + y - 1 - \sqrt{2} = 0$.

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne les points A(1 ; 1 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 1) ; C(-1 ; 1 ; 1).

1) Montrer que les points A ; B ; C ne sont pas alignés.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{d}$ orthogonale au plan (ABC) en A.

Solution

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

- abscisse $\begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} = -1$; • ordonnée $\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{vmatrix} = -2$; • côte $\begin{vmatrix}0 & -2\\-1 & 0\end{vmatrix} = -2$;

Donc ; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A ; B ; C ne sont pas alignés.

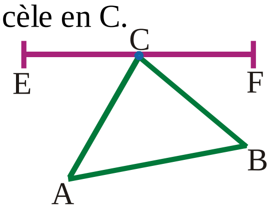
2) Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC),

donc (ABC) a une équation de la forme x + 2y + 2z + d = 0, or $A \in$ plan (ABC),
donc 1 + 2 + d = 0 d'où d = -3.
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est x + 2y +2z -3 = 0.

3) Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{d}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, or d passe par le point A ; donc une représentation paramétrique de $\mathcal{d}$ est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2t \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

B. Exercices

1. ABC un triangle isocèle en C. Le point C est le milieu du segment [EF]. Montrer que : $AE^2 + AF^2 = BE^2 + BF^2$.



2. $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [OB]. A un point de $\mathscr{C}$ distinct de O et B. H est le projeté orthogonal de A sur (OB). Une droite passant par O distincte de (OB) coupe (AH) en N et recoupe $\mathscr{C}$ en M. Montrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OA^2$.

3. A l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les carrés ACEF et BCDG.

1) Montrer que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ et que $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$.
2) En déduire que les segments [BE] et [AD] sont orthogonaux et de même longueur.

4. L'espace est muni d'un repère ort orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère le plan :

$P_1 : x + y + 1 = 0$; $P_2 : x - y + z = 0$.

1) Montrer que P_1 et P_2 sont orthogonaux.
Soit $\mathcal{d}$ leur droite d'intersection, donner une représentation paramétrique de $\mathcal{d}$.
2) Soit A(1 ; 1 ; 1), déterminer les distances de A à P_1 ; P_2 puis à $\mathcal{d}$.

5. ABCD un carré direct de centre O, et de côté AB = a (a > 0).
E est le symétrique de C par rapport à D.

1) Faire une figure.
2) Déterminer les ensembles suivants Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 ; Γ_4 des points M du plan : $M \in \Gamma_1$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = a$; $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow$

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$; $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow$

b) Soit $k \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\}$, Montrer que f_k admet un seul point invariant Ω_k.
Reconnaître f_k et donner ses éléments caractéristiques.

c) Déterminer et construire le lieu géométrique du point Ω_k lorsque k décrit $\mathbf{R}^* \setminus \{1\}$.

d) si $k = \frac{1}{2}$, déterminer et construire le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle de diamètre [CE].

6. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Soit $\mathcal{d}$ la droite passant par le point A(1 ; -1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\mathcal{d}'$ la droite passant par le point B(8 ; -1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Démontrer que les droites $\mathcal{d}$ et $\mathcal{d}'$ sont coplanaires.

7. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

On Considère le cylindre $\mathscr{C}$ d'axe (O ; $\vec{k}$) qui passe par le point A(-3 ; 4 ; 2).

1) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2) Soit le plan P d'équation y = p ($p \in \mathbf{R}$).
Déterminer les valeurs du réel p pour que :

a) P coupe $\mathscr{C}$ suivant une droite
b) P coupe $\mathscr{C}$ suivant deux droites

8. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère le plan P : y = 2 ; la sphère S de centre O et de rayon 3, et le cylindre $\mathscr{C}$ de révolution d'axe (Oy) et de rayon 2.
Déterminer les intersections :
$P \cap S$; $P \cap \mathscr{C}$; $S \cap \mathscr{C}$.

9.

$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}).(2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$; $M\in\Gamma_4 \Leftrightarrow$
$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{ME}\|=\|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$

Que remarquez-vous sur ces ensembles ?

3) Soit $k\in\mathbf{R}^*$. Soit $\boldsymbol{f}$ définie par : $\boldsymbol{f}(M) = M' \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC}$

a) Pour quelles valeurs de k, $\boldsymbol{f}_k$ est elle une translation ?

10 ABC un triangle. 1) Montrer que :
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$

2) En déduire que: $\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$

11 ABCDEFGH un cube.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Déterminer les vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AG}$.

12 Soit ABCD un tétraèdre, on note respectivement B' ; C' ; D' les centres de gravités des triangles ACD ; ABD et ABC.

1) Montrer que les droites (B'D') et (BD) sont parallèles
2) Démontrer que les plans (BCD) et (B'C'D') sont parallèles.

13 On considère dans le plan $\mathcal{P}$ un triangle ABC non équilatéral. On pose : a = BC ; b = AC et c = AB. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G son centre de gravité et H son orthocentre. A' ; B' ; C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] ; [AB].

1) a) Montrer que le point N définie par :
$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ est confondue avec H.
b) En déduire que les points O ; G ; H sont alignés.

2) Montrer que le vecteur $\vec{u}$ définie par :
$\vec{u}=a^2\overrightarrow{BC}+b^2\overrightarrow{CA}+c^2\overrightarrow{AB}$ est différent de $\vec{0}$.

3) Soit $\boldsymbol{f}$ l'application définie de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ qui a tout point M associe le réel :
$\boldsymbol{f}(M)=a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA}+b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB}+c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}$.

a) Déterminer l'image $\boldsymbol{f}(O)$ du point O.
b) Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA'}=\dfrac{1}{6}(b^2-c^2)$.
Calculer de manière analogue $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GC'}$

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$. On donne A(2 ; 0 ; 3) ; B(1 ; 2 ; -1) ; C(5 ; -2 ; 1).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$,
2) Les points A ; B ; C sont-il alignés ?
Sinon, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3) Déterminer une représentation paramétrique de la perpendiculaire à (ABC) en A.

1) Construire G1.
2) Déterminer l'ensemble E_1 des points G_m lorsque m décrit $\mathbf{R}^*$.
3) Déterminer les ensembles suivants :
a) E_2 des points M du plan tel que :
$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$.
b) E_3 des points M du plan tel que :
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 8a^2$.
c) E_4 des points M du plan tel que :
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 9a^2$.
d) E_5 des points M du plan tel que :
$-3a^2 \leq MA^2 - MB^2 + MC^2 \leq 9a^2$.

15 ABCDEFGH un pavé dans l'espace.

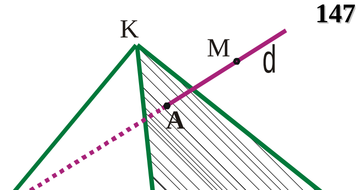
1) Montrer que : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
2) Soit I le point où la droite (AG) perce le plan (BDE)
a) En utilisant la projection sur (AG) dans la direction du plan (BDE), montrer que : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.
b) En utilisant la projection sur le plan (BDE) dans la direction de la droite (AG), montrer que le point I est le centre de gravité du triangle BDE.

16 Soit $\boldsymbol{f}$ l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :
$\boldsymbol{f}(Z)=\dfrac{1}{2}Z+\dfrac{1}{2}i\bar{Z}$

1) Préciser $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}$ et déterminer les ensembles :
$I_f=\{Z\in\mathbf{C}/\ \boldsymbol{f}(Z)=Z\}$; $N_f=\{Z\in\mathbf{C}/\ \boldsymbol{f}(Z)=0\}$.

2) Soit $\boldsymbol{F}$ l'application du plan complexe, dans lui-même qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $\boldsymbol{f}(Z)$.
a) Préciser $\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{F}$ et déterminer les ensembles :
$D=\{M\in P/\ \boldsymbol{F}(M)=M\}$;
$\Delta=\{M\in P/\ \boldsymbol{F}(M)=O(\text{origine du plan complexe})\}$.
b) Démontrer que pour tout $M\in\mathcal{P}$, le point $\boldsymbol{f}(M)$ appartient à D et que pour $M\notin D$, la droite (M $\boldsymbol{F}$(M)). est parallèle à Δ. En déduire que $\boldsymbol{F}$ est

17



c) En déduire la valeur de f(G)

d) Montrer que $f(M) = \overrightarrow{MO} - \vec{u}$.

e) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que $f(M) = 0$

f) Déterminer alors f(H).

14 ABC un triangle rectangle en A. On pose AC = a ; AB = 2a (a > 0). Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On pose :

$$G_m = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline m & -1 & 1 \end{array}$$

18 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :

3x +2y –z = 0 et D la droite définie par M(m ; 5 ; 1) et $\vec{v}\begin{pmatrix} n \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$, m ; n deux réels.

Pour quelles valeurs de m et n la droite D est elle

1) Contenue dans $\mathcal{P}$?
2) Parallèle strictement à $\mathcal{P}$?

19 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation : x +2y –z +1= 0 et D la droite qui passe par A(-1 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $\mathcal{P}$ et D ne sont pas parallèles.
2) f est la projection sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite D.
   Déterminer les coordonnées de l'image par f d'un point M de coordonnés (x ; y ; z).
3) g est la projection sur la droite D parallèlement au plan $\mathcal{P}$.

Déterminer les coordonnées de l'image par g d'un point M de coordonnés (x ; y ; z).

une projection et donner ses éléments caractéristiques.

Soit OIJK un tétraèdre et d une droite passant par O qui est sécante au plan IJK en A. Soit M un point de la droite d. Construire le point d'intersection N du plan (OIJ) et de la parallèle à (OK) passant par M.

20 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. f est l'application qui au point M(x ; y ; z) associe le point M'(x' ; y' ;z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points invariants par f.
2) Démontrer que pour tout point M le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
3) m est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite qui passe par M et de vecteur directeur $\vec{u}$, montrer que : $\overrightarrow{Mm} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$.

   En déduire la nature de f.

CHAPITRE 14

Transformations 1

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I -Transformation dans le plan P

1) Définition

On appelle une transformation dans le plan $\mathcal{P}$ toute bijection f de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

- L'image d'un point M dans le plan par une transformation f est notée f(M) et si f(M) = M, alors on dit que M est point invariant de f.

- L'identité du plan ou application identique du plan $\mathcal{P}$ est la transformation dans $\mathcal{P}$, notée $id_{\mathcal{P}}$ et définie par : $\forall M \in \mathcal{P} : id_{\mathcal{P}}(M) = M$.

- Toute transformation f admet une transformation réciproque notée en général f^{-1}, définie par : $\forall M \in \mathcal{P} ; f(M) = M' \Leftrightarrow f^{-1}(M') = M$.

- La composée de deux transformations f et g est une transformation : $\forall M \in \mathcal{P} : f \circ g(M) = f[g(M)]$; $g \circ f(M) = g[f(M)]$.

- L'opération o n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$ (en général).
- L'opération o est associative ; f ; g ; h étant trois transformations : $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- $id_{\mathcal{P}}$ est l'élément neutre de l'opération o ; f étant une transformation : $f \circ id_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}} \circ f = f$

- f étant une transformation : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathcal{P}}$.
- f et g étant deux transformations : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

- f ; g ; h étant trois transformations :
  $g = f \Leftrightarrow h \circ g = h \circ f$.
  $g = f \Leftrightarrow g \circ h = f \circ h$.
  $g \circ f = h \Leftrightarrow g = h \circ f^{-1}$.

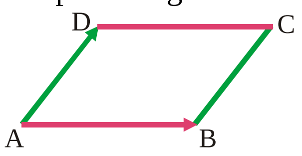
2) Des transformations usuelles dans le plan

a) Translation

- Une translation a un seul élément caractéristique qui est son vecteur (un vecteur donné $\vec{u}$), on la note $\mathbf{t}_{\vec{u}}$
- $\mathbf{t}_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ | • $(\mathbf{t}_{\vec{u}})^{-1} = \mathbf{t}_{(-\vec{u})}$; | • $\mathbf{t}_{\vec{0}} = \mathbf{id}_P$;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\mathbf{t}_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant ; A et B sont deux points donnés ; $\mathbf{t}_{\overrightarrow{AB}}$ est l'unique translation qui transforme A en B.
- $\mathbf{t}_{\overrightarrow{AB}}(M) = M' \Leftrightarrow$ ABM'M est un parallélogramme.

Une figure de translation

- Un parallélogramme ABCD



$t_{\overrightarrow{AB}} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto B \\ D \mapsto C \end{array} \right.$; $t_{\overrightarrow{AD}} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto D \\ B \mapsto C \end{array} \right.$

b) Homothétie

- Une homothétie a deux éléments caractéristiques qui sont : son centre (un point donnéΩ), son rapport (un réel non nul donné k), On la note $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}$; $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}(\Omega) = \Omega$
  $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$,
- $(\boldsymbol{H}_{\Omega\,;\,k})^{-1} = (\boldsymbol{H}_{\Omega\,;\,\frac{1}{k}})$.
- $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,1)} = \boldsymbol{id}_P$.
- $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,-1)} = \boldsymbol{S}_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω)
- Si $k \neq 1$, alors $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.

En plus ;

Si $M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M'$, alors les points Ω ; M ; M' sont alignés.

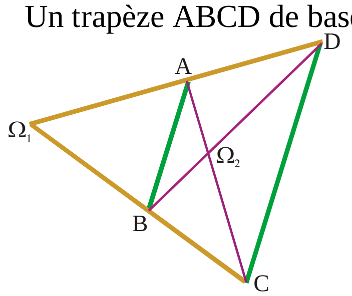
- Soit $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{array} \right.$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
- A ; B ; C étant trois points alignés ; $H_{(A\,;\,B \to C)}$; désigne l'homothétie de centre A qui transforme B en C,

son rapport est $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \begin{cases} \dfrac{AC}{AB} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de même sens} \\ -\dfrac{AC}{AB} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

- $[\boldsymbol{H}_{(A\,;\,B \to C)}]^{-1} = \boldsymbol{H}_{(A\,;\,C \to B)}$.

Une figure d'homothétie

Un trapèze ABCD de bases (AB) et (CD)



$\{\Omega_1\} = (AD) \cap (BC)$; $\{\Omega_2\} = (AC) \cap (BD)$

$\boldsymbol{H}_1(\Omega_1\,;\,A \mapsto D) : \left| \begin{array}{l} A \mapsto D \\ B \mapsto C \end{array} \right.$; de rapport $\dfrac{CD}{AB}$

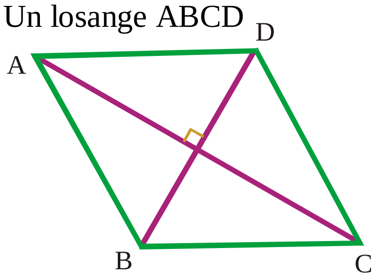
$$\boldsymbol{H}_2(\Omega_2\,;\,A\mapsto C) : \left| \begin{array}{l} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{array} \right. \;;\; \text{de rapport } -\frac{CD}{AB}$$

c) Réflexion (symétrie orthogonale)

- Une réflexion a un seul élément caractéristique qui est son axe (une droite Δ), elle est notée S_Δ.
- $S_\Delta(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$ (les points invariants de S_Δ sont les points de la droite Δ).
- $M \notin \Delta$ et $S_\Delta(M) = M'$ $\Leftrightarrow$ Δ est la médiatrice de [MM'],
- $\boldsymbol{S}^{-1}_\Delta = S_\Delta$
- $\boldsymbol{S}_\Delta \circ \boldsymbol{S}_\Delta = \boldsymbol{id}_P$.
- A et B étant deux points distincts, la réflexion d'axe la médiatrice de [AB] est l'unique réflexion qui transforme A en B.

Une figure de réflexion

Un losange ABCD



$$\boldsymbol{S}_{AC} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ C \mapsto C \\ B \mapsto D \\ D \mapsto B \end{array} \right. \quad ; \quad \boldsymbol{S}_{BD} : \left| \begin{array}{l} B \mapsto B \\ D \mapsto D \\ A \mapsto C \\ C \mapsto A \end{array} \right.$$

d) Rotation

Une rotation a deux éléments caractéristiques qui sont son centre (un point donné Ω), son angle (un réel donné α), on la note $\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)}$.

- $\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)}(\Omega) = \Omega$
- $M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi] \end{array} \right.$
- $[\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)}]^{-1} = \boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,-\alpha)}$

En plus

Si	**alors**
$\alpha = 0\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)} = \boldsymbol{id}_P$.
$\alpha = \pi\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)} = S_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω)
$\alpha \neq 0\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}_{(\Omega\,;\,\alpha)}$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.

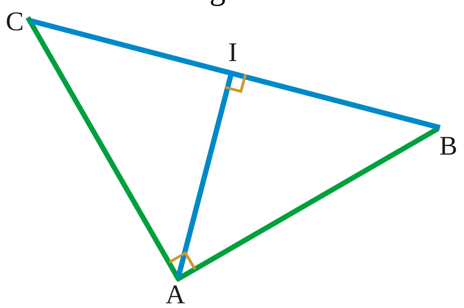
On a	**Si et seulement si**
$M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{R}_{(\Omega;\,\frac{\pi}{2})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est isocèle rectangle directe en Ω.
$M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{R}_{(\Omega;\,-\frac{\pi}{2})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est isocèle rectangle indirecte en Ω.
$M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{R}_{(\Omega;\,\frac{\pi}{3})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral direct
$M \neq \Omega$ et $\boldsymbol{R}_{(\Omega;\,-\frac{\pi}{3})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral indirect

- Si $\boldsymbol{R}$ est une rotation d'angle $\alpha \neq 0$, qui transforme A en B, alors le centre de $\boldsymbol{R}$ appartient à la médiatrice de [AB].

- Si **R** est la rotation d'angle α qui transforme A en A' et B et B' deux points tels que : AB = A'B' et $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$, alors ***R*** transforme B en B'.

Des figures de rotation

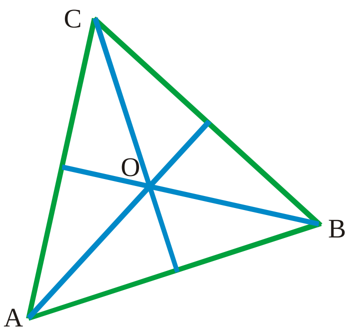
- ABC un triangle isocèle direct en A, I milieu de [BC].



$$\boldsymbol{R}_{(A\,;\,\frac{\pi}{2})} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto C \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{R}_{(I\,;\,\frac{\pi}{2})} : \left| \begin{array}{l} I \mapsto I \\ C \mapsto A \\ A \mapsto B \end{array} \right.$$

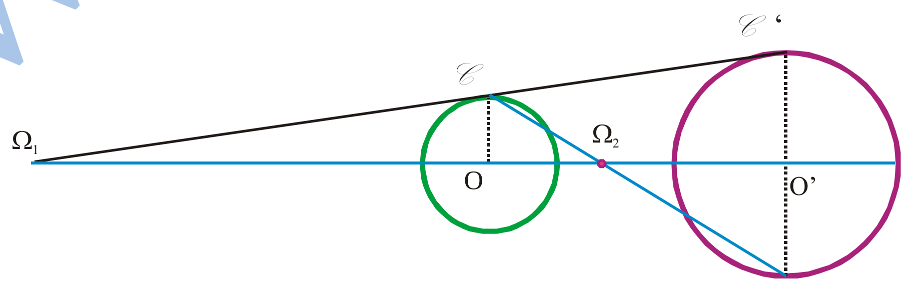
- ABC un triangle équilatéral direct de centre O.



$$\boldsymbol{R}_{(A\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto C \end{array} \right. ;\ \boldsymbol{R}_{(B\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} B \mapsto B \\ C \mapsto A \end{array} \right. ;\ \boldsymbol{R}_{(C\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} C \mapsto C \\ A \mapsto B \end{array} \right. ;$$

$$\boldsymbol{R}_{(O\,;\,\frac{2\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} O \mapsto O \\ A \mapsto B \\ B \mapsto C \\ C \mapsto A \end{array} \right.$$

- Chacune des quatre transformations citées en haut, conserve : le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le milieu, l'alignement, les angles géométriques et le contact.
- Chacune des quatre transformations, transforme
  - une droite d en une droite d' (dans le cas d'une translation ou d'une homothétie, on a d // d'.
  - un segment [AB] en le segment [A'B'] où A' et B' sont les images respectifs de A et B.
  - un cercle $\mathscr{C}$ en un cercle $\mathscr{C}$'(le centre de $\mathscr{C}$' est l'image du centre de $\mathscr{C}$).



$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs, r et r' ($r \neq r'$).

Il existe deux homothéties seulement qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$' l'une de centre

$\Omega_1 = \text{bar}\begin{array}{c|c} O & O' \\ \hline -r' & r \end{array}$ et de rapport $\frac{r'}{r}$; l'autre de centre $\Omega_2 = \text{bar}\begin{array}{c|c} O & O' \\ \hline r' & r \end{array}$ et de rapport $-\frac{r'}{r}$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

On a	**Si et seulement si**
f : M(Z) $\to$ M'(Z') Z' = Z + b ; avec $b \in \mathbb{C}$ donné	f : est la translation de vecteur d'affixe b.
f : M(Z) $\to$ M'(Z') Z' = kZ + b ; avec $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$; $b \in \mathbb{C}$, donné	f : est l'homothétie de rapport k et de centre le point d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$. En plus, Z'- ω = k(Z -ω).
f : M(Z) $\to$ M'(Z') Z' = aZ + b ; avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$; $b \in \mathbb{C}$, $\lvert a \rvert = 1$; a et b donnés	f : est la rotation d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre le point d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. En plus : Z'- ω = $e^{i\alpha}$(Z -ω).

3) Des composées

a) Composées de translations et d'homothéties

Composée de	
Deux translations	$\boldsymbol{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}}$ **et** $\boldsymbol{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}}$
Deux homothéties de mêmes centres	$\boldsymbol{H_1 = H_{(\Omega 1\,;\,k1)}}$; $\boldsymbol{H_2 = H_{(\Omega 1\,;\,k2)}}$ $\boldsymbol{H_1 \circ H_2 = H(\Omega_1\,;\,k_1k_2)}$ et $\boldsymbol{H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1}$.
Deux homothéties de centres distincts	$\boldsymbol{H_1 = H_{(\Omega 1\,;\,k1)}}$; $\boldsymbol{H_2 = H_{(\Omega 2\,;\,k2)}}$ **Si** — **alors** $k_1k_2 = 1$: $\boldsymbol{H_1 \circ H_2}$ et $\boldsymbol{H_2 \circ H_1}$ sont chacune une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ $k_1k_2 \neq 1$: $\boldsymbol{H_1 \circ H_2}$ et $\boldsymbol{H_2 \circ H_1}$ sont chacune une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre appartenant à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$.
D'une homothétie et d'une translation	$\boldsymbol{t = t_{\vec{u}}}$ et $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\Omega; k)$; $\vec{u} \neq \vec{0}$; $k \neq 1$. $\boldsymbol{t \circ H}$ et $\boldsymbol{H \circ t}$ sont chacune une homothétie de rapport k et dont le centre appartient à la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Composées de deux réflexions

Composée de	
Deux réflexions d'axes strictement parallèles	$\boldsymbol{S_\Delta}$ et $\boldsymbol{S_{\Delta'}}$ avec Δ // Δ' $\boldsymbol{S_\Delta \circ S_{\Delta'}}$ **et** $\boldsymbol{S_{\Delta'} \circ S_\Delta}$ sont deux translations réciproques. $\boldsymbol{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\vec{IJ}}}$; avec $I \in \Delta$; $J \in \Delta'$; $(IJ) \perp \Delta$.
Deux réflexions d'axes sécants	$\boldsymbol{S_\Delta}$ et $\boldsymbol{S_{\Delta'}}$ avec Δ et Δ' sécants, $\boldsymbol{S_\Delta \circ S_{\Delta'}}$ **et** $\boldsymbol{S_{\Delta'} \circ S_\Delta}$ sont deux rotations réciproques, avec $\{\Omega\} = \Delta \cap \Delta'$ on a : $\boldsymbol{S_{\Delta'} \circ S_{\Delta'} = R(\Omega\,;\,2(\Delta,\Delta'))}$

En plus

- Toute translation $\boldsymbol{t}$ de vecteur non nul $\vec{u}$ peut s'écrire (d'une infinité de manières) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{S}_{\Delta}$ avec Δ une droite de vecteur normal $\vec{u}$ et $\Delta' = \boldsymbol{t}_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.
- Toute rotation $\boldsymbol{R}\,(\Omega\,;\,\alpha\,)$ d'angle non nul α, peut s'écrire (d'une infinité de manières) $\boldsymbol{R}\,(\Omega\,;\,\alpha\,) = \boldsymbol{S}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{S}_{\Delta}$ avec Δ une droite passant par Ω et $\Delta' = \boldsymbol{R}_{(\Omega,\frac{1}{2}\alpha)}(\Delta)$.

c) Composées de translations et de rotations

<table>
<tr><th>Composée de</th><th></th></tr>
<tr><td>Deux rotations de même centre</td><td>$\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}\,(\Omega\,;\,\alpha_1\,)\,;\,\boldsymbol{R_2} = \boldsymbol{R}\,(\Omega\,;\,\alpha_2\,)$
$\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}\,(\Omega\,;\,\alpha_1 + \alpha_2\,)$ et $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$</td></tr>
<tr><td>Deux rotations de centres différents</td><td>$\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}\,(\Omega_1\,;\,\alpha_1\,)\,;\,\boldsymbol{R_2} = \boldsymbol{R}\,(\Omega_2\,;\,\alpha_2\,)$
<table>
<tr><th>Si</th><th>alors</th></tr>
<tr><td>$\alpha_1 + \alpha_2 = 0\,;\,[2\pi]$</td><td>$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$ sont chacune une translation</td></tr>
<tr><td>$\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0\,;\,[2\pi]$</td><td>$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$ sont chacune une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Une translation et une rotation</td><td>$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ et $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{(\Omega,\alpha)}$; $\boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{t}$ sont chacune une rotation d'angleα.</td></tr>
</table>

II –Des transformations usuelles dans l'espace

1) L'application identique dans l'espace $\mathscr{E}$

Elle est notée $\boldsymbol{id}_{\mathscr{E}}$ $\forall M \in \mathscr{E}$: $id_{\mathscr{E}}(M) = M$

2) Translation et homothétie dan l'espace $\mathscr{E}$

a) Comme dans le plan, une translation dans l'espace a un seul élément caractéristique qui est son vecteur

(un vecteur $\vec{u}$ donné) ; $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- L'image d'une droite est une droite parallèle
- L'image d'un plan est un plan parallèle

b) Comme dans le plan, une homothétie dans l'espace a deux éléments caractéristiques qui sont son centre (un point donné Ω) et son rapport (un réel non nul donné k).

Elle est notée $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}$. $\boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

- un point et son image sont alignés avec le centre.
- l'image d'une droite est une droite parallèle.
- l'image d'un plan est un plan parallèle
- une symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de même centre et de rapport -1 ;

  ($S_{\Omega} = \boldsymbol{H}_{(\Omega\,;\,-1)}$).

3) Réflexion

Une réflexion dans l'espace a un seul élément caractéristique qui est son plan (un plan donné).
Elle est notée, $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$.

- $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}$ (les points invariants de $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$ sont les points du plan $\mathcal{P}$).
- $M \notin \mathcal{P}$ et $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}(M) = M' \Leftrightarrow \mathcal{P}$ est le plan médiateur de [MM'].
- $(\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}})^{-1} = \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$
- $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{E}}$
- Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles ;
  $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'} = \boldsymbol{t}_{2\overrightarrow{IJ}}$ (tels que : $I \in \mathcal{P}$; $J \in \mathcal{P}'$ et $\overrightarrow{IJ}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$) .

4) Rotation

Une rotation dans l'espace a deux éléments caractéristiques qui sont, son axe
(une droite donnée Δ) et son angle (un réel donné α).
Elle est notée $\boldsymbol{R}\,(\Delta\,;\alpha)$.

si	**alors**
$\alpha = 0\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}\,(\Delta\,;\alpha) = \boldsymbol{id}_{\mathcal{E}}$
$\alpha = \pi\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}\,(\Delta\,;\alpha)$ est appelé un demi-tour d'axe Δ

- Si $\alpha \neq 0\ [2\pi]$; $\boldsymbol{R}_{(\Delta\,;\,\alpha)}(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$
  (les points invariants de $\boldsymbol{R}_{(\Delta\,;\,\alpha)}$ sont les points de son axe Δ).

- $M \notin \Delta$ et $\boldsymbol{R}_{(\Delta\,;\,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow$
  $\left| \begin{array}{l} mM = mM' \\ (\overrightarrow{mM}\ ;\ \overrightarrow{mM'}) = \alpha (2\pi) \end{array} \right.$ avec m le point où Δ perce le plan orthogonal à Δ contenant M.

- Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.
  Une rotation $\boldsymbol{R}$, dans l'espace, invarie globalement le triangle (ABC) si et seulement si son axe est la droite Δ orthogonale au plan (ABC) en O.
  En plus, l'angle de **R** est soit 0 ; soit $\frac{2\pi}{3}$, soit $-\frac{2\pi}{3}$.

- Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants suivant une droite Δ, $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'}$ et $\boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$,
  sont chacune une rotation d'axe Δ.

- En plus une rotation, une réflexion conservent les volumes.

- Une homothétie de rapport k multiplie les volumes par $|k^3|$.

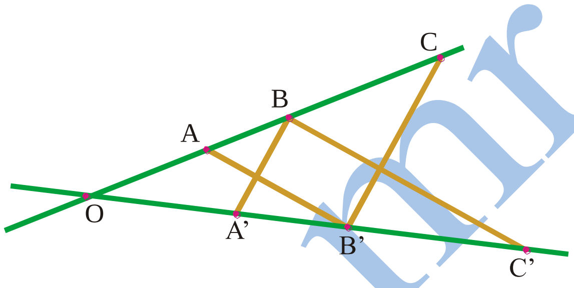
Savoir-faire
A. Applications

Exercice 1

Dans cette figure O ; A ; B ; C sont alignés. O ; A' ; B' ; C' sont alignés.
(AB') et (BC') sont parallèles
et (BA') et (CB') sont parallèles.
On se propose de montrer que (AA') et (CC') sont parallèles.

Soit $H_1 = H(O\ ; A \to B)$; $H_2 = H(O\ ; B \to C)$

1. Déterminer $H_2 \circ H_1$ (A) et $H_1 \circ H_2$(A')
2. Conclure.



Solution

1) $H_2 \circ H_1$ (A) = H_2 [H_1 (A)] = H_2 (B) = C.

$\boxed{H_2 \circ H_1 \text{ (A)} = \text{C}}$

$H_1 \circ H_2$(A') = H_1 [H_2(A')] . Or H_2(B) = C et (BA') // (CB'), donc H_2((BA')) = (CB'), d'où H_2(A') est le point d'intersection de (CB') avec (OA'), qui est B'.

Donc, $H_1 \circ H_2$(A') = H_1(B'), or H1(A) = B et (AB') // (BC').

Donc, H_1(AB')= (BC'), donc H_1(B') est le point d'intersection de (BC') avec (OB') qui est C'.

Donc, $\boxed{H_1 \circ H_2\text{(A')} = \text{C'}}$

2) Comme H_1 et H_2 ont le même centre, donc $H_2 \circ H_1 = H_1 \circ H_2$,

Or une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, donc $\boxed{\text{(AA') // (CC')}}$.

Exercice 2

ABCD un quadrilatère direct,

AEB et CGD deux triangles équilatéraux directs.

BFC et DHA deux triangles équilatéraux indirects.

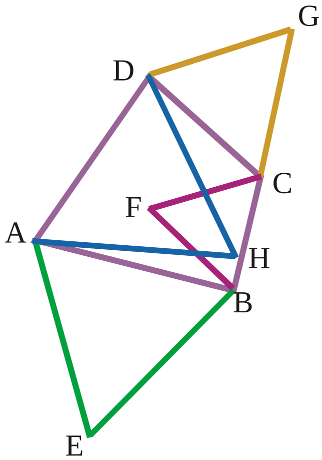
Soit $R_1 = R\ (A, \frac{\pi}{3})$ et $R_2 = R\ (C, -\frac{\pi}{3})$. On pose $f = R_2 \circ R_1$.

1.) Quelle est la nature de la transformation f ?

2.) Déterminer f(E) et caractériser f.

3.) Déterminer f(H).

En déduire la nature du quadrilatère EFGH.



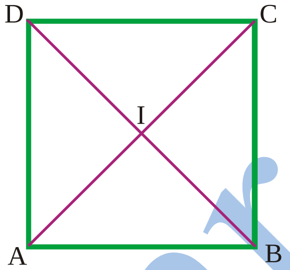
Solution

1.) Comme $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$, donc $\boldsymbol{f}$ est une translation

2.) $\boldsymbol{f}$(E) = $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$ (E) = $\boldsymbol{R_2}$ (B) = F ; donc $\overrightarrow{EF}$ est le vecteur de $\boldsymbol{f}$.

3.) $\boldsymbol{f}$(H) = $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$ (H) = $\boldsymbol{R_2}$(D) = G, donc $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, donc EFGH est un parallélogramme.

Exercice 3



ABCD un carré direct de centre I.Soit $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{AD}}$; $\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}(A, -\frac{\pi}{2})$;

$\boldsymbol{R_2} = \boldsymbol{R}(B, -\frac{\pi}{2})$; On pose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$.

1) Déterminer $\boldsymbol{f}$(A) et caractériser la transformation $\boldsymbol{f}$
2) Déterminer $\boldsymbol{g}$(A) et caractériser la transformation $\boldsymbol{g}$.
3) Dans le plan complexe, on désigne par a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D. Exprimer c et d à l'aide de a et b.

Solution

1) $\boldsymbol{f}$(A) = $\boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{R_1}$(A) = $\boldsymbol{t}$(A) = D.

Or $\boldsymbol{f}$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$,

Donc, $\boldsymbol{f}$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Or $\boldsymbol{f}$(A) = D et I A = ID et $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{ID}) = -\frac{\pi}{2}$, Donc I est le centre de $\boldsymbol{f}$ = R(I ; $-\frac{\pi}{2}$).

2) $\boldsymbol{g}$(A) = $\boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$ (A) = $\boldsymbol{R_2}$(A) = C .

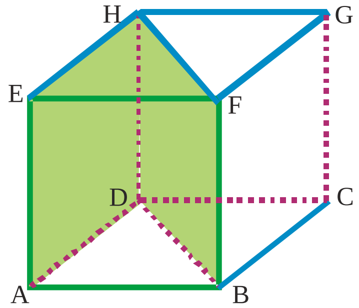
Or $-\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} = -\pi = \pi \quad (2\pi)$,

Donc, $\boldsymbol{g}$ est une rotation d'angle π; donc $\boldsymbol{g}$ est une symétrie centrale,
Or **g**(A) = C et I milieu de [AC], donc I est le centre de $\boldsymbol{g}$.
Donc $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{S}_I$.

3) Comme : $\boldsymbol{R}(B, -\frac{\pi}{2})$: A :↦ C ; donc $c - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - b)$; donc c = -ia + ib + b ;

Comme D = Bar $\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}$; Donc, d = a – b + c = a – ia + ib.

Exercice 4



ABCDEFGH est un cube.
$(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.
Soit $\mathcal{P}$ le plan (ABE), $\mathcal{P}'$ le plan (ACE).
On pose : $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$
1.) Quelle est la nature de la transformation $\boldsymbol{f}$.
2.) Déterminer $\boldsymbol{f}$(B) et caractériser $\boldsymbol{f}$.

Solution

1) Comme les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivants la droite (AE), donc : $\boldsymbol{f}$ est une rotation d'axe (AE).

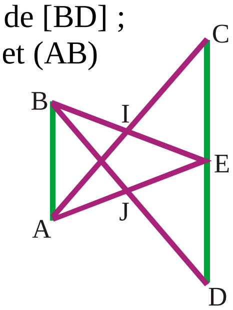
2) f (B) = $S_{P'}$ o S_P(B) = $S_{P'}$(B) = D, (car c'est le plan médiateur de [BD]).
Or, (A , $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$) est u repère orthonotmal direct de l'espace.

Donc, ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$) = $\frac{\pi}{2}$; l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$.

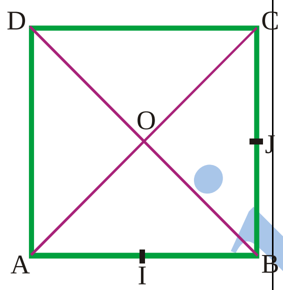
Donc ; f = $\boldsymbol{R}$((AE) ; $\frac{\pi}{2}$).

B. Exercices

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. I milieux de [AC] ; J milieux de [BD] ;
Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
Indication : utiliser les es homothéties :
H_1(I ; A$\mapsto$C) et
H_2(J, D$\mapsto$B).



2. ABCD est un carré direct de centre O. I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
1) Caractériser S_{OI} o S_{AD} ; S_{CD} o S_{OJ} ; S_{AB} o S_{AC} ; S_{AC} o S_{BD}.
2) Ecrire de deux façons différentes sous la forme de la composée de deux réflexions : $t_{\overrightarrow{BA}}$; $t_{\overrightarrow{AC}}$; $t_{\overrightarrow{OC}}$;



$\boldsymbol{R}$(O; $\frac{\pi}{4}$) ; $\boldsymbol{R}$(C; $\frac{\pi}{4}$) ; S_O .

3. ABCD un parallélogramme direct, IAB un triangle isocèle rectangle indirect ; BCEF et AGHD deux carrés indirects de centre respectifs J et K.

Soit $\boldsymbol{R}$ la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1) Déterminer $\boldsymbol{R}$(B), $\boldsymbol{R}$ (C) ; $\boldsymbol{R}$ (F) et $\boldsymbol{R}$ (E).
2) En déduire que $\boldsymbol{R}$ (J) = K, puis donner la nature du triangle IJK.

4. ABCD un parallélogramme direct, EBA et FCB deux triangles isocèles rectangles directs en E et F respectivement.
On se propose de montrer que le triangle DEF est isocèle rectangle en E.
Méthode 1 : Soit $t = t_{\overrightarrow{AB}}$; $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{(B\,;\,-\frac{\pi}{2})}$. On pose $g = \boldsymbol{R}$ o t.
a) Quelle est la nature de la transformation g ? Déterminer g(A) et caractériser g.
b) Déterminer f(D) et conclure.

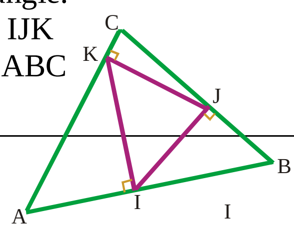
5. Caractériser la transformation f dans chacun des cas :
1) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; Z' = Z + 2 + i ; 2) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; Z' = iZ +1
3) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z'); $Z' = (\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)Z$; 4) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; $Z' = \overline{Z}$;
5) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; Z' =-iZ ; 6) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; $Z' = -\overline{Z}$;
7) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; $Z' = \frac{1}{2}Z + i$

6. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et D une droite qui coupe ce cercle en deux points A et B.
1) Construire le symétrique orthogonal $\mathscr{C}$' de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D et démontrer qu'il existe une unique translation qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'.
2) Démontrer que l'image de A par la translation t est le point A' diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$.
3) Soit M un point quelconque sur le cercle $\mathscr{C}$ et M' son image par la translation t. Quel rôle joue le point B pour le triangle AMM' ? Justifier.

7. On donne dans le plan deux points A et B et une droite D distinct de la droite (AB). Un point M décrit la droite D. On appelle N le symétrique de A par rapport au milieu du segment [BM]. Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque M décrit la droite D.

8. Soit A et B deux points distincts du plan P. soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan qui est tangent à la droite (AB) en A. On note O le centre de $\mathscr{C}$ et G le centre de gravité du triangle ABO. Déterminer le lieu géométrique de chacun des points O et G lorsque le cercle $\mathscr{C}$ prend toutes les positions possibles en restant tangent à (AB) en A.

9. Soit ABC un triangle.
Construire un triangle IJK inscrit dans le triangle ABC et dont les cotés sont

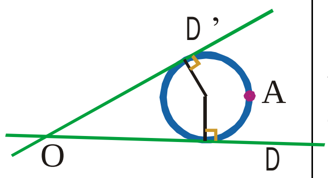


Méthode 2 : On désigne par a ; b ; c ; d ; e ; f les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F dans le plan complexe.

a) Exprimer d, e, f à l'aide de a ; b ; c.

b) Evaluer $\dfrac{d-e}{f-e}$, puis conclure.

Construire un cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A et tangent aux deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$'.



a) Déterminer la nature des transformations $\mathbf{r_1}$ et r_2

b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$. Que peut-on en déduire ?

c) En déduire que $\boldsymbol{f}$ est une réflexion dont on précisera l'axe.

3)a) Montrer que $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC}\ ;\ \overrightarrow{KP})$, (π) et écrire deux relations semblables.

b) Vérifier que : $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$; (π).

c) En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC.

11 On considère trois triangles équilatéraux OAB, OCD, OEF. On suppose que les angles $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$;$(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{OE}\ ;\ \overrightarrow{OF})$ ont pour mesure principale $\dfrac{\pi}{3}$. Soit P ; Q ; R les milieux respectifs de [BC] ;[DE] ; [FA]. On se propose de montrer que le triangle PQR est équilatéral. Soit P' ; Q' ; R' les points tels que les quadrilatères BOCP' ; DOEQ' ; FOAR' soient des parallélogrammes.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, on pose : $\boldsymbol{f} = r \circ \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{BO}}$.

a) Quelle est la nature de $\boldsymbol{f}$, déterminer $\boldsymbol{f}$(B) et caractériser $\boldsymbol{f}$.

b) Déterminer $\boldsymbol{f}$(P'). En déduire la nature du triangle AP'D.

2) On pose : $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OA}} \circ r \circ \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{DO}}$.

a) Déterminer $\boldsymbol{g}$(D) et caractériser $\boldsymbol{g}$.

b) Déterminer g(Q'). En déduire la nature du triangle P'Q'R'.

c) Conclure.

12 Dans le plan, A et B sont deux points distincts donnés.

perpendiculaires à ceux de ABC.

10 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' deux droites sécantes en O et un point A n'appartient ni à $\mathcal{D}$, ni à $\mathcal{D}$'.

1) Montrer que le point J milieu de [M'M''] est fixe dans le plan et que J appartient au cercle de diamètre [AB].

2.) a) Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a :

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MM''}) - \dfrac{\pi}{2}$.

b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan tels que M ; M' ; M'' soient alignés.

13 Dans le plan orienté, on considère trois cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 de même rayon concourants en un point K, de centre respectifs M ; N ; P tels que :

- Γ_1 et Γ_2 se recoupent en A ;
- Γ_2 et Γ_3 se recoupent en B ;
- Γ_3 et Γ_1 se recoupent en C ;

1) Faire une figure ;

2) On pose $r_1 = S_{KB} \circ S_{KA}$; $r_2 = S_{KP} \circ S_{KC}$, $\boldsymbol{f} = S_{KB} \circ S_{KA} \circ S_{KC}$.

a) Déterminer la nature des transformations $\mathbf{r_1}$ et r_2

b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$. Que peut-on en déduire ?

c) En déduire que $\boldsymbol{f}$ est une réflexion dont on précisera l'axe.

3)a) Montrer que $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC}\ ;\ \overrightarrow{KP})$, (π) et

écrire deux relations semblables.

b) Vérifier que : $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$ (π).

c) En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC.

14 On donne deux triangles ABC et DEF equilatéraux directs. Soit G et H deux points tels que les quadrilatères EDBG et CDFH soient des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de montrer que le triangle AGH est équilatéral direct.

1) Construire une figure soignée.

2) Soit $\boldsymbol{t}_1$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$; $\boldsymbol{t}_2$ la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$; soit r la rotation de

$r_A = \boldsymbol{R}(A, -\frac{\pi}{3})$; et M' = r_A (M) pour tout point M du plan . $r_B = \boldsymbol{R}(B, \frac{2\pi}{3})$ et M'' = r_B (M) pour tout point M du plan.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ soient les nombres complexes a ; b ; c ; d ; e ; f ; g ; h affixes des points A ;B ; C ; D ; E ; F ; G ; H respectivement.

a) Montrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$, puis exprimer (f – d) en fonction de (e – d).

b) Exprimer g en fonction des nombres e ; d ; b, puis h en fonction de c ; d ; f.

c) Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (g- a) et en déduire le but de l'exercice.

15 On considère un triangle ABC. Soit I ; J ; K les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ; [AB]. G est le centre de gravité du triangle ABC. A tout point M du plan, on associe ses symétriques P ; Q ; R respectivement par rapport à I ; J ; K.

1) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.
2) Démontrer que les segments [BQ] ; [CR] et [AP] sont concourants en leur milieu qu'on désignera par O.
3) Démontrer que les points M ; G ; O sont alignés.

16 ABCDEFGH est un cube de centre O. On note I le centre de gravité du triangle DEH et J celui du triangle ABG.
Démontrer que les points I ; O ; J sont alignés

17 Dan un tétraèdre ABCD, I est le milieu de l'arête [CD], M un point de la droite (AI).
Le plan parallèle au plan (ABC) passant par M coupe la droite (CD) en N.
Le plan parallèle au plan (ABD) passant par M coupe la droite (CD) en P.
En utilisant une homothétie de centre I, démontrer que I est le milieu du segment [NP].

centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{t}_2 \circ r \circ \boldsymbol{t}_1$.

a) Montrer que $\boldsymbol{R}$ est une rotation dont on déterminera l'angle.
b) Déterminer $\boldsymbol{R}$(B) et en déduire le centre de $\boldsymbol{R}$.
c) Déterminer $\boldsymbol{R}$(G) et en déduire le but de l'exercice.

18 ABCDEFGH est un cube d'arête a et de centre O.

1) Montrer que les triangles BED et CHF sont équilatéraux.
2) Soit I et J les centres respectifs de BED et CHF,

a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$,

b) En déduire que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$ et que O est le
milieu de [IJ].

3) Soit $\boldsymbol{S}_1$ la réflexion de plan (BAG) et $\boldsymbol{S}_2$ la réflexion de plan (DAG). On pose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S}_1 \circ \boldsymbol{S}_2$.

a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est une rotation, puis déterminer
$\boldsymbol{f}$(G) et $\boldsymbol{f}$(A). Que peut-on en déduire ?
b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale aux deux plans (BED) et (CHF).
c) Montrer que $\boldsymbol{f}$ invarie globalement chacun des deux triangles BED et (CHF).
d) En déduire l'angle de $\boldsymbol{f}$ relativement à un axe orienté dont on précisera l'orientation.

CHAPITRE 15

Transformations 2

Faire savoir

L’essentiel du chapitre

I. Isométrie dans le plan

1) Définition

On appelle isomètrie plane ou isomètrie dans le plan, toute transformation dans le plan qui consrve la distance.

Par exemple : une translation, une rotation, une refléxion.

- id_P est une isomètrie
- la reciproque d’une isomètrie est une isomètrie
- la composée de deux isométries est une isomètrie.

- si A est un point invariant d’une isométrie ***f*** .
  alors, A appartient à la médiatrice de tout segment de la forme [MM’] avec M un point quelconque du plan non invariant par ***f*** et M’ = ***f***(M).

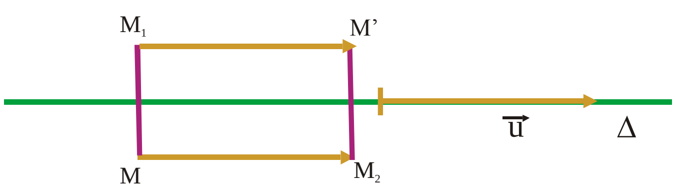
- si A et B sont deux points distincts invariants par une isométrie ***f***, alors tout point de la droite (AB) est invariant par ***f***.

- une isométrie ayant trois points distincts 2 à 2 non alignés et invariants est l’identité du plan.
- une isométrie conserve l’aire, le produit scalaire,
- l’image d’un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

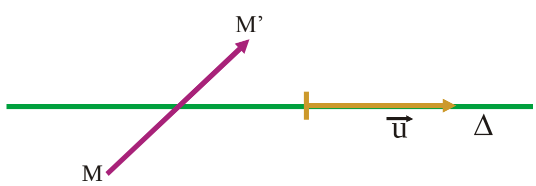
2) Symétrie glissante

- Une symétrie glissante a deux éléments caractéristiques qui sont : son vecteur (un vecteur non nul $\vec{u}$ donné) son axe (une droite Δ donnée dirigée par $\vec{u}$).

- la forme réduite d’une symétrie glissante ***f***
  de vecteur $\vec{u}$ et d’axe Δ est :
  $f = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$;
  $f(M) = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta(M) = t_{\vec{u}}(M_1) = M'$;
  $f(M) = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}(M) = S_\Delta(M_2) = M'$.



- une isométrie glissante est une isométrie.
- une isométrie glissante n’a pas de point invariant.
- si ***f*** est une symétrie glissante d’axe Δ et ***f***(M) = M’ ;
  alors : le milieu de [MM’] appartient à Δ.



- si f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$, alors $f \circ f = t_{2\vec{u}}$
- la réciproque d'une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie de même axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.

3) Forme réduite d'une isométrie dans le plan

- Toute isométrie dans le plan est soit une translation soit une rotation soit une réflexion soit une symétrie glissante.

- Une isomérie f ($f \neq id_P$) ayant un point invariant A est une rotation de centre A ou une reflexion d'axe passant par A.
- Une isomètrie f ($f \neq id_P$) ayant deux points distincts invariants A et B est la reflexion d'axe (AB).

4) Déplacement dans le plan

- on appelle un déplacement dans le plan, toute isomètrie qui conserve les angles orientés.
- la reciproque d'un déplacement est un déplacement
- la composée de deux déplacements est un déplacement,
- la forme réduite d'un déplacement dans le plan est soit une translation soit une rotation.

- si A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par un déplacement f, alors AB = A'B' et $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}) = \alpha$, où α est l'angle de f ($\alpha = 0$, si f est une translation).

- la forme complexe d'un déplacement f d'angle α est: f : $M(Z) \mapsto M'(Z)$; $Z' = e^{i\alpha}Z + b$; $\alpha \in \mathbf{R}$; $b \in \mathbf{C}$

- si A, B, A', B' sont quatre points tels que : $A \neq B$ et AB = A'B', alors, il existe un dépalcement unique f qui transforme A en A' et B en B'.

5) Antidéplacement dans le plan

- on appelle un antidéplacement dans le plan, toute isomètrie qui transforme les angles orientés en leurs opoosés.
- la réciproque d'un antidépalcement est un antidéplaement,
- la composée de deux antidépalcements est un dépalcement
- la composée d'un déplacement et d'un antidépalcement est uj antidépalcement,
- la forme réduite d'un antidéplacement dans le pla est soit une réflexion soit une symétrie glissante.

- si A, B, A', B' sont quatre points tels que : $A \neq B$ et AB = A'B' alors, il existe un antidépalcement unique qui transforme A en A' et B en B'.

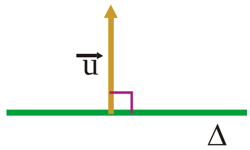
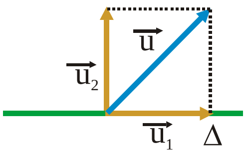
6) Isométrie vectorielle

Soit ***f*** une isométrie dans le plan et A un point donné d'image A' par ***f*** .
Notons M' l'image par ***f*** d'un point M quelconque.

On appelle isométrie vectorielle associée à ***f***, l'application notée φ définie par : $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

L'isométrie vectorielle φ associée à une isométrie ***f*** a les propriétés suivantes :

- linéarité : $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$; $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$; (α un réel).
- conservation du produit scalaire : $\varphi(\vec{u}).\varphi(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$
- Effet sur le déterminant (dans une B. O): $\det\left|\varphi(\vec{u});\varphi(\vec{v})\right| = \begin{cases} \det(\vec{u}\ ;\vec{v}) \text{ si } f \text{ est un dépalcement} \\ -\det(\vec{u}\ ;\vec{v}) \text{ ; sinon} \end{cases}$
- L'isométrie vectorielle associée a une translation est id$\mathscr{V}$ (identité vectorielle).
- L'isométrie vectorielle associée à une réflexion d'axe Δ est la réflexion vectorielle φ définie par :

Si	**alors**
 $\vec{u}$ dirige Δ	$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$
$\vec{u}$ est normal à Δ 	$\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$
 $\vec{u}$ oblique à Δ $\vec{u} = \vec{u_1}+\vec{u_2}$, avec $\vec{u_1}$ qui dirige Δ et $\vec{u_2}$ orthogonal à	$\varphi(\vec{u}) = \vec{u_1} - \vec{u_2}$

- L'isométrie vectorielle associée à une rotation dangle α est la rotation vecrorielle d'angle α.

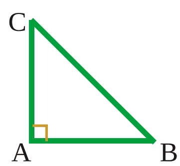
$\forall\ \vec{u} \neq \vec{0}$; $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ si et seulement si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$.

- φ^{-1} est la rotation vectorielle d'angle - α.
- si φ est la roation vectorielle d'angle π, alors, $\forall\ \vec{u} \in V$: $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$

Figures de rotations vectorielles

Avec φ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ on a :

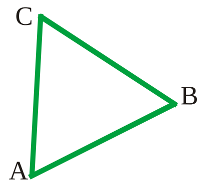
$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$; $\varphi(\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB}$.



- ABC un triangle isocèle rectangle direct.

Avec la roation vectoreille d'angle $\frac{\pi}{3}$ on a :

$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$; $\varphi(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA}$; $\varphi(\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}$.



- ABC un triangle équilatéral direct.

II. Similitude directe dans le plan

1) Définition

Soit k un réel strictement positif donné. On appelle similitude plane directe ou similitude directe dans le plan, toute transformation qui multiplie la distance par k et conserve les angles orientés, k est appelé le rapport de la similitude.

- la réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- la composée de deux similitude de rapports k et k' est une similitude de rapport kk'.
- toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement ; l'angle α du déplacement est l'angle de al similitude.
- la réciproque d'une similitude d'angle α est une similitude d'angle $-\alpha$.
- la composée de deux similitudes d'angles α_1 et α_2 est une similitude d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
- l'image d'une droite par une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ est une droite qui lui est perpendiculaire.
- l'image d'un cercle de centre Ω et de rayon R par une similitude est le cercle de centre Ω' (l'image de Ω par cette similitude) et de rayon kR.
- si une similitude de rapport k et d'angle α transforme A en A'et B en B' ($A \neq B$), alors, $k = \frac{A'B'}{AB}$ et $\alpha = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'})$.
- une similitude multiplie l'aire par k^2.
- soit S une similitude de rapport k et d'angle α

Si	**alors**
$k = 1$	S est un déplacement
$k = 1$ et $\alpha = 0$	S est une translation
$k = 1$ et $\alpha \neq 0$	S est une rotation d'angle α
$k = 1$ et $\alpha = \pi$	S est une symétrie centrale
$k \neq 1$ et $\alpha = 0$	S est une homothétie de rapport k
$k \neq 1$ et $\alpha = \pi$	S est une homothétie de rapport -k

- une similitude conserve : le parallélisme ; l'orthogonalité, le barycentre, le milieu, l'alignement, les angles géométriques, les angles orientés, le contact.

2) Forme complexe d'une similitude

$f : M(Z) \mapsto M'(Z')$; $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}$; a et b donnée $\Leftrightarrow$ f est une similitude de rapport $|a|$ et d'angle arg(a).

En plus,

si	alors
$a = 1$	f est la translation de vecteur d'affixe b
$a \neq 1$	f admet un seul point invariant appelé son centre, qui est le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. f a trois éléments caractéristiques qui sont : • son centre : $\Omega(\omega)$, • son rapport $\lvert a \rvert$ • son angle : arg (a). et avec f une similitude de centre Ω d'affixe ω, de rapport k et d'angle α, on a : $f : M(Z) \mapsto M'(Z') \Leftrightarrow Z' - \omega = ke^{i\alpha}(Z - \omega)$.

- si A, B, A', B' sont quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, alors : il existe une similitude unique qui transforme A en A' et B en B'.

3) A propos des similitudes à centre

- une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle α st notée $S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}$.
- $[S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}]^{-1} = S_{(\Omega\,;\,\frac{1}{k}\,;-\alpha)}$
- la composée de deux similitude S_1 et S_2 de même centre Ω est une similitude de même centre Ω, et
  $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$
- $\boldsymbol{S}_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)} : M \mapsto M' \Leftrightarrow \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = k$ et $(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$
- la forme réduite de $\boldsymbol{S}_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}$ est $R_{(\Omega\,;\,\alpha)} \circ H_{(\Omega\,;\,k)} = H_{(\Omega\,;\,k)} \circ R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$ avec
  $R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$: rotation de centre Ω et d'angle α.
  $H_{(\Omega\,;\,k)}$: homothétie de centre Ω et de rapport k.

- soit A, B, C trois points tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$.

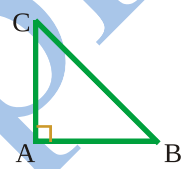
La similitude de centre A qui transforme B en C est notée $S_{(A\,;\,B\,\to C\,)}$, son rapport $\dfrac{AC}{AB}$; son angle est
$(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

- $[\,S_{(A\,;\,B\,\to C\,)}\,]^{-1} = S_{(A\,;\,C\,\to B\,)}$

- **Figures de similitude**

ABC un triangle isocèle rectangle direct en A.

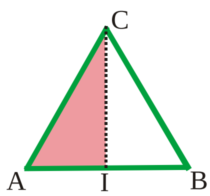
$\boldsymbol{S}_{(B;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4})}\left|\begin{array}{l} B \to B \\ C \to A \end{array}\right.$; $\boldsymbol{S}_{(C;\sqrt{2};\frac{\pi}{4})}\left|\begin{array}{l} C \to C \\ A \to B \end{array}\right.$.



Demi triangle équilatéral

ABC un triangle équilatéral direct., I milieu de [AB].

$\boldsymbol{S}_{(C;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{6})}\left|\begin{array}{l} C \to C \\ A \to I \end{array}\right.$; $\boldsymbol{S}_{(A;\,2\,;\,\frac{\pi}{3})}\left|\begin{array}{l} A \to A \\ I \to C \end{array}\right.$.



Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

Soit A et B deux points distincts et I milieu de [AB].
Déterminer les isométries du plan qui invarient globalement le segment [AB].

Solution

f une isométrie qui invarie globalement [AB] $\Leftrightarrow f\ [A;B] \to [A;B]$; donc f (I) = I (car f conserve le milieu).
Donc f est soit une rotation de centre I soit une réflexion d'axe passant par I.

f rotation		*f* réflexion	
Si	**alors**	**Si**	**alors**
f (A) = A ; f (A) = B	$f = id_P$; $f = S_I$ symétrie centrale de centre I.	f (A) = A ; f (A) = B	$f = S_{IA} = S_{AB}$; $f = S_\Delta$; Δ médiatrice de [AB].

Donc : les isométries demandées sont $\{id_P\ ;\ S_I\ ;\ S_{AB}\ ;\ S_\Delta\}$

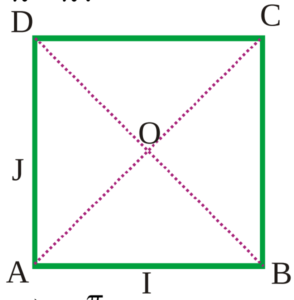
Exercice. 2

ABCD un carré direct de centre O.
I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].
1.a) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_1 qui transforme A en C et B en D.
Caractériser f_1.
b) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_2 qui transforme A en B et J en I. caractériser f_2.
2.a) Montrer qu'il existe un antidéplacement g_1 unique qui transforme I en I et D en C.
Caractériser g_1.
b) Montrer qu'il existe un antidéplacement g_2 unique qui transforme D en A et A en B.
Caractériser g_2.
3) On pose $g = g_1 \circ g_2$.
Déterminer g (J) et g (D), puis donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

Solution

1.a) Comme AB = CD ; donc il existe un déplacement unique f_1,

qui transforme : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{array}\right.$; l'angle de f_1 est $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + \pi = \pi$.



Donc; f_1 est une rotation d'angle π, d'où f_1 est une symétrie centrale.
Or f_1 (A) = C et O est le milieu de (AC].
Donc O est le centre de f_1, d'où $f_1 = S_O$.

b) Comme AJ = $\frac{1}{2}$AD = $\frac{1}{2}$ AB = BI, donc il existe un déplacement unique f_2

qui transforme $\left|\begin{array}{l} A \mapsto B \\ J \mapsto I \end{array}\right.$; l'angle de f_2 est $(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$,

donc f_2 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, Or OA = OB et $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$; f_2(A)= B ; d'où O est le centre de f_2. Donc $f_2 = R_{(O\ ;\ \frac{\pi}{2})}$.

2.a) Comme $ID^2 = IA^2 + AD^2 = IB^2 + BC^2 = IC^2$, Donc ID = IC , d'où il existe un antidéplacement unique $\boldsymbol{g_1}$ qui transforme $\left|\begin{array}{l} I \mapsto I \\ D \mapsto C \end{array}\right.$. Or $\boldsymbol{g_1}$ a un point invariant (qui est I)

Donc, $\boldsymbol{g_1}$ n'est pas une symétrie glissante, d'où $\boldsymbol{g_1}$ est une réflexion. Or $\boldsymbol{g_1}$ (D) = C.

Donc, l'axe de $\boldsymbol{g_1}$ est la médiatrice de [DC] ou de [AB] qui est la droite (OI).

Donc, $\boldsymbol{g_1} = \boldsymbol{S_{OI}}$.

b) Comme : DA = AB,

Donc : il existe un antidéplacement unique $\boldsymbol{g_2}$ qui $\left|\begin{array}{l} D \mapsto A \\ A \mapsto B \end{array}\right.$.

Or les droites (DA) et (AB) ne sont pas parallèles, donc $\boldsymbol{g_2}$ n'est pas une réflexion, donc $\boldsymbol{g_2}$ est une symétrie glissante.

Or J est le milieu de [DA] et I est le milieu de [AB], donc la droite (IJ) est l'axe de $\boldsymbol{g_2}$.

Comme , $\boldsymbol{g}$(J) = I (par la conservation du milieu).

Donc, $\overrightarrow{JI}$ est le vecteur de $\boldsymbol{g_2}$. Donc $\boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{S}_{IJ} \circ \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{JI}} = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{JI}} \circ \boldsymbol{S}_{IJ}$.

3) $\boldsymbol{g}(J) = \boldsymbol{g_1} \circ \boldsymbol{g_2}(J) = \boldsymbol{g_1}(I) = I$; $\boldsymbol{g}(D) = \boldsymbol{g_1} \circ \boldsymbol{g_2}(D) = \boldsymbol{g_1}(A) = B$.

Or, $\boldsymbol{g}$ est la compose de deux antidéplacements, donc $\boldsymbol{g}$ est un déplacement.

Or, l'angle de $\boldsymbol{g}$ est $(\overrightarrow{JD}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

Donc, $\boldsymbol{g}$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Or $\boldsymbol{g}$(D) = B et AD = AB et $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$,

Donc A est le centre de $\boldsymbol{g}$, d'où , $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{R}_{(A\,;\,-\frac{\pi}{2})}$.

Exercice. 3

ABCD un carré direct de centre O.

I et J milieux respectifs de [BC] et [AD]. On pose AB = a ; (a > 0).

1.a) Montrer qu'il existe une similitude unique $\boldsymbol{S}_1$ qui transforme C en O et I en A.

Déterminer l'angle et le rapport de $\boldsymbol{S}_1$.

b) Soit Ω le centre de $\boldsymbol{S}_1$.

Montrer que les points Ω, O, C , D d'une part et les points Ω, I, A , C d'autre part sont cocycliques.

Placer le point Ω après avoir préciser sa position.

2) Soit $\boldsymbol{S}_2$ la similitude qui transforme B en O et O en J.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{S}_2$.

b) Soit M un point du plan et M' = $\boldsymbol{S}_2$(M).

Déterminer le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit le segment [OC].

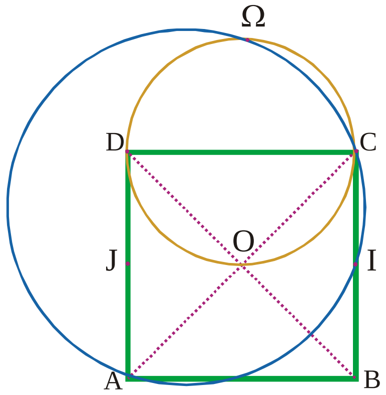
c) On suppose que A, B, M sont alignés.

Montrer que les points A ; C ; M' sont alignés.

3) On pose $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}_2 \circ \boldsymbol{S}_1$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $\boldsymbol{t}$.

Solution



1.a) Comme : C ≠ I et O ≠ A.

Donc, il existe une similitude unique S_1 qui transforme

$\left|\begin{array}{l} C \mapsto O \\ I \mapsto A \end{array}\right.$; l'angle de S_1 est $(\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = -\dfrac{\pi}{4}$.

le rapport de S_1 est $\dfrac{OA}{CI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$.

b) Comme S_1(C) = O, donc

$(\overrightarrow{\Omega C}\ ;\ \overrightarrow{\Omega O}) = -\dfrac{\pi}{4}$, Or $(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DO}) = (\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DB}) = -\dfrac{\pi}{4}$, D'où, $(\overrightarrow{\Omega C}\ ;\ \overrightarrow{\Omega O}) = (\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DO})$.

Donc ; les points Ω ; O ; C ; D sont cocycliques.

Comme S_1(I) =A , donc $(\overrightarrow{\Omega I}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}) = -\dfrac{\pi}{4}$ .Or $(\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

Donc $(\overrightarrow{\Omega I}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{CA})$; d'où les points Ω ; I ; A ; C sont cocycliques.

Donc, Ω est le point distinct de C, intersection du cercle circonscrit au triangle IAC avec le cercle circonscrit au triangle OCD (cercle de diamètre [CD]).

2.a) Comme $\left|\begin{array}{l} (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AJ}) = \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AJ}{AO} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$; donc

- le centre de S_2 est A ;
- l'angle de S_2 est $\dfrac{\pi}{4}$
- le rapport de S_2 est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Comme $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{AD}{AC} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc S_2(C) = D ; Or S_2(O) = J ; donc le lieu géométrique de M' est le segment [JD], lorsque M décrit le segment [OC].

c) On a : S_2 $\left|\begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto O \\ M \mapsto M' \end{array}\right.$; donc les points A ; O ; M' sont alignés (conservation de l'alignement), Or les points A ; O ; C sont alignés ; donc les points A ; C ; M' sont alignés.

3) t est une similitude d'angle $-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 0$ et de rapport $(\sqrt{2})(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ = 1. Donc t est une translation, Or

t(C) = S_2 o S_1 (C) = S_2 (O) = J. Donc : t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CJ}$.

Exercice. 4

Soit $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

f_θ défini par : f_θ : $M(Z) \mapsto M'(Z')$; $Z' = (1 + i\tan\theta)Z$.

1) Suivant les valeurs de θ.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_θ.

2) Lorsque $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Montrer que pour tout point $M \neq O$, le triangle OMM' est rectangle.

3) Soit A(1 ; 0) et $A_\theta = f_\theta(A)$.

Déterminer l'ensemble des points A_θ lorsque θ varie dans $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Solution

1) Si θ = 0 ; alors Z' = Z , donc $f_\theta = Id_P$;

Si $\theta \neq 0$; alors $1 + i\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ et $\frac{1}{\cos\theta} > 0$;

Donc $Z' = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}Z$ et $f_\theta(0) = 0$.

Donc, f_θ est la similitude de centre O, d'angle θ et de rapport $\frac{1}{\cos\theta}$.

2) $\frac{Z - Z'}{Z} = \frac{Z - (1 + \tan\theta)Z}{Z} = 1 - 1 - i\tan\theta = -i\tan\theta$,

Donc $(\overrightarrow{MO} ; \overrightarrow{MM'}) = \arg(-i\tan\theta) = -\frac{\pi}{2}$;

D'où OMM' est rectangle en M.

3) $A_\theta = f_\theta(A)$;

- si θ = 0 ; alors $A_\theta = A$.
- si $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, alors le triangle OAA_θ est rectangle en A, avec $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OA_\theta}) = \theta$ et $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Donc lorsque θ varie dans $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, l'ensemble des points A_θ est la demi-droite d'origine A, d'équation $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

B. Exercices

1. Soit A et B deux points distincts dans le plan. Déterminer les isométries qui transforment A en B.

2. ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Déterminer les isométries qui invarient globalement le triangle ABC.

3. ABC un triangle rectangle en A. I et J les milieux respectifs de [AC] et [BC].
On pose : $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$.
Montrer que **f** est une réflexion et préciser son axe.

4. ABCD un carré de centre O. I milieu de [AD]. On pose $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$.
Montrer que f est une symétrie glissante et préciser son axe et son vecteur.

5. ABCD un carré direct de centre O. I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].
a) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_1 qui transforme A en B et D en C. Caractériser f_1.
b) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_2 qui transforme A en B et J en I. Caractériser f_2.
2. a) Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g_1 qui transforme I en I et D en C. Caractériser g_1.
b) Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g_2 qui transforme D en A et A en B. Caractériser g_2.

6 Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC direct de côté a.
Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.
1) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. a)Prouver qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en C et B en D.
   b) Préciser un angle de r et déterminer son centre E, puis le placer sur la figure.
3) Prouver que les points A ; B ; D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle, puis le construire.
4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en C.
   a) Déterminer un angle et le rapport de S
   b) Déterminer l'image du triangle BDE par $S \circ S$
5) On pose : $f = r \circ S$ et $g = S \circ r$
   a) Préciser et construire f (B) ; f (E) ; g (B) ; g (A).
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.
   c) Démontrer que les cercles de diamètres respectifs [AG] ; [BC] ; [CE] ; [DB] ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point ?

7. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'sont deux cercles sécantes en A et B de centres respectifs O et O'. S la similitude de centre A qui transforme O en O'.
1) Déterminer l'image de $\mathscr{C}$ par S, Justifier.
2) Soit B' = S(B).
Montrer que la droite (BB') est tangente à $\mathscr{C}$.
Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{A\ ;\ B\}$.
3) Montrer que les points B ; M ; M' sont alignés.

8. Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A. Soit $\sum$ et Γ les deux cercles de centres respectifs B et C et passant par le point A et se recoupent en un point G.
Soit D le point diamétralement opposé à A sur $\sum$.
1. a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
   b) Montrer qu'il existe une rotation unique r qui transforme A en D et C en B et déterminer ses éléments caractéristiques.
2) Soit M un point de Γ distinct de G.
   On pose r(M) = M'.
   La droite (GM) coupe $\sum$ en N' et la droite (GM') coupe Γ en N.
   a) Construire les deux points R et S tels que les quadrilatères M'GMR et N'GNS soient des carrés, puis déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme M en R et N en S.
   b) Montrer que la droite (RS) passe par un point fixe, lorsque M varie sur Γ privée de G.
3) Soit S' la similitude directe qui transforme D en B et B en C. On appelle I le centre de S'.
   a)Déterminer l'angle et le rapport de S'.
   b) Montrer que: $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}\ ;\ \overrightarrow{GB})\ [\pi]$ (1)
   et que : $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC})\ [\pi]$ (2)
   c) Déduire de (1) et de (2) la position de I et déterminer la nature du quadrilatère ACID.
4) On pose : $f = S \circ S$'.
   Montrer que f est une homothétie et préciser son rapport et son centre.

9. Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct de côté a. Les points A ; F ; G sont définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$;

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $\boldsymbol{r}(A) = B$ et $\boldsymbol{r}(E) = F$.

b) Déterminer l'angle et le centre de r.

c) Montrer que EFG est un triangle équilatéral et calculer son aire en fonction de a.

3) Soit S la similitude direct de centre O qui transforme A en E.

a) Montrer que $\boldsymbol{S}(B) = F$, puis déterminer $\boldsymbol{S}(C)$.

b) Calculer le rapport de S.

c) Soit α une mesure de l'angle de S, déterminer la valeur exacte de $\cos\alpha$.

4) Soit I ; J ; K ; L les points définis par :

I est l'intersection des segments [AF] et [BG]

J est l'intersection des segments [BG] et [CE]

K est l'intersection des segments [CE] et [AF].

a) Montrer que IJK est un triangle équilatéral.

b) Montrer que :

$$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & F \\ \hline 4 & 3 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & F \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

c) En déduire l'aire du triangle IJK en fonction de a.

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormal

$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

$\boldsymbol{f} : M(Z) \mapsto M'(Z')$; $Z' = (1+i)Z + 1$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{f}$.

2) Soit Ω le point d'affixe i .

Montrer que pour $M \neq \Omega$, le triangle $\Omega MM'$ est isocèle rectangle.

3) Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) tels que :

$x^2 + y^2 - 2y = 0$, et $\Gamma' = \boldsymbol{f}(\Gamma)$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Γ .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de Γ '. Construire Γ et Γ '.

11 ABCD un carré direct de centre I.

J le milieu de [AI]. Soit S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1) Déterminer le rapport et un angle de S.

2) Construire $C' = \boldsymbol{S}(C)$ et $D' = \boldsymbol{S}(D)$.

3) Démontrer que le centre Ω de $\boldsymbol{S}$ appartient au cercle de diamètre [AD] et au cercle circonscrit au triangle ABJ, placer Ω.

12 ABCD et DEFG deux carrés directs tels que E est le milieu de [CD].

1) Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

b) Déterminer $\boldsymbol{S}(E)$ et la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{BF})$.

2) Soit K le point d'intersection des droites (AE) et (BF).

a) Montrer que les cercles de diamètres [BD] et [DF] se recoupent en K.

b) En déduire que les droites (KD) et (BF) sont perpendiculaires et que les points C ; G ; K sont alignés.

13 ABCD un carré direct de centre I. Soit P un point de (BC) distinct de B. les droites (AP) et (CD) se coupent en Q. la perpendiculaire à (AP) en A coupe (BC) en R et (CD) en T.

1) Soit $\boldsymbol{r}$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de la droite (BC), puis les images des points P et B par $\boldsymbol{r}$.

2) On désigne par N et M les milieux respectifs de [PT] et [QR]. Soit $\boldsymbol{S}$ la similitude directe de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Determiner S(B) ; S(R) ; S(P).

b) Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque P décrit la droite (BC) privée de B.

c) En déduire que les points M ; N ; B ; D ; I sont alignés.

14 Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de coté a (a > 0).

Soit D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. Soit I le milieu du segment [BC].

1) Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure).

2. a) Montrer qu'il existe une similitude directe S1 de centre B et qui transforme D en A. Déterminer l'angle et le rapport de S1.

b) Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et de E.

Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par $\boldsymbol{S}_1$. Construire M'à partir d'une position donnée de M sur (DE), puis démontrer que les points M' ; M ; B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE).

3) Soit $\boldsymbol{S}_2$ la similitude directe qui transforme I

en B et E en D.
a) Déterminer l'angle et le rapport de S_2.
b) Déterminer le centre de S_2
4) On pose $f = S_1 \circ S_2$.
a) Montrer que f est une similitude directe, puis donner son angle et son rapport.
b) Montrer que le centre Ω de f est le point d'intersection du cercle de diamètre [BE] avec un deuxième cercle Γ que l'on déterminera. Construire Ω.

15 ABC un triangle direct, I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB]. APB est isocèle rectangle en P direct.
CQA est isocèle rectangle en Q direct.
1) Faire une figure.
2) On se propose de montrer que le triangle IPQ est isocèle rectangle direct en I. Soit φ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Déterminer $\varphi(\overrightarrow{IP})$.
b) Conclure.

16 ABC un triangle direct. APR ; BQC ; CRA des triangles équilatéraux directs. G est le centre de gravité de ABC.
1) Faire une figure
2) On se propose de montrer que ABC et PQR ont le même centre de gravité G. Soit la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.
a) Déterminer $\varphi(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR})$.
b) En déduire la valeur du vecteur $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}$ et conclure.

17 On donne deux triangles ABC ; DEF équilatéraux directs. Soit G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.
Le but de l'exercice est de montrer que le triangle AGH est équilatéral direct.
Soit φ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Montrer que $\varphi(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AH}$ et en déduire le but de l'exercice.

CHAPITRE 16

Courbes paramétrées

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Définition

Soient deux fonctions numériques $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ définies sur un même intervalle I.

L'ensemble des points M(t) de coordonnées ($\boldsymbol{f}$(t) ; $\boldsymbol{g}$(t)), où t appartient à I, est une courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \boldsymbol{f}(t) \\ y = \boldsymbol{g}(t) \end{cases}$ t ∈I. La varaiable t est le paramètre (il peut être désigné par une autre lettre). Le point M(t) de coordonées ($\boldsymbol{f}$(t) ; $\boldsymbol{g}$(t)) est appelé point de paramètre t :

$\overrightarrow{OM(t)} = \boldsymbol{f}(t).\vec{i} + \boldsymbol{g}(t).\vec{j}$.

Il n'est pas obligatoire de s'encombrer des notations $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$. On écrira par exemple : soit la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

Exemple

Dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) , une représentation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R est : $\begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$.

2. Tangente à une courbe paramétrée
Définition

Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$; $t \in I$

Soit M(t_0) (t_0 ∈I) un point de $\mathscr{C}$.

Si $\begin{cases} \boldsymbol{f} \text{ et } \boldsymbol{g} \text{ sont dérivables en } t_0 \\ \text{le vecteur : } \vec{V}(t_0) = \boldsymbol{f}'(t).\vec{i} + \boldsymbol{g}'(t).\vec{j} \text{ n'est pas nul.} \end{cases}$

Alors, la droite passant par le point M(t_0) et de vecteur directeur $\vec{V}(t_0)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point M(t_0).

Le vecteur $\vec{V}(t) = x'(t).\vec{i} + y'(t).\vec{j}$ s'appelle le vecteur dérivée en t , ou encore le vecteur tangent à la courbe en M(t).

Exemple

$\mathcal{C}$ est la courbe définie, dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$; $t \in [0\ ;\ 2\pi[$. Les fonctions $\boldsymbol{f} : t \mapsto \cos t$ et $\boldsymbol{g} : \mapsto \sin 2t$, sont dérivables en $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

et l'on a : $\boldsymbol{f}\ '(t_0) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ et $\boldsymbol{g}\ '(t_0) = 2\cos 2t_0 = 2\cos\pi = -2$. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une tangente au point M_0 correspondant au paramètre $t_0 = \frac{\pi}{2}$.Cette tangente est la droite qui passe par le point $M_0(0 ; 0)$.

Donc le point O, et dont un vecteur directeur est $\vec{T}(-1\ ;\ -2)$. Une équation cartésièenne de la tangente est donc, $\begin{vmatrix} x & -1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x + y = 0$.

3. Interprétation cinématique

$\mathcal{C}$ est la courbe paramétrique dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x = \boldsymbol{f}(t) \\ y = \boldsymbol{g}(t) \end{cases}$; $t \in I$.

Un point matériel M se déplace dans le plan, et à chaque insatnt t de l'intervelle I, ses coordonnées x et y sont données par :

$x = \boldsymbol{f}(t)$ et $y = \boldsymbol{g}(t)$ où $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux fonctions deux foix dérivables sur I.

$\mathcal{C}$ est la trajéctoire du point M(t).

A l'instant t_0, M occupe la position $M_0(t_0)$ et on suppose :

$(\boldsymbol{f}\ '(t)\ , \boldsymbol{g}\ '(t)\ ) \neq (\ 0\ ;\ 0)$.

Le vecteur dérivée : $\vec{V}(t_0) = \boldsymbol{f}\ '(t_0\ ).\vec{i} + \boldsymbol{g}\ '(t_0).\vec{j}$

est le vecteur vitesse instantanée du point mobile M(t) à l'instant t_0.

Le vecteur $\overrightarrow{a(t_0)} = \overrightarrow{v'(t_0)} = \boldsymbol{f}\ ''(t_0).\vec{i} + \boldsymbol{g}''(t_0).\vec{j}$ est appelé vecteur accélération du point mobile M à l'instant t_0.

4. Construction d'une courbe paramétrée

a) Elimination du paramètre

Soit la courbe paramétrée définie par la représentation paramétrique :

$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$; $t \in [0\ ;\ 2\pi]$. Il est clair que $x^2(t) + y^2(t) = 1$ et que le point $M(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ appartient à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$, c'est –à-dire le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Il n'est pas toujours posssibles d'éliminer, comme ci-dessus, le paramètre.

Il faut, donc, savoir comment tracer une courbe paramétrée.

b) Comment tracer une courbe paramétrée ?

Nous allons tracer la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), par :

$\begin{cases} x = \cos 3t = \boldsymbol{f}(t) \\ y = \sin 2t = \boldsymbol{g}(t) \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

Les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont de période 2π.

Les valeurs du paramètre t et $t + 2\pi$ donnent le même point de la courbe.

Il suffit de faire varier t dans un intervalle $[a\ ;\ a + 2\pi]$ pour obtenir toute la courbe $\mathcal{C}$.

$\forall$ t $\in$ **R** ; $\begin{cases} f(-t) = f(t) \,; \\ g(-t) = -g(t); \end{cases}$ on en déduit que la courbe admet x'ox comme axe de symétrie

$\forall$ t $\in$ **R** ; $\begin{cases} f(t+\pi) = -f(t) \,; \\ g(t+\pi) = g(t); \end{cases}$ $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à (y'oy).

Il suffit alors d'étudier les fonctions sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$. ***f*** et ***g*** sont dérivables sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et

f '(t) = -3sin3t ; ***g*** '(t) = 2cos2t

(***f*** '(t) = 0 et t $\in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$) $\Leftrightarrow$ t = $\frac{\pi}{3}$; (***g*** '(t) = 0 et t $\in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$) $\Leftrightarrow$ t = $\frac{\pi}{4}$.

On peut établir le tableau de variations suivant :
(Noter l'emplacement des lignes du tableau : les variations de ***g*** sont immédiatement lisibles sous celles de ***f***).

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
f '(t)		-		-	0	+	
f (t)	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
g (t)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
g '(t)		+	0	-		-	

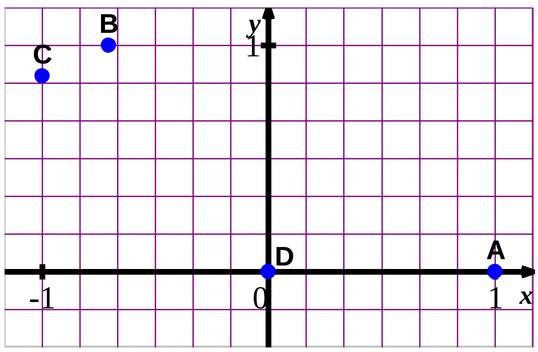
Ce tableau nous donne 4 points :
A(0) = (1 ; 0) ;

B($\frac{\pi}{4}$) = ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1) ;

C($\frac{\pi}{3}$) = (-1 ; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) ;

D($\frac{\pi}{2}$) = (0 ; 0).

On place ces quatre points (comme l'indique la figure).



Puis, on trace la courbe sur les intervalles :$[\,0\,;\,\frac{\pi}{4}]\,;\,[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{3}]\,;\,[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

L'étude des tangentes aux points A ; B ; C et D facilite le tracé de la courbe.
Nous avons : $\boldsymbol{f}\,'(t) = -3\sin 3t$; $\boldsymbol{g}\,'(t) = 2\cos 2t$, ce qui permet le calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente en un point donné : on obtient :

En A : pour t = 0 :   (0 ; 2) ;

En B : pour $t = \dfrac{\pi}{4}$: $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ ; 0\right)$

En C : pour $t = \dfrac{\pi}{3}$:   (0 ; -1) ;

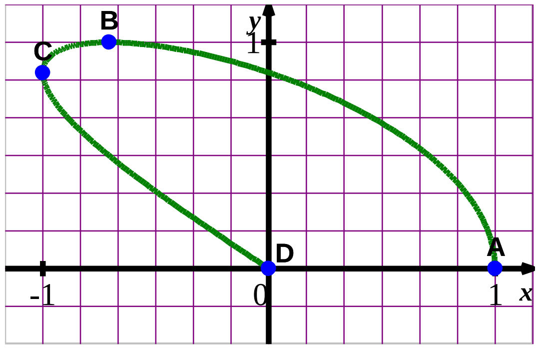
En D :   pour $t = \dfrac{\pi}{2}$:   (3 ; -2).

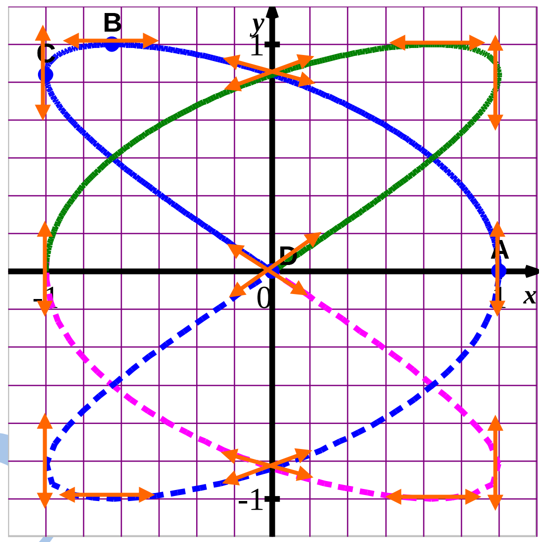
Pour préciser le tracé,
on place le point E de l'axe (Oy)
et une tangente en E à la courbe.

Pour $t = \dfrac{\pi}{6}$: $x = 0$; $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\boldsymbol{f}\,'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -3$; $\boldsymbol{g}\,'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

On complète ensuite la courbe par symétrie orthogonale d'axes : (Ox) et (Oy).





Une telle courbe est appelée courbe de lissajous.
Lissajous est un Physicien français (1822 – 1880).

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

Montrer que les courbes définies dans un repère par les représentations paramétriques, sont dans ce repère, les représentations graphiques de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on précisera.

a) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 - 2t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = e^t \\ y = (1-t)e^t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{t-1}; \quad t \in [2\,;+\infty[. \\ y = e^t \end{cases}$

Solution

a) $x = t + 1 \Leftrightarrow t = x - 1$; $y = t^2 - 2t = (x-1)^2 - 2(x-1) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3$.

Donc cette représentation paramétrique est la définition de la courbe de :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ définie sur $\mathbf{R}$.

b) $x = e^t \Leftrightarrow x > 0$ et $t = \ln x$, donc $y = (1 - \ln x)\, e^{\ln} \Leftrightarrow y = x(1 - \ln x)$.

La courbe définie par cette représentation paramétrique est la courbe de la fonction :

$g(x) = x(1 - \ln x)$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

c) $x = 1 + \dfrac{2}{t-1} \Leftrightarrow x - 1 = \dfrac{2}{t-1} \Leftrightarrow t - 1 = \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow t = 1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

$y = e^t = \Leftrightarrow y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $t \in [2\,;+\infty[\Leftrightarrow 2 \le t \Leftrightarrow 1 \le t - 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{t-1} \le 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{t-1} \le 2 \Leftrightarrow$

$1 < 1 + \dfrac{2}{t-1} \le 3 \Leftrightarrow 1 < x \le 3$.

La courbe définie par cette représentation paramétrique est la courbe de la fonction :

$h(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ définie sur $]1\,;3]$.

Exercice. 2

Montrer que les courbes définies par les représentations paramétriques suivantes admettent une tangente au point correspondant à la valeur donnée du paramètre.

Donner une équation de cette tangente.

a) $\begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = t^3 - 2t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$; en $t = 1$ et $t = 3$; b) $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = t + \cos 2t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$ en $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Solution

Dans les deux cas, les fonctions x(t) et (y(t) sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

Les courbes définies ainsi admettent donc des tangentes aux points donnés :

a) $x'(t) = 4t - 1$; $y'(t) = 3t^2 - 2 \Leftrightarrow x'(1) = 3$; $y'(1) = 1$;

$M(1) = (x(1)\,;y(1))$; $x(1) = 1$; $y(1) = -1 \Leftrightarrow$

$M(1) = (1\,;-1)$.

Une équation de la tangente à la courbe en M(1) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$x - 3y - 4 = 0$.

$x(3) = 18 - 3 = 15$; $y(3) = 27 - 6 = 21$; $x'(3) = 11$; $y'(t) = 25$.

Une équation de la tangente en M(3) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-15 & 11 \\ y-21 & 25 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$25(x - 15) - 11(y - 21) = 0 \Leftrightarrow 25x - 11y - 144 = 0$.

b) $x'(t) = -\sin t + \cos t$; $y'(t) = 1 - 2\sin 2t$;

- $x'(0) = 1$; $y'(0) = 1$;
  $x(0) = 1$; $y(0) = 1$; $M(o) \to (1 ; 1)$
  Une équation de la tangente à la courbe en M(0) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
  $x - y = 0$.
- $x'(\frac{\pi}{2}) = -1$; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$;
  $x(\frac{\pi}{2}) = 1$; $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$;
  $M(\frac{\pi}{2}) \to (1 ; \frac{\pi}{2} - 1)$.

Une équation de la tangente à la courbe en $M(\frac{\pi}{2})$ est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-\frac{\pi}{2}+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$x - 1 + y - \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

Exercice. 3
Dans les deux cas suivants déterminer le vecteur vitesse à l'instant t_0 du point mobile M(t) dont les cordonnées en fonction du temps sont : x(t) et y(t).
Déterminer aussi le vecteur accélération.

a) $x(t) = \cos 2t - 1$; $y(t) = 2\cos^2 t$; $t_0 = \frac{\pi}{6}$;

b) $x(t) = \cos 3t$; $y(t) = \cos t$; $t_0 = \frac{2\pi}{3}$

Solution
a) $x'(t) = -2\sin 2t$; $y'(t) = -4\sin t\cos t = -2\sin 2t$;
$x''(t) = -4\cos 2t$; $y''(t) = -4\cos 2t$ = ;

$t_0 = \frac{\pi}{6}$; $x'(\frac{\pi}{6}) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$; $y'(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

Le vecteur vitesse est $\vec{V}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ à l'instant $t_0 = \frac{\pi}{6}$. $x''(\frac{\pi}{6}) = y''(\frac{\pi}{6}) = -4\cos\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$.

Le vecteur accélération à l'instant $t_0 = \frac{\pi}{6}$ est $\vec{a}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $x'(t) = -3\sin 3t$; $y'(t) = -\sin t$; $x''(t) = -9\cos 3t$; $y''(t) = -\cos t$;

en $t_0 = \frac{2\pi}{3}$ on a : $x'(\frac{2\pi}{3}) = -3\sin 2\pi = 0$; $y'(\frac{2\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

le vecteur vitesse à l'instant $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ est $\vec{V}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$;

$x''(\dfrac{2\pi}{3}) = -9\cos 2\pi = -9$; $y''(\dfrac{2\pi}{3}) = -\cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

le vecteur accélération à l'instant $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ est $\vec{a}\begin{pmatrix} -9 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice. 4

Tracer la courbe paramétrique Γ définie dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ par la représentation paramétrique :

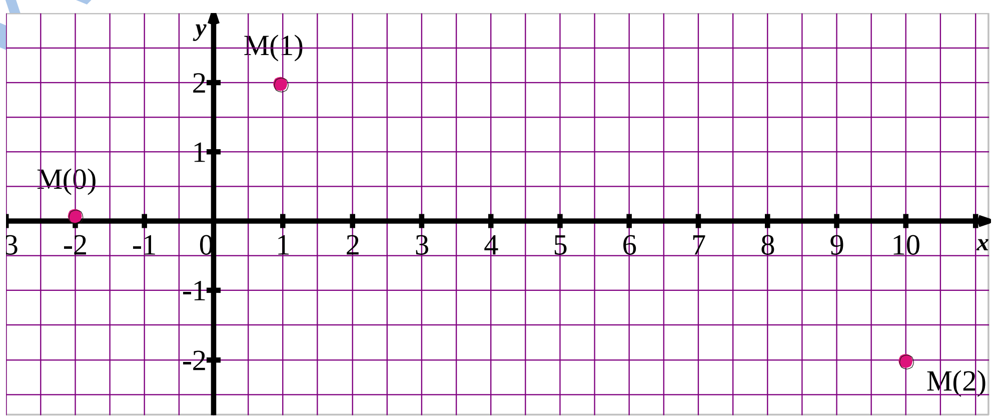
$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases} \quad ;\ t \in [-2\ ;\ 2]$$

Solution

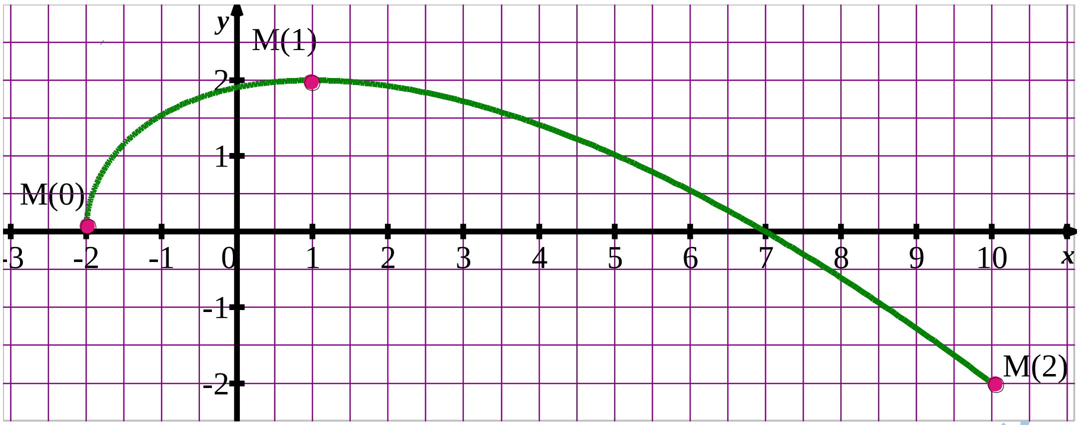
On constate que : x(-t) = x(t) et y(-t) = -y(t).
La courbe admet donc l'axe (Ox) comme axe de symétrie.
Il suffit d'étudier les fonctions x(t) et y(t) sur [0 ; 2].
$x'(t) = 6t$; $y'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1 - t)(1 + t)$.
Ainsi :

t	0		1		2
x'		+	6	+	
x	-2	↗	1	↗	10
y	0	↗	2	↘	-2
y'		+	0	-	

- On place les 3 points correspondants aux valeurs du paramètre qui apparaissent dans le tableau de variation
M(0) = (-2 ; 0) ;
M(1) = (1 ; 2) ;
M(2) = (10 ; -2).



- On trace la courbe sur les intervalles [0 ; 1] et [1 ; 2] où les fonctions x(t) et y(t) sont monotones toutes les deux.



- Traçons les vecteurs tangents aux points : M(0), M(1), et M(2).

▪ $t = 0 \Rightarrow x'(0) = 0$, $y'(0) = 3$; donc $\vec{V}(0)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$,

▪ $t = 1 \Rightarrow x'(1) = 6$, $y'(1) = 0$; donc $\vec{V}(1)\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

▪ $t = 2 \Rightarrow x'(2) = 12$, $y'(2) = -9$; donc $\vec{V}(2)\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$

On complète la courbe Γ par symétrie orthogonale d'axe : (Ox).

- $x(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

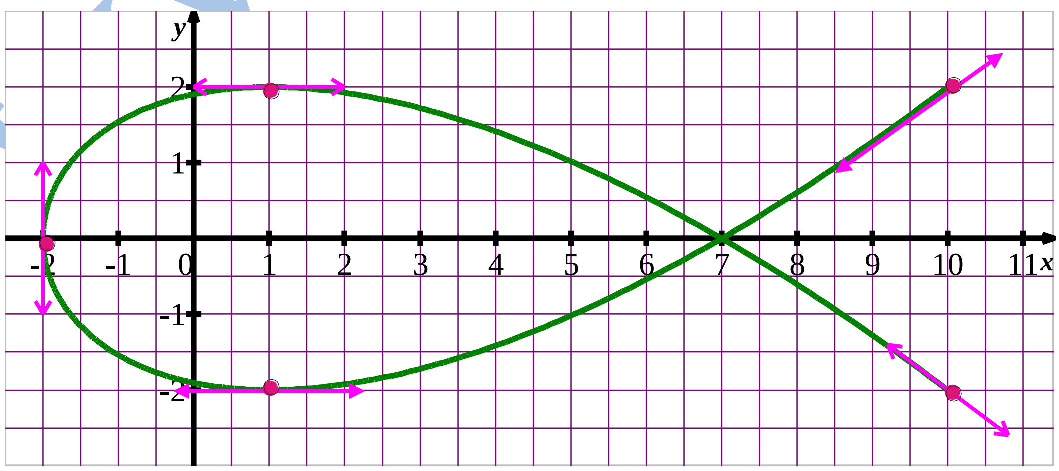
$y(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -3\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Les points d'intersection de Γ avec l'axe (Oy) ont pour coordonnées :

$(0 ; \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$ et $(0 ; -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$.

- $y(t) = 0 \Leftrightarrow 3t - t^3 = 0 \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\sqrt{3}$ ou $t = \sqrt{3}$.
- $x(0) = -2$; $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 9 - 2 = 7$.

Les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox) ont pour coordonnées :
(-2 ; 0) et (7 ; 0).
Finalement on obtient la courbe paramétrique cherchée



Exercice. 5

Etudier, et représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormmal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

Solution

x et y admettent 2π pour période, on peut limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π ; par exemple $[-\pi\ ;\ \pi]$.

De plus : $\begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) = 2\cos t = x(t) \\ y(-t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -y(t) \end{cases}$

Ainsi les points M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

Il suffit d'étudier x et y sur $[0\ ;\ \pi]$, puis de compléter l'arc obtenu par son symétrique par rapport à (Ox).

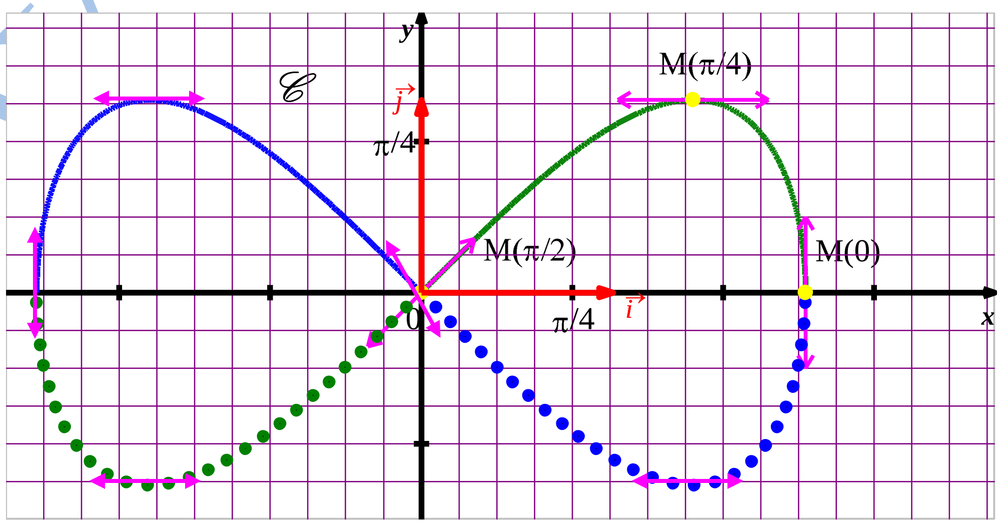
Par ailleurs : $\begin{cases} x(\pi - t) = 2\cos(\pi - t) = -2\cos t = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(2(\pi - t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -y(t) \end{cases}$

Les points $M(\pi - t)$ et M(t) sont donc symétriques par rapport à O, origine du repère. De plus, lorsque t décrit l'intervalle $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, π - t décrit l'intervalle $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$. Pour obtenir la partie de la courbe correspondante à $t \in [0\ ;\ \pi]$, il suffit d'étudier x et y sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, puis de compléter l'arc obtenu par son symétrique par rapport à O. Il suffit donc d'étudier x et y sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ pour obtenir toute la courbe.

Les fonction x et y sont dérivables sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, et : x'(t) = -2sint et y'(t) = 2cos2t.

L'étude du signe de x'(t) et y'(t) permet d'établir le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	0	-	$-\sqrt{2}$	-	-2
x	2	↘	$\sqrt{2}$	↘	0
y	0	↗	1	↘	0
y'(t)	2	+	0	-	-2



B. Exercices

Dans chacun des exercices 1 à 5, déterminer une équation cartésienne du support de la trajectoire du point M, dont les coordonnées en fonction du temps t sont :

1. $x(t) = 2t^2$; $y(t) = t^2 - 3$ avec $t \in \mathbf{R}$.

2. $x(t) = \cos 2t$; $y(t) = \sin^2 t + 1$ avec $t \in [0 ; \pi]$.

3. $x(t) = t + 1$; $y(t) = 2t^2 - 3t$ avec $t \in \mathbf{R}$.

4. $x(t) = 2\sin t$; $y(t) = -\cos t$ avec $t \in \mathbf{R}$.

5. $x(t) = 2t^2 - 1$; $y(t) = 2t$ avec $t \in \mathbf{R}$.

Dans chacun des exercices 6 à 9, déterminer une équation cartésienne de la tangente au point $M(t_0)$ à la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique donnée.

6. $x(t) = t^2 - t + 1$; $y(t) = t^2 - 1$ avec $t_0 = 1$.

7. $x(t) = \cos t - \sin t$; $y(t) = t - \cos t$; $t_0 = 0$.

8. $x(t) = t\ln t$; $y(t) = \frac{1}{t}\ln t$; $t_0 = \frac{1}{2}$

9. $x(t) = \cos^2 3t$; $y(t) = \cos\frac{t}{2} + \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Dans chacun des exercices 10 à 12, déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t_0 du point mobile M(t), dont les coordonnées, en fonction du temps, sont x(t) et y(t).

10 $x(t) = t + \frac{1}{t}$; $y(t) = t - \frac{1}{t}$ avec $t_0 = 1$.

11 $x(t) = \frac{1-t}{1+t^2}$; $y(t) = \frac{t+t^2}{1+t^2}$ avec $t_0 = 1$.

12 $x(t) = \ln t$; $y(t) = \frac{1}{t} + 2\ln t - 1$; $t_0 = 5$

Dans chacun des exercices 13 à 16, déterminer une représentation paramétrique de la courbe C passant par le point A de paramètre t_0 et admettant en chacun de ces points M(t) une tangente de vecteur directeur $\vec{V}(t)$.

13 $\vec{V}(t) = \sin 3t\,.\,\vec{i} + \cos 2t.\,\vec{j}$, $t_0 = 0$; $A(\frac{1}{3}$; 0),

14 $\vec{V}(t) = \sqrt{2}(\sin t.\vec{i} + \cos t.\vec{j})$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$; A(1 ;1)

15 $\vec{V}(t) = (e^t + e^{-t}).\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}.\vec{j}$, $t_0 = 0$; A(1 ; 1),

16 $\vec{V}(t) = e^t(\vec{i} + (1+t)\vec{j})$, $t_0 = 0$; A(2 ; 0),

Dans chacun des exercices 17 à 20, Construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique donnée.

17 $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

18 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

19 $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t \end{cases}$; $t \in]0 ; +\infty[$

20 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

Coniques

CHAPITRE 17

Faire savoir

L’essentiel du chapitre

I. Définition d’une conique par foyer, directrice et excentricité

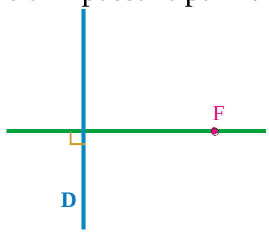
Soit D une droite donnée dans le plan. Soit E un point donné dans le plan, qui n’appartient pas à D.

Soit e un réel strictement positif. L’ensemble $\mathscr{C}$ des points M du pan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur D, est appelé la conique de foyer F, de directrice D (associée à F) et d’excentricité e.

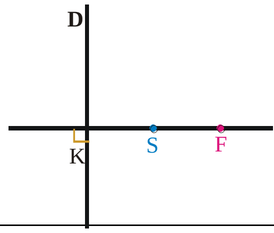
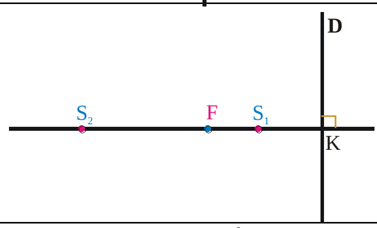
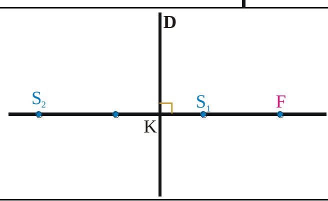
En plus,

si	**alors**
$e = 1$ $0 < e < 1$ $e > 1$	$\mathscr{C}$ est appelée une parabole $\mathscr{C}$ est appelée une ellipse $\mathscr{C}$ est appelée une hyperbole

- L’image d’une conique par une isométrie ou une similitude, est une conique de même excentricité.
- L’axe focal d’une conique de foyer F et de directrice D est la perpendiculaire à D passant par F.
- L’axe focal d’une conique est un axe de symétrie de cette conique.
- On appelle un sommet d’une conique $\mathscr{C}$ tout point de $\mathscr{C}$ appartenant à un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

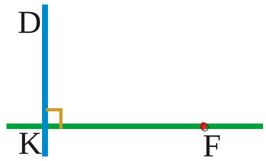


Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, de directrice D, (associée à F) d’excentricité e. soit K le projeté orthogonal de F sur D.

Nature de $\mathscr{C}$	**Le(s) sommet(s) de $\mathscr{C}$ appartenant à l’axe focal (FK) de $\mathscr{C}$**
Parabole	Un sommet qui est le point S milieu du segment [FK] 
Ellipse	Deux sommets qui sont : $S_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & e \end{array}$ et $S_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & -e \end{array}$ 
Hyperbole	Deux sommets qui sont : $S_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & e \end{array}$ et $S_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & -e \end{array}$ 

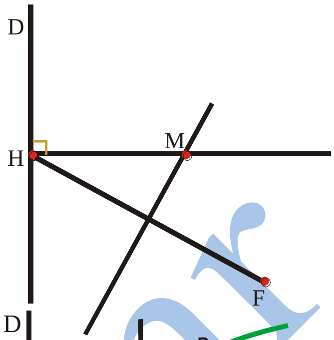
II. A propos d'une parabole

On appelle paramètre de la parabole de foyer F et de directrice D, la distance entre F et D, on le note p ; p = FK.

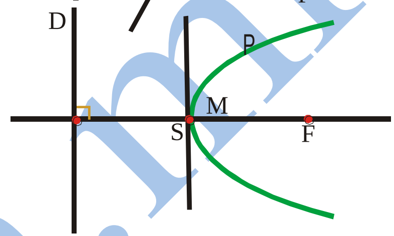


Construction point par point d'une parabole

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice D.
Soit H un point quelconque de D.
Le point M intersection de la médiatrice de [FH] avec la perpendiculaire à D en H, appartient à $\mathcal{P}$.
La médiatrice de [FH] est la tangente à $\mathcal{P}$ en M.



La tangente au sommet S d'une parabole $\mathcal{P}$ de directrice D, est parallèle à D.

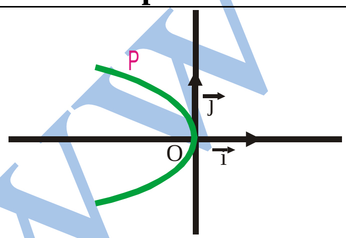
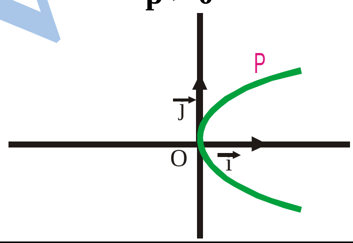
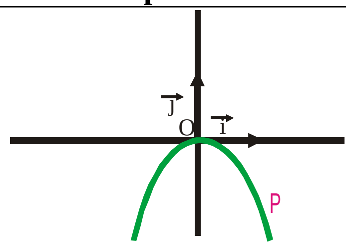
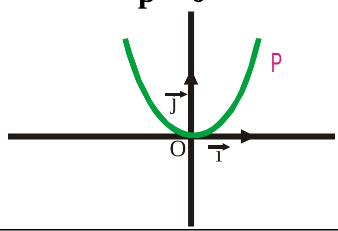


III. Equation cartésienne réduite d'une conique

1) parabole

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $|P|$ si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme : $y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ avec $p \in \mathbf{R}^*$.

En plus, le sommet de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.

Cas où $\mathscr{C}$: $y^2 = 2px$	**Cas où $\mathscr{C}$: $x^2 = 2py$**
▪ L'axe de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses. ▪ Le foyer de est $F(\frac{p}{2} ; 0)$ ▪ La directrice de $\mathscr{C}$ est la droite D d'équation $x = -\frac{p}{2}$	▪ L'axe de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées ▪ Le foyer de est $F(0 ; \frac{p}{2})$ ▪ La directrice de $\mathscr{C}$ est la droite D d'équation $y = -\frac{p}{2}$
p < 0  **p > 0**  	**p < 0**  **p > 0** 
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $yy_0 = p(x + x_0)$	Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $xx_0 = p(y + y_0)$

En plus

Une parabole a un seul axe de symétrie, un seul foyer, une seule directrice, un seul sommet.

2) Ellipse

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une ellipse si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \text{où } a \in \mathbf{R}_+^* ; b \in \mathbf{R}_+^* ; a \neq b$$

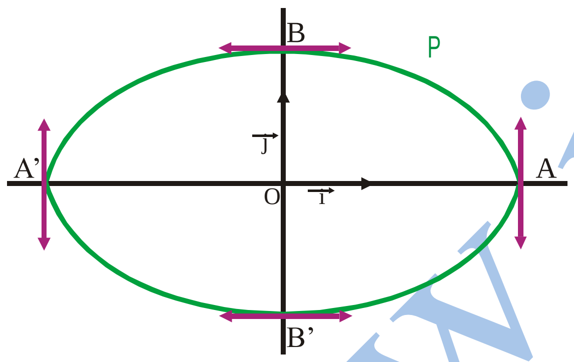
En plus, le centre de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.
Les sommets de $\mathscr{C}$ sont les points : A(a ; 0) ; A'(-a ; 0) : B(0 ; b) ; (B'(0 ; -b).

Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

En plus,

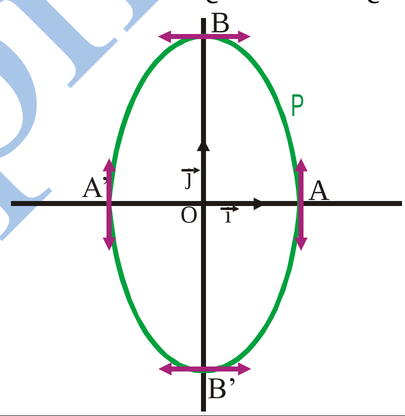
<table>
<tr><th>cas où : a > b</th><th>cas : où a < b</th></tr>
<tr><td>

- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses $c = \sqrt{a^2-b^2}$.
- L'excentricité de $\mathscr{C}$ est $e = \frac{c}{a}$
- Les foyer de $\mathscr{C}$ sont F(c ; 0) ; F'(-c ; 0)
- Les directrice de $\mathscr{C}$ sont les droites D ; D' d'équations : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$



</td><td>

- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées $c = \sqrt{b^2-a^2}$.
- L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \frac{c}{b}$.
- Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(0 ; c) ; F'(0 ; -c)
- Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D et D' d'équations $y = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b^2}{c}$



</td></tr>
</table>

En plus
Une ellipse a un centre de symétrie, deux axes de symétries, deux foyers ; deux directrices ; quatre sommets.

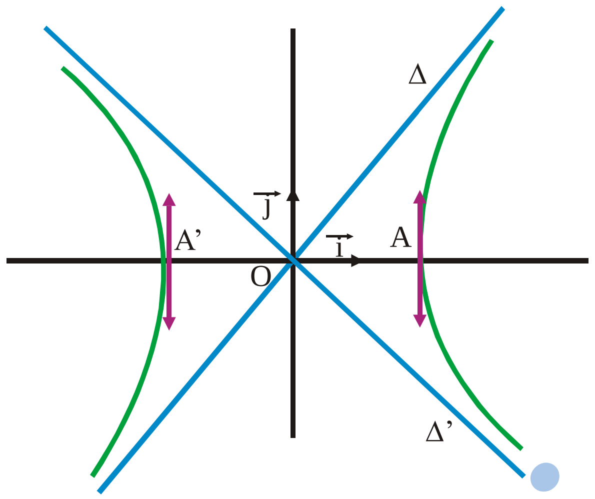
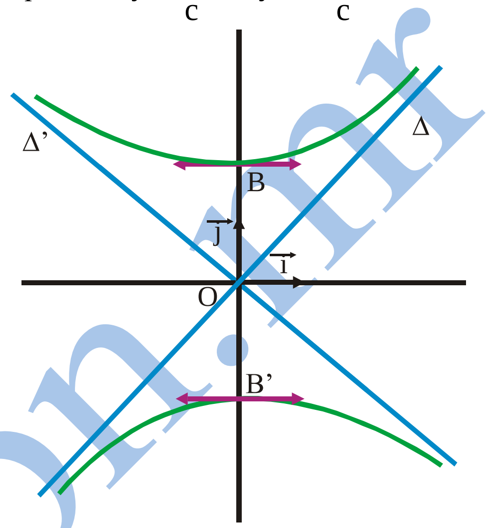
3) Hyperbole

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une hyperbole si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\ \text{ou } \frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \text{où } a \in \mathbf{R}_+^* ; b \in \mathbf{R}_+^*.$$

En plus :

- le centre de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.
- Les asymptotes de $\mathscr{C}$ sont les droites Δ et Δ' d'équations : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$
- $c = \sqrt{a^2+b^2}$

cas où $\mathscr{C}$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	cas où $\mathscr{C}$: $\dfrac{-x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
▪ L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses ▪ Les sommets de $\mathscr{C}$ sont A(a ; 0) ; A'(-a ; 0). ▪ L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \dfrac{c}{a}$ ▪ Les foyer de $\mathscr{C}$ sont F(c ; 0) ; F'(-c ; 0) ▪ Les directrice de $\mathscr{C}$ sont les droites D ; D' d'équations : $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$.  ▪ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	▪ L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées. ▪ Les sommets de $\mathscr{C}$ sont B(0 ; b) ; A'(0 ; -b). ▪ L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \dfrac{c}{b}$. ▪ Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(0 ; c) ; F'(0 ; -c) ▪ Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D et D' d'équations $y = \dfrac{b^2}{c}$ et $y = -\dfrac{b^2}{c}$  ▪ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\dfrac{-xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

▪ Si a = b, alors $\mathscr{C}$ est appelée une hyperbole équilatère
▪ Une hyperbole a un centre de symétrie, deux axes de symétries, deux foyers ; deux directrices et deux sommets,
▪ La tangente a une conique $\mathscr{C}$ en l'un quelconque de ses sommets est perpendiculaire à l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$ contenant ce sommet.

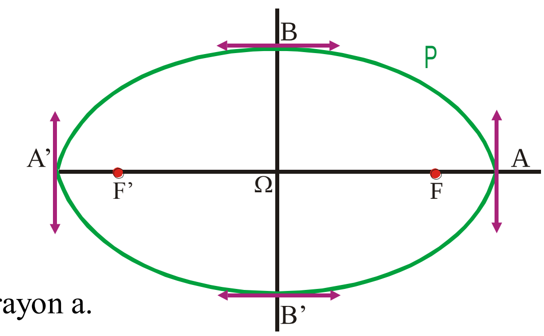
IV. Définition par les deux foyers d'une conique bifocale

1) Ellipse

Soit F et F' deux points distincts donnés dans le plan. Soit a un réel strictement positif tel que FF' < 2a.
L'ellipse $\mathscr{C}$ de foyer F et F' et de grand axe mesurant 2a est l'ensemble des points M du plan tels que : MF + MF' = 2a.

En plus

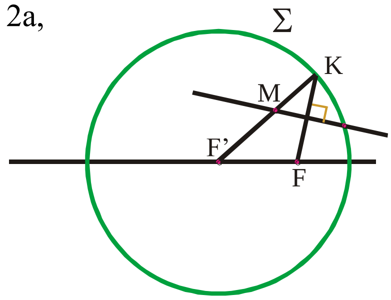
- Le centre de $\mathscr{C}$ est Ω milieu de [FF'],
- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est la droite (FF'),
- Les deux sommets de $\mathscr{C}$ situés sur (FF'), appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon a.
- L'axe non focal de $\mathscr{C}$ est la médiatrice Δ de [FF'],
- Les deux sommets de $\mathscr{C}$ situés sur Δ, appartiennent au cercle de centre l'un des foyers et de rayon a.



▪ c = ΩF ; | ▪ a = ΩA = FB

▪ l'excentricité de $\mathscr{C}$ est $e = \dfrac{c}{a}$

Construction point par point de $\mathscr{C}$ à l'aide d'un cercle directeur de $\mathscr{C}$



Etant donné une ellipse $\mathscr{C}$ de foyer F et F' et de grand axe mesurant 2a, on appelle le cercle directeur de $\mathscr{C}$ relatif au foyer F', le cercle $\sum$ de centre F' et de rayon 2a.

Soit K un point quelconque de $\sum$.

Le point M intersection de la médiatrice de [FK] avec la droite [F'K], appartient à $\mathscr{C}$.
La médiatrice de [FK] est la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

2) Hyperbole

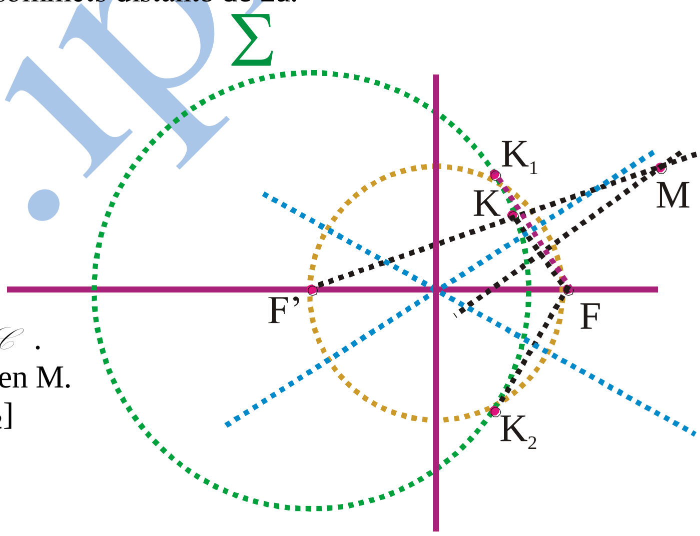
Soit F et F' deux points distincts donnés dans le plan.
Soit a un réel strictement positif tel que FF' > 2a.
L'hyperbole $\mathscr{C}$ de foyer F et F' de sommets distants de 2a est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2a$.

En plus

- Le centre de $\mathscr{C}$ est le milieu de [FF'],
- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est la droite (FF')
- L'axe non focal de $\mathscr{C}$ est la médiatrice de [FF'].

Construction point par point de $\mathscr{C}$ à l'aide d'un cercle directeur de $\mathscr{C}$

Soit $\mathscr{C}$ une hyperbole de foyers F et F' et de sommets distants de 2a.



- $\sum$ cercle de centre F' et de rayon 2a
  (cercle directeur de $\mathscr{C}$ relatif à F'),
- $\sum$ coupe le cercle de diamètre [FF'] en K_1 et K_2.
  Soit K un point quelconque du petit arc $\overset{\frown}{K_1K_2}$ de $\sum$ privé de K_1 et K_2.
  Le point M intersection de la médiatrice de [FK] avec la droite (F'K), appartient à $\mathscr{C}$.
- La médiatrice de [FK] est la tangente à $\mathscr{C}$ en M.
- Les médiatrices des segments $[FK_1]$ et $[FK_2]$ sont les asymptotes de $\mathscr{C}$.

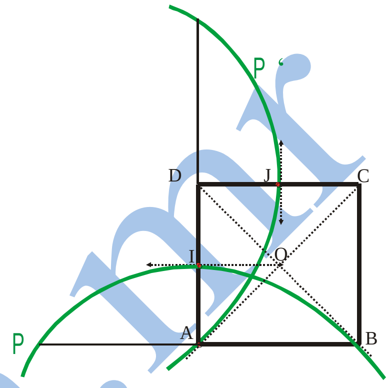
Savoir-faire

A. Applications

Exercice 1

ABCD un carré directe de centre O. I et J les milieux respectifs de [AD] et [CD].
Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet I et de foyer A.

1. Déterminer la directrice de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que B appartient à $\mathcal{P}$ et préciser la tangente à $\mathcal{P}$ en B.
3. Soit $\mathcal{P}$ ‘ l'image de $\mathcal{P}$ par le quart de tour indirect de centre O. déterminer la nature et les éléments géométriques de $\mathcal{P}$ ‘.
4. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ ‘ .



Solution

1. Comme l'axe focal de $\mathcal{P}$ est la droite (IA) et que D est le symétrique de A par rapport à I et que la droite (CD) est perpendiculaire à (IA),
   donc la directrice de $\mathcal{P}$ est la droite (CD).
2. Comme : BA = BC et que C est le projeté orthogonal de B sur (CD). Donc B$\in \mathcal{P}$.
   La médiatrice [BD] du segment [AC] est la tangente à $\mathcal{P}$ en B.
3. Comme : $R \begin{cases} I \mapsto J \\ A \mapsto D \\ (CD) \mapsto (BC) \end{cases}$; donc $\mathcal{P}$ ‘ est la parabole de sommet J, de foyer D et de directrice la droite (BC).

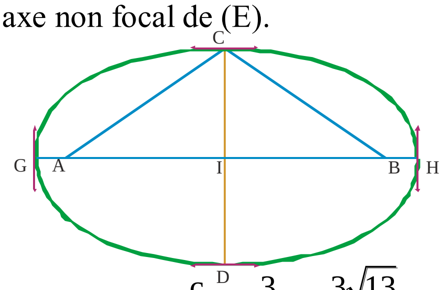
Exercice 2

ABC un triangle isocèle en C, avec I milieu de [AB] et tel que : AB = 6 ; IC = 2.
Soit E l'ellipse de foyers A et B et passant par C.

1) Quelle est la longueur du grand axe de E ?
2) Préciser un sommet de E, déterminer et construire les trois autres sommets de E. Tracer E.
3) Déterminer l'excentricité de E.

Solution

1. Comme C$\in$E et A et B foyers de E ; la longueur du grand axe de E est : 2a = CA + CB = 2CA ;
   Or $AC^2 = AI^2 + IC^2 = 9 + 4 = 13$; donc AC = $\sqrt{13}$; d'où $2a = 2\sqrt{13}$.
2. Comme (IC) est la médiatrice de [AB] ; donc (IC) est l'axe non focal de (E).
   Or ; C$\in$(IC) ; donc C est un sommet de E.
   Le deuxième sommet de E sur (IC) est D = S_{AB}(C).
   L'axe focal de E étant (AB) ; les deux sommets de E sur (AB) sont les points G et H d'intersection de (AB) avec le cercle de centre I (centre de E) et de rayon a = AC.



3. Comme c = IA = 3 et a = AC = $\sqrt{13}$; donc l'excentricité de E est $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Exercice 3

On considère le plan complexe muni d'u repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
On pose : $Z' = 1 + e^{i\theta}$ et $Z'' = 1 - e^{-i\theta}$; $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$.
Soit M' et M'' les points d'affixes respectives Z' et Z''. Soit G = bar $\{(M';3)\ ,\ (M'';2)\}$.

1) Déterminer l'affixe du point G en fonction de θ.
2) Montrer que si θ décrit $[0\ ;\ 2\pi]$ alors le lieu géométrique Γ 'de G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
3) Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse Γ '. Construire Γ '.

Solution

1) L'affixe du point G est Z_G :

$$Z_G = \frac{3Z'+2Z''}{5} = \frac{3(1+\cos\theta+i\sin\theta)+2(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{5}$$; d'où $Z_G = 1 + \frac{1}{5}\cos\theta + i\sin\theta$;

2) Soit G(x ; y) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{1}{5}\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0;2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0\ ;\ 2\pi] \Leftrightarrow 25(x-1)^2 + y^2 = 1$,

Donc, Γ ' a pour équation cartésienne : $25(x-1)^2 + y^2 = 1$, Or, avec $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y \end{cases}$; Γ ' a pour équation cartésienne :

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{5})^2} + \frac{Y^2}{(1)^2} = 1$$; Donc, Γ ' est une ellipse où $a = \frac{1}{5}$ et $b = 1 =$ ($a < b$).

3) Les éléments caractéristiques de Γ ': $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; l'excentricité de Γ' est $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

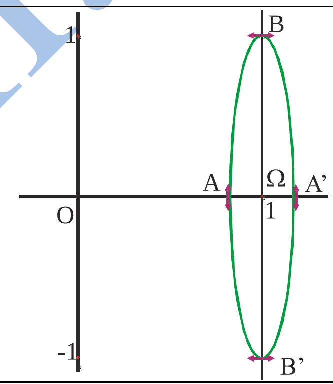
Nouveau repère $(\Omega\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- Le centre de Γ ' est Ω(0 ; 0) ;
- Les sommets de Γ ' sont A($\frac{1}{5}$; 0) ; A'(-$\frac{1}{5}$; 0); B(0 ; 1) ; B'(0 ; -1).

Ancien repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- Le centre de Γ ' est Ω(1 ; 0) ;
- Les sommets de Γ 'sont A($\frac{6}{5}$; 0) ; A'($\frac{4}{5}$; 0) ; B(1 ; 1) ; B'(1 ; -1).

Représentation



Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ .On pose Z = x + iy ; x et y de $\mathbb{R}$.

1.) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble H des points M d'affixe Z tels que : $\text{Re}(Z-i)^2 = 1$.

2.) Reconnaître H, donner son centre, ses sommets, ses asymptotes et tracer H.

Solution

1.) $(Z-i)^2 = (x+i(y-1))^2 = x^2 - (y-1)^2 + 2ix(y-1)$;

Donc $\text{Re}(Z-i)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = 1$; donc une équation cartésienne de H est $x^2 - (y-1)^2 = 1$

2.) Avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases}$; H a pour équation cartésienne $\frac{X^2}{(1)^2} - \frac{Y^2}{(1)^2} = 1$;

Donc, H est une hyperbole équilatère (a = b = 1).

Nouveau repère $(\Omega\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

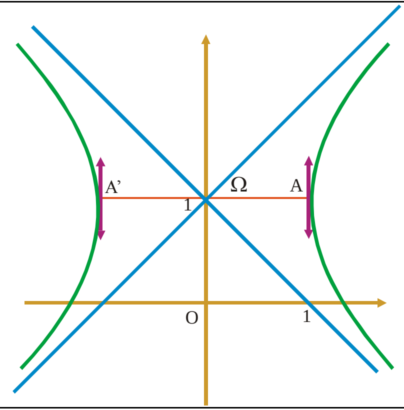
- Le centre de H est Ω(0 ; 0) ;
- Les sommets de H sont A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0);
- Les asymptotes de H sont :

Δ : Y = X et Δ' : Y = -X

Ancien repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

- Le centre de H est Ω(0 ; 1) ;
- Les sommets de H sont A(1 ; 1) ; A'(-1 ; 1) ;
- Les asymptotes de H sont :

Δ : y = x + 1 et Δ' : y = -x + 1



B. Exercices

1. Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F de directrice D et d'excentricité e.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ ne rencontre pas D
2. Montrer que F n'appartient pas à D.

2. Soit Dune droite et F un point n'appartient pas à D. Soit $\mathscr{C}_1$ la parabole de foyer F et de directrice D.
$\mathscr{C}_2$ une ellipse de foyer et de directrice associées F et D.
$\mathscr{C}_3$ une hyperbole de foyer et de directrice associés F et D.
Montrer que $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$ sont disjointes deux à deux.

3. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de paramètre p.

1. Déterminer l'ensemble des directrices possibles de $\mathcal{P}$.
2. Soit d une droite passant par F.
   Montrer qu'il existe deux paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de foyers F et de directrices parallèles à d.
   Construire $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Soit ABC un triangle et I milieu de [BC].
Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer I et tangente aux droites (AB) et (AC).

1. Construire la directrice de $\mathcal{P}$ et son sommet.
2. Construire les points de contact de $\mathcal{P}$ avec (AB) et (AC).
3. Tracer $\mathcal{P}$.

5. Déterminer la nature et les éléments géométriques de la courbe Γ d'équation (E) dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ et tracer Γ.

1. (E) : $(x-1)^2+2y=0$
2. (E) : $4(x-1)^2+16y^2=1$
3. (E) : $x^2-2y^2+2x-4y=0$

6. ABCD un carré. I milieu de [AD].
Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet I, de directrice (AB).

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ dans le repère orthonormal $(I;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$.
2. Vérifier que C appartient à $\mathcal{P}$
3. Vérifier que la tangente à $\mathcal{P}$ ¨en C est la droite (AC).

7. Dans le plan orienté, on considère un, losange ABCD direct de centre O, tel que : $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA] ; [AD].
P un point de [OA] tel que le triangle PBD soit rectangle en P. soit E l'ellipse de foyer B et C et passant par O. Soit 2a (a > 0) la longueur du grand axe de E.

1. Montrer que K appartient à E tel que CP = 2a
2. En déduire une construction géométrique à justifier des deux sommets de l'axe focal et des deux autres sommets. Construire E

8. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère l'ensemble E des points M(x ; y) tels que :
$25(x^2+y^2)=(3x-16)^2$; (1)
En interprétant géométriquement la relation (1), montrer que E est une ellipse de foyer O et de directrice la droite Δ d'équation $x=\frac{16}{3}$.
Déterminer l'excentricité de E. tracer E.
Dans la suite, on désigne par M un point de E et θ une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.
Déduire de la relation (1), une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.
Montrer que : $OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$.
On suppose que : $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. La droite (OM) coupe Δ en I et recoupe E en M'.
Montrer que : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$.

9. Soit $\theta\in[0\ ;2\pi[$.

1. Résoudre dans **C** l'équation,
   $Z^2-8Z\cos\theta+16-7\sin^2\theta=0$
   Soit Z_1 et Z_2 ses deux solutions.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct d'unité 1 cm, $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Soit $M_1(Z_1)$; $M_2(Z_2)$; Γ l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit [0 ; 2π[.
   a) Déterminer une équation cartésienne de Γ .
   b) Reconnaître Γ, donner ses éléments géométriques caractéristiques, construireΓ.
3. Soit A(0 ; 1) et M∈ Γ, on désigne par G le barycentre du système $\{(A\ ;\ -3)\ ;\ (M\ ;\ 1)\}$.

a) Montrer que lorsque M décrit Γ, alors G décrit une ellipse Γ 'et déduire les coordonnées des sommets et du centre de Γ '.

b) Déduire une équation de Γ ‘. Construire Γ ‘ dans le repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, placer les points M_1 ; M_2 ; G_1 ; G_2 dans la figure précédente.

10 ABCD un carré de centre O. I, J les milieux respectifs de [AB] ; [AD], on pose AB = a .
$\mathcal{P}$ la parabole de sommet J et de directrice (CD).
E l'ellipse de foyer A et B et de grand axe mesurant AC.

1.) a) Quel est le foyer et le paramètre de $\mathcal{P}$?
 b) Quelle est la tangente de $\mathcal{P}$ en J ?
2.) a) Quel est le centre de E ?
 b) Montrer que O est un sommet de E et préciser la tangente à E en O.
 c) construire les autres sommets de E.
 d) Déterminer l'excentricité de E
3.) Tracer $\mathcal{P}$ et E.

11 Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, on considère l'équation
E : $Z^2 - (\cos t)Z + 4 + 5\sin^2 t = 0$; où $t \in [\ 0 \ ; \pi\ [$ est un paramètre.

1. Résoudre dans **C**, l'équation E, noter Z_1 et Z_2 les solutions avec $\mathrm{Im}(Z_1) > 0$.
2. Dans le plan complexe, soit $M_1(Z_1)$ et $M_2(Z_2)$
 a) Démontrer que lorsque t varie dans [0 ; θ], alors M_1 et M_2 décrivent une ellipse Γ dont on donnera une équation cartésienne.
 b) Donner les éléments caractéristiques de l'ellipse Γ pour la construire.
 c) Placer les points M1 et M2 pou $t = \frac{\pi}{6}$.
3. Soit f l'application qui au point M (Z = x + iy) associe le point M'(Z' = x' + iy') tel que :
 $Z' = \frac{5Z + \bar{Z}}{4}$.
 a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y.
 b) On pose $\boldsymbol{f}$ (Γ) = Γ ‘
 Donner une équation cartésienne de Γ‘. vérifier que Γ ‘ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon pour le construire.
 c) En déduire une méthode géométrique qui permet de construire Γ point par point à partir de Γ‘.

« Affinité orthogonale »

12 Soit D une droite donnée, soit k un nombre réel donné. $\boldsymbol{f}$ définie par :

$$\begin{cases} M \in D \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(M) = M; \ (M \notin D \text{ et } \boldsymbol{f}(M) = M') \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}; \text{avec H projeté orthogonal de M sur} \end{cases}$$

F est appelée une affinité orthogonale de rapport k et d'axe D.

1) Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonal d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$ dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
2) Soit Γ l'ensemble d'équation cartésienne :
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ et $\Gamma' = \boldsymbol{f}(\Gamma)$
 a) Donner les éléments géométriques de Γ, puis construire Γ.
 b) Donner une équation cartésienne de Γ ‘. Reconnaître ; caractériser et construire Γ ‘.

13 Soit D une droite et A un point donné n'appartenant pas à D. Soit A' le projeté orthogonal de A sur D.

1) Déterminer le lieu géométrique Γ du foyer F d'une parabole passant par A et de directrice D.
 ConstruireΓ.
2) En déduire le lieu géométrique Γ ‘ du sommet S d'une parabole passant par A et de directrice D.
 Construire Γ ‘.

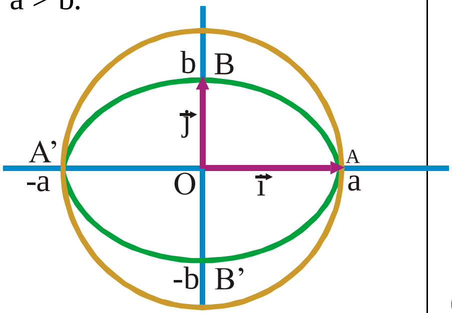
14 Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), on considère l'ensemble Γ des points M(x ; y) du plan tel que : $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$; où $a \in \mathbf{R}^*$; $b \in \mathbf{R}^*$

1) Déterminer suivant les valeurs de a et b la nature de Γ .
2) Donner les éléments géométriques de Γ et le construire dans chacun des cas :
 a) a = 4 ; b = 9 ;
 b) a = - 4 ; b = 9
 c) a = b = 4.

Cercle principal et paramétrage d'une ellipse

15 Le plan est rapporté a un repère orthonormal $(o\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que : a > b.

1) Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$.



2) Soit Γ le cercle de centre O et de rayon a.
Soit $\mathscr{C}$ l'image de Γ par f .

a) Donner une équation cartésienne de Γ.
b) En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ puis que $\mathscr{C}$ est une ellipse.
(le cercle Γ est appelé le cercle principal de l'ellipse $\mathscr{C}$).

3) a) Donner une représentation paramétrique de Γ

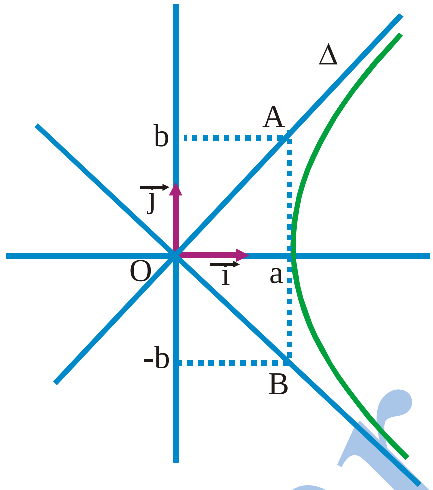
b) En déduire que : $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}\ ; -\pi \le \theta \le \pi$.

Constitue une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathscr{C}$.

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

16 Soit $\mathscr{C}$ une hyperbole de centre O et d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormal $(o\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ (où l'axe focal de $\mathscr{C}$ est $(O\,;\,\vec{i})$.

1) Considérons le repère $(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v})$,
avec $\vec{u} = \overrightarrow{OB} = a\vec{i} - b\vec{j}\ ;\ \vec{v} = \overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathscr{C}$). Soit M un point de coordonnées (x ; y) dans le repère orthonormal. $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ et de coordonnées (X ; Y) dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

a) Montrer que x = a(X + Y) et y = b(X – Y).

b) Montrer que dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v})$ l'équation de $\mathscr{C}$ est alors, $X.Y = \frac{1}{4}$.

2) Choisissons maintenant un autre repère $(O\,;\vec{u_1}\,;\,\vec{v_1})$ où $\vec{u_1}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v_1}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
Montrer que dans le repère $(O\,;\,\vec{u_1}\,;\,\vec{v_1})$ l'hyperbole $\mathscr{C}$ a une équation de la forme $Y_1.X_1 = k$ où k est un réel non nul.

3) Soit $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ un repère quelconque et k un réel non nul. Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) tels que xy = k.
Montrer que Γ est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes du repère.

CHAPITRE 18

Probabilités

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Dénombrement (Rappel)

1. Produit cartésien d'ensembles finis

Définition

E et F sont deux ensembles finis et non vides.
Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ formés d'un élément x de E suivi d'un élément y de F.

Théorème

Si E et F sont des ensembles finis tels que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $\text{Card}(E \times F) = np$.

2. p-liste- arrangement- permutation

a) p-liste

Définition

Soit E un ensemble fini et n son cardinal, soit p un entier naturel non nul.
Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \ldots\ ;a_p)$ constitué d'éléments de E. l'ensemble des p-listes d'éléments de E se note E^p.

Théorème

E est un ensemble fini tel que $\text{Card}E = n$. Pour tout naturel $p \geq 1$, on a : $\text{Card}\ E^p = n^p$.

b) Arrangement- permutation

Définition

n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et F est un ensemble a n éléments.
Un arrangement de p éléments de F est un p-uplet d'éléments deux a deux distincts de F.

Théorème

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble a n éléments, avec $1 \leq p \leq n$, est :
$n(n-1)\ldots(n-p+1)$. On note ce nombre A_n^p, soit $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$.

c) Permutation

Définition 1

n est un naturel non nul et F est un ensemble tel que $\text{card}F = n$. une permutation des éléments de F est un arrangement de n éléments de F.
D'après le théorème précédent, le nombre de permutation est :
$A_n^n = n(n-1)\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots \times 2 \times 1$.

Définition 2

n est un naturel non nul, on désigne par n! (qui se lit factorielle n) le nombre défini par :

- $n! = n(n-1)\ldots \times 2 \times 1$; pour tout $n \neq 0$;
- et $0! = 1$

Théorème

Le nombre de permutation de n éléments est n!.

d) Autre écriture de A_n^p

La notation ''factorielle'' permet d'écrire d'une autre façon le nombre A_n^p,

On a $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$,

Multiplions et divisons simultanément ce produit de facteurs par $(n-p)\ldots\times 2 \times 1$, il vient

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-p)\times\ldots\times 2\times 1!}, \text{ d'où } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3. Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$)

Théorème

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, avec $p \leq n$, est $\frac{A_n^p}{p!}$, on note ce nombre C_n^p, on a donc ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Définition

Une partie a p éléments d'un ensemble F à n éléments ($p \leq n$ s'appelle une combinaison de p des n éléments de F.

4. Propriétés des C_n^p

a) pour tout naturel n : $C_n^0 = 1$ et $C_n^n = 1$

b) pour tout naturel $n \geq 1$: $C_n^1 = n$

c) pour tout naturel n et p tels que $p \leq n$ on a : $C_n^{n-p} = C_n^p$

d) pour tout naturel n et p tels que $1 \leq p \leq n\text{-}1$: on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

la propriété (d) va permettre de calculer rapidement de proche en proche les C_n^p sans utiliser $\frac{n!}{(n-p)!p!}$

sur le tableau qui suit , appelé triangle de pascal, à l'intersection de la ligne ''n'' et de la colonne ''p'' on lit le naturel C_n^p.

On le complète en commençant à remplir la colonne ''p = 0'' à l'aide des chiffres 1 (car $C_n^0 = 1$) et la diagonale à l'aide des chiffres 1 (car $C_n^n = 1$). On le complète ensuite en utilisant à chaque fois la propriété (d).

Triangle de Pascale

p / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	.	.	.
0	**1**											
1	**1**	**1**										
2	**1**	**2**	**1**									
3	**1**	**3**	**3**	**1**								
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**							
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**						
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**					
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**				
8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**			
.												
.												
.												

5. Le binôme de Newton

Pour tous complexes a et b , et pour tout naturel $n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Cette égalité est appelée formule du binôme de Newton.

- Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

II. Probabilité

1. Vocabulaire

a) Expérience aléatoire, univers

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat, avant de l'effectuer.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Exemple

Lancer un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est une expérience aléatoire.

L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

b) Evénement

Un événement est une partie de l'univers.

Exemple

Dans l'exemple précédent $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ est un événement.

A est l'événement ''obtenir un nombre impair'' $B = \{6\}$ est un événement élémentaire.

- ϕ est l'événement impossible
- l'univers Ω est l'événement certain

c) Si A et B sont deux événements :

- $A \cap B$ est l'événement '' A et B''
- $A \cup B$ est l'événement '' A ou B''

d) Si $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont incompatibles (disjoints)

e) $\overline{A}$ est l'événement contraire de A

On a : $A \cap \overline{A} = \phi$; $A \cup \overline{A} = \Omega$, où Ω est l'univers lié à l'expérience.

2) Notion de probabilité

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω.

La probabilité d'un événement A est un nombre, compris entre 0 et 1, mesurant les ''chances'' que cet événement a de se produire ; c'est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.

On note ce nombre souvent P(A). Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite. On a alors, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}.$$

Exemple

On jette un dé a six faces numérotés de 1 à 6, non truqué.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : '' avoir un nombre pair'' ; B ''avoir un multiple de 3'' ; C ''avoir un nombre supérieur a 2''

Solution

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- $A = \{2 ; 4 ; 6\}$; $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $B = \{3 ; 6\}$; $P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3) Propriétés

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω

- Pour tout événement A on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; celle de l'événement impossible est 0 :
  $P(\Omega) = 1$; $P(\phi) = 0$.
- Si A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires, alors, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tous événements A et B, la probabilité de la réunion $A \cup B$ est
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Probabilité conditionnelle

Définition

A et B sont deux événements et A n'est pas l'événement impossible, c'est-à-dire $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B, sous l'hypothèse A (c'est-à-dire la probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé), le réel, noté $P(B\backslash A)$ et défini par $P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

5. Evénements indépendants

a) Définition

A et B sont deux événements et B n'est pas l'événement certain, ni l'événement impossible ($P(B) \neq 1$ et $P(B) \neq 0$).

Dire que A est indépendant de B en probabilité signifie que : $P(A\backslash B) = P(A\backslash \overline{B})$.

b) Théorème

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

6. Variable aléatoire

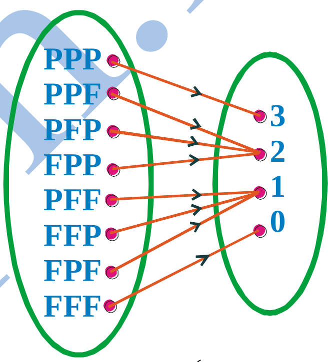
Définition 1

Ω est l'ensemble des issues (univers) d'une expérience aléatoire.
Toute fonction définie sur Ω à valeurs dans **R** est appelée une variable aléatoire.
Une variable aléatoire est noté à l'aide d'une lettre majuscule : X ; Y ; Z ;…

Exemple :

On considère trois pièces de monnaie discernables, non truquées. On jette les trois pièces et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de côtés ''pile'', obtenus (on désignera le côté pile par P et le côté face par F).

Déterminer l'ensemble des valeurs de X.
Soit Ω l'univers associé à cette expérience, donc,
$\Omega = \{FFF\ ;\ FFP\ ;\ FPF\ ;\ PFF\ ;\ PPF;\ PFP\ ;\ FPP\ ;\ PPP\}$.
L'ensemble des valeurs de X est noté
$X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.



Définition 2

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble fini Ω et $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_n\}$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
On appelle loi de probabilité de X la fonction f de $X(\Omega)$ dans [0 ; 1] , qui à chaque xi associe la probabilité de l'événement A_i, réunion des événements élémentaires d'images x_i par X.
Pour tout naturel i , $1 \leq i \leq n$, on note $f(x_i) = P(A_i) = P(X = x_i)$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent des trois pièces de monnaie.

$X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$; $P(X = 0) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$; $P(X = 1) = P(\{FFP\ ;\ FPF\ ;\ PFF\}) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = P(\{PPF\ ;\ PFP\ ;\ FPP\}) = \frac{3}{8}$; $P(X = 3) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$.

Le tableau suivant représente la loi de probabilité de X.

Xi	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Définition 3

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω.
On appelle fonction de répartition de X la fonction F de **R** dans [O ; 1], définie pour tout réel a par : $F(a) = P(X < a)$.

Définition 4

$\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ;\ x_n\}$ est l'ensemble des images d'une variable aléatoire X. pour tout naturel i tel que : $1 \le i \le n$; $P_i = P(X = x_i)$.

On appelle espérance mathématiques variance de X le réel noté E(X), défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Définition 5

X est une variable aléatoire dont l'ensemble des images est x_1 ; x_2 ; …x_n et dont l'epérience mathématique est $E(X) = m$.

Posons pour tout naturel i ; tel que : $1 \le i \le n$; $p_i = p(X = x_i)$. On appelle

a) Variance de X , le réel noté V(X), tel que : $V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{n}(xi - m)^2 p_i$.

b) Ecart- type de X le réel noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

Il est souvent plus commode de calculer V(X) grâce à la formule de Koenig : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple

Il s'agit de reprendre encore l'exemple précédent.

Définir la fonction de répartition F de X et la représenter

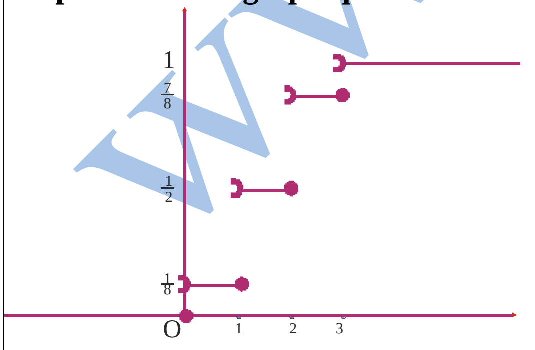
Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Solution

a) $X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$;

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } x \in]-\infty;\ 0]\ ;\ F(x)=0\ ;\ \bullet \text{ si } x \in]0;\ 1];\ F(x)=\frac{1}{8};\ \ \bullet \text{ si } x \in]1;\ 2];\ F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8} \\ \bullet \text{ si } x \in]2;\ 3];\ F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8};\ \bullet \text{ si } x \in]3;\ +\infty[;\ F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1 \end{cases}$$

Représentation graphique de F



b) L'espérance mathématique de X

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$,

$$E(X) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

La variance de X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$

$$(0)^2P(X = (0) + (1)^2P(X = 1) + (2)^2P(X = 2) + (3)^2P(X= 3) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{22}{8} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

- On appelle suite d'épreuves (ou schéma) de Bernoulli l'expérience qui consiste à répéter plusieurs fois, de façon indépendante, une épreuve ayant deux issues possibles : l'une appelée ''succès'', l'autre appelée ''échec''.
- Soit une suite de n épreuves de Bernoulli avec, pour chaque épreuve, la probabilité p pour le succès
  (donc :q = 1- p pour l'échec).
  Soit k un élément de $\{1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n\}$ la probabilité P_k d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves vérifie : $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$.
  L'application $k : \mapsto P_k$ est appelée loi binomiale de paramètre (n ; p).

Exemple

a) Lors d'un examen, on pose à un candidat une question en lui proposant trois réponses ; parmi elles ; une seule est correcte. le candidat choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte ?

b) un test se compose de quatre questions posées dans les conditions ci-dessus.
Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à trois questions ? à quatre questions ?

Solution

Il est clair que la probabilité que le candidat donne la réponse exacte est $\frac{1}{3}$.

b) Un test est une suite de quatre questions dont les réponses sont indépendantes deux à deux. Une réponse peut être soit exacte, soit fausse. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

- 4 est le nombre d'épreuves, donc n = 4 ; $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'un succès ; $p = \frac{1}{3}$,
- $\frac{2}{3}$ est la probabilité d'un échec : $q = \frac{2}{3}$

Il en résulte que la probabilité p_3 que le candidat donne trois bonnes réponses est :

$$p_3 = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}.$$

De même, la probabilité que le candidat donne quatre bonnes réponses est

$$p_4 = C_4^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}.$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètre (n ; p), alors, on a :

- $P(X = k) = C_n^k \times p^k q^{n-k}$;
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Savoir-faire

A. Applications

Exercice. 1

On considère un réseau téléphonique dont les numéros de téléphone ont 8 chiffres. Quelle est la capacité théorique du réseau ?

Solution

Un numéro de téléphone est un 8-uplet d'éléments de : $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$. Il y a donc 10^8 numéros possibles, ce qui signifie que la capacité théorique du réseau est de 100 000 000 de numéros.

Exercice. 2

Une assemblée de 30 personnes doit élire un bureau composé de quatre membres (un président ; un vice- président ; un secrétaire et un trésorier).

Combien y a-t-il de bureau possibles, sachant que chacune des 30 personnes est éligible et à n'importe quel poste ?

Solution

Elire un bureau revient à considérer un arrangement de quatre éléments de l'ensemble des 30 personnes, car une personne ne peut occuper deux postes différentes, d'où le nombre de bureaux possibles :

$A_{30}^{4} = 30\times29\times28\times27 = 657.720$.

Exercice. 3

Dix cyclistes prennent le départ d'une course. Tous arrivent, il n'y a pas d'ex æquo. Combien y a-t-il de classements possibles ?

Solution

Le nombre de classements est celui des permutations des éléments d'un ensemble de cardinal 10, c'est à-dire : 10 !, soit 3 628 800.

Exercice. 4

Une classe comporte vingt élèves : douze filles et huit garçons.

Le professeur de Français décide de désigner un groupe de travail de trois élèves chargés de préparer un exposé.

a) Quel est le nombre de groupes possibles ?
b) Combien y a t-il de groupes constitués de trois filles ?
c) Combien y a-t-il de groupes constitués de deux filles et d'un garçon ?

Solution

a) le nombre de groupes constitués est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments soit $C_{20}^{3} = \dfrac{20\times19\times18}{3\times2} = 1140$
b) le nombre de groupes constitués de 3 filles est égal au nombre de combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments (le nombre de filles est 12), soit $C_{12}^{3} = \dfrac{12\times11\times10}{3\times2} = 220$.
c) le nombre de groupes constitués de deux filles et d'un garçon est : $C_{12}^{2}\times C_{8}^{1} = \dfrac{12\times11}{2}\times8 = 6\times11\times8 = 528$.

Exercice. 5
Un sac contient 6 boules blanches et 7 boules noires. On tire simultanément 3 boules de ce sac.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir
- 3 boules blanches ?
- 3 boules noires
- 1 boule blanche et 2 boules noires ?
- 1 boule noire et 2 boules blanches ?

b) Vérifier les résultats précédents en calculant la somme des probabilités ainsi obtenues.

Solution

Le nombre de tirages possibles est : C_{13}^3, donc cardΩ = $C_{13}^3 = \frac{13\times12\times11}{3\times2}$;

cardΩ = 286

a) Le nombre de tirages de 3 boules blanches est : $C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2}$ = 5 × 4 = 20.

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules blanches est : $p_1 = \frac{20}{286}$.

Le nombre de tirages de 3 boules noires est : $C_7^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 7\times5 = 35$,

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules noires est : $p_2 = \frac{35}{286}$.

Le nombre de tirages de 2 boules noires et 1 boule blanche est : $C_7^2\times C_6^1 = \frac{7\times6}{2}\times6 = 21\times6 = 126$.

La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 1 boule blanche est : $p_3 = \frac{126}{286}$.

Le nombre de tirage de 2 boules blanches et 1 boule noire est $C_6^2\times C_7^1 = 15\times7 = 105$,

La probabilité d'obtenir 2 boules blanches et une boule noire est : $p_4 = \frac{105}{286}$.

b) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{20}{286} + \frac{35}{286} + \frac{126}{286} + \frac{105}{286} = \frac{20+35+126+105}{286} = \frac{286}{286} = 1$.

Exercice. 6
Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire simultanément deux.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir :
- Deux chiffres de même parité ; - Deux chiffres de parités différentes ?
b) Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair.
c) Calculer la probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair.

Solution

cardΩ = $C_5^2 = \frac{5\times4}{2} = 10$, le nombre de chiffres pairs = 2, celui des chiffres impairs = 3.

a) la probabilité d'obtenir deux chiffres de même parité est : $\frac{C_2^2 + C_3^2}{10} = \frac{1+3}{10} = \frac{4}{10}$,

- la probabilité d'obtenir deux chiffres de parités différentes est : $\frac{C_2^1\times C_3^1}{10} = \frac{2\times3}{10} = \frac{6}{10}$.

b) la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair peut être calculée ainsi : $\dfrac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{10} = \dfrac{6+1}{10} = \dfrac{7}{10}$,

elle peut être calculée aussi, en utilisant la probabilité de l'événement contraire.

''Obtenir deux chiffres impairs'', cette probabilité est égale à : $\dfrac{C_3^2}{10} = \dfrac{3}{10}$,

Donc la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair est : $1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$.

c) la probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair est : $\dfrac{C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2}{10} = \dfrac{9}{10}$.

Exercice. 7

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire, au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Déterminer la probabilité de l'événement A : ''Obtenir deux boules bleues'' et de l'événement B : '' Obtenir deux boules de couleurs différentes''.

Solution

$\text{card}\Omega = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$; $\text{Card}A = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$; $\text{Card}B = 2 \times A_4^1 \times A_6^1 = 48$;

donc $P(A) = \dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$; $P(B) = \dfrac{48}{90} = \dfrac{8}{15}$.

Exercice. 8

On considère un échantillon de 500 personnes composé de 200 hommes et 300 femmes ; parmi les hommes, 150 ont plus de 30 ans et, parmi les femmes, 200 ont plus de 30 ans.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon.

a) Sachant que cette personne est un homme, quelle est la probabilité pour qu'il ait plus de 30 ans ?

b) Sachant que cette personne a au plus 30 ans, quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ?

Solution

Le tableau suivant résume la situation étudiée.

	≤ 30 ans	>30ans	Total
Hommes	50	150	200
Femmes	100	200	300
Total	150	350	500

On considère comme univers l'ensemble Ω des personnes.

Soient les événements : A : ''la personne est un homme'' et B : ''la personne a plus de 30 ans''.

a) Il s'agit de calculer $P_A(B)$; $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\Omega} = \dfrac{150}{500}$ et $P(A) = \dfrac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \dfrac{200}{500}$. Donc, $P_A(B) = \dfrac{150}{200} = \dfrac{3}{4}$.

b) la probabilité à calculer est : $P_{\overline{B}}(A)$:

$P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$; $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{\text{Card}(A \cap \overline{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{50}{500}$; $P(\overline{B}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{150}{500}$,

Donc, $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{50}{150} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice. 9

Un joueur dispose d'un dé de six faces ; trois blanches, deux sont vertes et une est rouge. Lors du lancer du dé, chaque face a la même probabilité d'apparition. Le joueur lance le dé et observe la couleur de la face supérieure.

- S'il observe une face rouge, il gagne 2F,
- S'il observe une face verte, il gagne 1F,
- S'il observe une face blanche, il relance le dé ; il gagne, alors 3F, pour une face rouge, il perd 1F pour une face verte et le jeu est arrêté sans gain ni perte pour une face blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Solution

a) les valeurs que peut prendre X sont = 2 ; 1 ; 3 ; -1 ; 0.

b) La loi de probabilité de X

- $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ (probabilité d'observer une face rouge),
- $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (probabilité d'observer une face verte),
- $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face rouge),
- $P(X = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face verte.),
- $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face blanche),

Consignons tous les résultats dans un tableau

k	2	1	3	-1	0	
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	

c) $E(X) = 2\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+3\frac{1}{12}+(-1)\frac{1}{6}+(0)\frac{1}{4} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$; Donc; $E(X) = \frac{3}{4}$.

Exercice. 10

Un tireur vise une cible, à chaque tir, la probabilité pour qu'il touche la cible (succès) est 0 ,7. Il tire trois fois de suite, soit Y la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours des trois tirs effectués.

Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer E(Y) ; V(Y) ; σ(Y).

Solution

$Y(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$,

a) La loi de probabilité de Y :

- $P(Y = 0) = C_3^0(0,7)^0(0,3)^3 = 0,027$; $P(Y = 1) = C_3^1(0,7)^1(0,3)^2 = 0,189$;
- $P(Y = 2) = C_3^2(0,7)^2(0,3) = 0,441$; $P(Y = 3) = C_3^3(0,7)^3(0,3)^0 = 0,343$;

k	0	1	2	3
P(X = k)	0 ,027	0,189	0,441	0,343

b) E(Y) = np = 3 × 0,7 = 2,1 ; V(Y) = npq = 3× 0,7 ×0,3 = 0,63 ; $\sigma(Y) = \sqrt{0,63}$

B. Exercice

1. On dispose d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On jette ce dé trois fois de suite pour former un nombre de trois chiffres, le chiffre des centaines étant obtenu par le premier jet, celui des dizaines par le deuxième jet et celui des unités par le troisième jet. Quel est le nombre de résultats possibles.

2. Dans une salle de classe il y a 20 chaises. De combien de façons peuvent prendre place 3élèves ? 5 élèves ?

3. De combien de façon peut-on distribuer 5 livres à 5 élèves ?.

4. Une classe de trente cinq élèves élit deux délégués. Combien y a-t il de choix possibles ?

5. Dans un centre de recherche, on se propose de former pour une expérience une équipe de quatre chercheurs, choisis parmi quatre hommes et six femmes.
Combien d'équipes différentes peut-on former ?

6. Un sac renferme 15 jetons : 4 jetons blancs ; 6 jetons noires et 5 jetons rouges.
On extrait, au hasard, simultanément trois jetons du sac. Déterminer les probabilités des événements suivants :
A''les trois jetons sont noirs'' ; B ''Deux jetons sont blancs et un rouge'' ; C''les trois jetons sont de couleurs différentes''.

7. On tire 3 boules dans une urne qui contient 4 boules rouges et 5 boules blanches.
Calculer la probabilité pour que les 3 boules soient rouges ;
a) Si le tirage a lieu successivement et sans remise
b) Si le tirage a lieu successivement et avec remise.
c)

8. On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit i un élément de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$; on note pi la probabilité de l'événement ''le résultat du lancer est i''.
1. Calculer p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 ; p_5 ; p_6, sachant que : $p_2 = p_1$; $p_3 = 3\ p_1$; $p_4 = p_5 = 2\ p_1$; $p_6 = 2\ p_3$ 2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

9. Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10, on en tire au hasard, successivement, et avec remise, deux boules.
a) Calculer la probabilité p_1 pour que la différence entre deux numéros tirés soit 4.
b) Calculer la probabilité p_2 pour que a) soit réalisé et que la somme des numéros soit 10.

10 Un sac contient 8 boules blanches et 2 boules noires.
1. On en extrait au hasard et simultanément n boules, Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?
2. Combien de boules faut-il prendre simultanément pour que la probabilité d'avoir au moins une boule noire soit supérieure à $\frac{2}{3}$?

11 1. $\boldsymbol{f}$ est la fonction telle que :
$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x}$
Etudier ses variations et tracer sa représentation graphique.
2.a) n est un naturel non nul, une urne électorale contient n – 1 bulletins Non et n +1 bulletins ''Oui ''.
Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins, chaque bulletin ayant la même probabilité d'être prélevé.
Calculer la probabilité p_n de l'événement ''on a prélevé 2 bulletins portants des votes différents''
Utiliser la première question pour trouver le naturel n_0 pour lequel la probabilité Pn_0 est maximum. Calculer Pn_0.

12 Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules.
a) Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : ''Obtenir au moins une boule blanche'' B''obtenir au moins deux boules noires'' ; C ''obtenir au moins une boule blanche et une boule noire''.
b) Calculer $P(A\backslash B)$; $P(A\backslash C)$; $P(B\backslash A)$; $P(B\backslash C)$; $P(C\backslash A)$; $P(C\backslash B)$;

13 On lance deux fois un dé et à chaque issue on associe le couple (a ; b) où a est la face apparue au premier jet et b celle apparue au second.
On peut définir plusieurs variables aléatoires.
Pour chacune d'elle, déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique :
- X : '' nombre apparu au premier jet ''
- Y : '' nombre apparu au second jet ''
- Z = X + Y
- U = XY

14 Une urne contient quatre boules vertes, deux blanches et une rouge, indiscernable au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules.
Les tirages sont équiprobables.
Chaque boule verte tirée vaut 1F, chaque blanche 2F, la rouge 5F.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de trois boules, le gain en francs.
Déterminer la loi de probabilité de X.
2. a) Calculer l'espérance mathématique E(X).
b) quelle valeur positive ou négative aurait-il fallu attribuer à chaque boule blanche pour que E(X) soit nulle, les boules vertes et la boule rouge conservent leur valeur initial.

15 Une boîte contient neuf carrés numérotés de 1 à 9, une deuxième boîte contient quatre disques numérotés de 1 à 4. On tire indépendamment un objet de chacune des deux boîtes. Les objets d'une même boîte sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la valeur absolue de la différence des nombres indiqués sur les objets tirés. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

16 On peint les six faces d'un cube de bois d'arête 3 cm. On le débite, par des traits de scie parallèle aux plans de faces, en 27 petits cubes d'arêtes 1 cm.
On place ces 2 7 petits cubes dans un sac.
1. On tire, au hasard, et simultanément, deux cubes du sac.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ(X) de X.
2. On renouvelle trois fois le même tirage de deux petits cubes en remettant chaque fois les cubes tirés dans le sac.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirage où les deux cubes tirés ont, en tout, deux faces peintes.
Donner la loi de probabilité de Y.

17 1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Z	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	2i	-3
$\lvert Z \rvert$						
argZ						

Z	1+ i	2	1- i	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	-1 + i
$\lvert Z \rvert$						
argZ						

Une boîte contient 12 cartons indiscernables au toucher, portant les 12 nombres complexes du tableau précédent (chaque carton porte un seul nombre complexe) .

2. On tire au hasard un carton de la boîte (on suppose l'équiprobabilité des tirages).
a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel ?
b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est $\sqrt{2}$?
c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente, si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module 3, le joueur gagne 10.000 UM et le jeu s'arrête, sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage ; si ce carton porte un nombre complexe de module 3 le joueur gagne 8 000 UM, s'il est de module 2, il gagne 5 000 UM, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
a) Déterminer la loi de probabilité de X,
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

18 Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont trois sont rouge, deux sont vertes et une seule est jaune. On tire simultanément et au hasard, trois boules de cette urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de couleurs de boules tirées.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte :

N°	Question	Réponse A	Réponse A	Réponse A
1	Le nombre de tirage possible est	C_6^3	A_6^3	6^3
2	La probabilité que le tirage soit unicolore est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
3	La probabilité que le tirage soit tricolore est	0,3	$\frac{11}{40}$	$\frac{7}{6}$
4	La probabilité que le tirage soit bicolore est :	$\frac{29}{40}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{13}{20}$
5	L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :	$\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{20}$	4

Recopie sur ta feuille le tableau en le complétant en choisissant la bonne réponse, aucune justification n'est demandée.

19 Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules vertes et 5 boules rouges. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. a) quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
   b) quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?
   c) quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

2.) en déduire la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

3.) Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de couleurs blanches, alors on gagne 25 points.
- Si les deux boules sont de couleurs vertes, alors on gagne 100 points.
- Si les deux boules sont de couleurs rouges, alors on gagne 12 points.
- Si les deux boules sont de couleurs différentes, alors on gagne p points

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain obtenu.

a) Déterminer la loi de probabilité de X,
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
c) Déterminer la valeur de p pour laquelle E(X) = 10.

20 Une urne contient six billes numérotées de 1 à 6. On tire simultanément deux billes qui portent les numéros n et p. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie ainsi,

- Si n et p sont pairs, $X = \frac{n+p}{2}$,
- Si n et p sont impairs, X = 0
- Si n et p sont de parités différentes, $X = |n - p|$.

1.) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2.) Etablir la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique E(X) et son écart-type $\sigma(X)$.

21 Une cage contient sept pigeons dont cinq pigeonnes et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons on dispose de deux couples de plumage gris et de trois pigeonnes de plumage blanc. On tire au hasard et simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ''les deux oiseaux tirés sont du même sexe''
B : ''les deux oiseaux tirés sont de même couleur''
C ''les deux oiseaux tirés forment le même couple''

3. On considère la variable aléatoire réelle X qui à chaque tirage de deux oiseaux associe le nombre de pigeonnes contenues dans ce tirage.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de X et sa loi de probabilité
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

22 Un sac $\mathcal{M}$ contient trois boules marquées 1 ; 2 et 4 ; un autre sac $\mathcal{A}$ contient aussi trois boules marquées 0 ; 3 et 4. Une épreuve consiste à prélever une boule de $\mathcal{M}$ (toute les boules de $\mathcal{M}$ ont la même probabilité d'être prélevées) dont le numéro sera noté m et une boule de $\mathcal{A}$ (toutes les boules de $\mathcal{A}$ ont la même probabilité d'être prélevées) dont le numéro sera noté a.
Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans leurs sacs respectifs.
Au résultat d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z fait correspondre le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \alpha Z$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2}m\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}a\right)\right].$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Définir, géométriquement, les applications associées aux résultats possibles d'une épreuve.
2. Soit le point A d'affixe 1 + i ; on appelle A' l'image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve. Calculer les probabilités respectives p_1 et p_2 des événements : E_1 '' O ; A ; A' sont alignés'' ; E_2 '' l'affixe de A' est imaginaire pur''.
3. On considère la variable aléatoire X qui à chaque résultat d'une épreuve fait correspondre la distance de O à A'.
   a) Donner les valeurs prises par X et déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.