République Islamique de Mauritanie
Honneur - Fraternité - Justice
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Projet d'Autonomisation des Femmes et Dividende Démographique au Sahel(SWEDD)

الجمهورية الإسلامية الموريتانية
شرف - إخاء - عدل
وزارة التهذيب الوطني
إدارة التعليم الثانوي
مشروع تمكين المرأة والعائد الديموغرافي
في الساحل (م.ت.م.ع.د.س)

Enneviss en Mathématiques 7ème D

Réalisé par:

- Mouhamedhen Ahmed Vall, Professeur de Mathématiques
- Ould El Moctar Eljed, Professeur de Mathématiques

Sous la supervision de:

- Yehefdhou OULD SIDI AHMED, Inspecteur de Mathématiques
- Sidi Mohamed OULD MOHAMED AHMED, Inspecteur de Mathématiques

Table des matières

Table de matières ………………………………………………………………..…...3
Avant – propos ………………………………………………………………………. 5
Remerciments ……………………………………………………………….……7
Chapitre 1 : Nombres Complexes…………………………………………..…………… 9
Résumé : ………………………………………………………..……….……….. 9 - 16
Exercices :……………………………………………………………………….… 17 -22
Solutions : ……………………………………………………………………….…… 23- 40
Chapitre 2 : Probabilités et dénombrement…………………………………….….... 41
Résumé :……………………………………………………………………..…. 41 - 44
Exercices : ……………………………………………………………………..…..…. 45- 46
Solutions : ……………………………………………………………………………… 47- 52
Chapitre 3: Généralités sur les fonctions………………………………….............….. 53
Résumé ………………………………………………………………………...… 53 - 56
Chapitre 4: Fonctions Logarithmes et Exponentielles……………………...………….57
Fonction logarithme Ln :…………………………………………………………….….57 - 59
Primitives :………………………………………………..………………….………60
Chapitre 5: Intégrales……………………………………..……………………..……61- 62
Exercices sur les fonctions :……………………………..…..………………………..…63 - 70
Exercices sur les intégrales :………………………………………………………..…. 71 - 74
Solutions des exercices sur les fonctions :…………………………………….……….....75 - 102
Solutions des exercices sur l’Intégrale :……………………………………..……..….103 - 110
Chapitre 6: les suites numériques ………………………………………….………….... 111
Résumé…………………………………………………..…………………….………111
Suite Arithmétique………………………………………………………………...….…..112
Suite géométrique : ……………………………………………………………………….112 114
Exercices : ……………………………...……………………………………….…115 - 120
Solutions :……………………………………………………………………….…..….121-144
Problèmes de synthèse :…………………………………………………………..……145-150
Solutions des problèmes de synthèse…………………………………………………… 151- 165

Avant - Propos

Le Ministère de l'Education Nationale en collaboration avec le projet SWEDD a le plaisir de mettre à la disposition des filles des classes de 7^{éme}D des Wilayas ciblées par le projet SWEDD un recueil d'Exercices avec un rappel de cours de Mathématiques. Ce recueil est conforme aux nouveaux programmes de la réforme de 1999 ;

La méthodologie adoptée pour l'élaboration du recueil est la suivante :

- Rappel de cours
- Exercices corrigés
- Sujets de synthèse

Nous espérons que ce recueil permettra aux filles en classe d'examen dans les wilayas ciblées de bien préparer le Baccalauréat.

Nous remercions le projet SWEDD et en particulier le coordinateur du projet **M^{r} Med Melainine O Eyih** et l'ensemble du personnel de l'UGP pur leur entière collaboration dans la réalisation de ce recueil.

Nos remerciements vont également à **Madame Ba Fatimata**, membre du comité de pilotage et de **M^{r} Mohamed O Bréye** point focal du projet de leur étroite collaboration au cours de la réalisation du présent recueil.

Nous remercions également tous les inspecteurs et auteurs qui ont participé à son élaboration.

Issa OULD BEIBATT

Remerciements

Afin d’améliorer les conditions socioéconomiques de la femme, la Mauritanie, à l’instar des cinq autres pays du Sahel (Burkina-Faso, Côte d'Ivoire, Mali, Niger et Tchad), a entamé en 2013, en collaboration avec la Banque Mondiale et l’UNFPA, le processus de mise en place du projet « ***Autonomisation des Femmes et du Dividende Démographique*** » (SWEDD) sur la base d’indicateurs démographique, d’éducation et de santé. La Mauritanie a décidé d’orienter l’intervention de ce projet sur 4 wilayas (le Hodh El Chargui, le Hodh El Gharbi, l’Assaba et le Guidimagha).

Dans ce cadre et en collaboration avec le Ministère de l’Education Nationale, la composante du projet SWEDD dénommée : ***« Amélioration de l’Accès et de la Rétention des Filles au Secondaire*** » a prévu une activité dénommée « **Supports Pédagogiques** » relative à l’élaboration, la reprographie et la distribution de 7 brochures dans les disciplines suivantes : Mathématiques, physique-chimie , Sciences Naturelles , arabe et français (**4** pour la 4ème AS et **3** pour la 7ème D). La présente brochure concerne la discipline de mathématiques en 7ème D. Elle comprend un rappel de cours, des exercices d’application, de perfectionnement et des sujets d’entraînement au BAC suivis de leurs corrigés.

Au terme de ce travail, et bien qu’il soit difficile d’apprécier, à leur juste valeur, les contributions que les uns et les autres ont apportées à la production de l’ouvrage, nous tenons à remercier la Direction de l’Enseignement Secondaire, en particulier Messieurs : **Issa OULD BEIBATT** et **Med OULD LEVDAL**. Nos remerciements vont également à Messieurs : **Sidina OULD HENOUNE (**IGEN), **Cheikh Ahmedou** (D.I.P.N.) et **Tandia Dahaba (**IGES) pour leurs conseils et leur participation active. Nos remerciements vont aussi aux inspecteurs qui ont veillé au suivi et à la validation de ce document.

Enfin, que les producteurs trouvent ici l’expression de notre profonde gratitude pour les efforts louables qu’ils ont déployés pour l’élaboration de ce fascicule.

Qu’il nous soit permis ici d’adresser nos vifs remerciements à la Banque Mondiale, l’UNFPA et les autres partenaires du SWEDD pour leurs appréciables appuis Techniques et Financiers.

Med OULD BREYE

Point focal du SWEDD-MEN

Chapitre 1:

Nombres Complexes

Résumé :

1. Définition : l'ensemble des nombres complexes est noté C, chaque nombre complexe Z s'écrit sous la forme z=a+ib avec a∈R , b∈R et $i^2=-1$.

L'écriture : $z = a + bi$ est appelée forme algébrique de z

- a: est la partie réelle de z notée : Re(z)=a
- b: est la partie imaginaire de z notée : Im(z)=b

si z=a+ib et z'=a'+ib' alors z=z' ⇔ a=a' et b=b'.

z=0 ⇔ a=0 et b=0.

z +z'=a+a' + i(b+b')

zz'=aa'-bb'+(ab'+ba')i.

on applique dans C les mêmes règles de calcul comme dans R , avec $i^2 = -1$.

Z est réel⇔ Im(Z)=0

Z est imaginaire pur⇔ Re(Z)=0

1. Conjugué d'un nombre complexe

Définition : le conjugué de z=a+ib est $\overline{z} = a - ib$

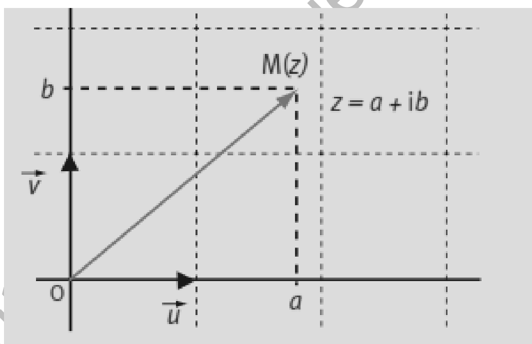
Propriétés :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$
- Re(z)= $\frac{z+\overline{z}}{2}$
- Im(z)= $\frac{z-\overline{z}}{2i}$
- z est réel$\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

2. Affixe d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ à tout point M(a,b) on associe le nombre complexe z=a+ib.



z=a+ib est l'affixe de M(a ,b)
M(a,b) est le point image de z=a+ib

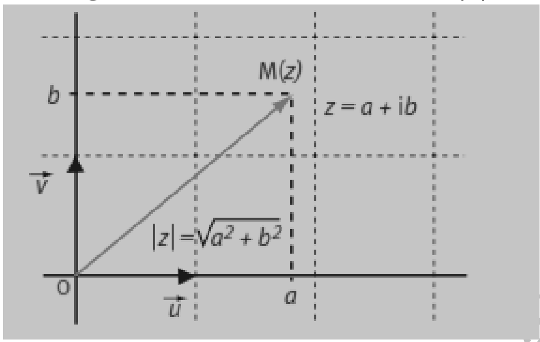
De même à tout vecteur $\vec{W}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on associe z=a+ib , z est l'affixe de $\vec{W}$ et $\vec{W}$ est l'image de z.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- L'affixe du milieu I de [AB]est $z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$
- L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. Module d'un nombre complexe

Définition :

soit z=a+ib et M(a,b) le point image de z. Le module de z est :$|z|$=OM=$\sqrt{a^2+b^2}$



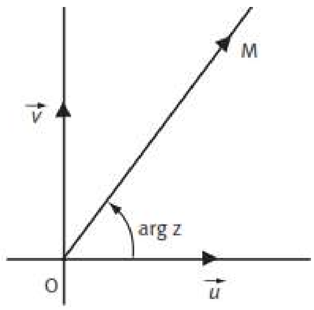
Si A et B sont deux points alors la distance AB=$|Z_B-Z_A|$

Propriétés :

- $|Z|=0 \Leftrightarrow Z=0$
- $|ZxZ'|=|Z||Z'|$
- $|Z+Z'| \leq |Z|+|Z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|\overline{Z}|=|-Z|=|Z|$
- $|Z^n|=|Z|^n$
- $\left|\frac{1}{Z}\right|=\frac{1}{|Z|}, Z\neq 0$
- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ avec $Z_2\neq 0$
- $Z.\overline{Z}=|Z|^2$ ou $|Z|=\sqrt{Z.\overline{Z}}$

4. Argument d'un nombre complexe non nul

Soit Z un nombre complexe $Z\neq 0$ et M le point d'affixe Z dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u},\vec{v}$) , un argument de Z est noté arg(Z) et arg(Z) $=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$



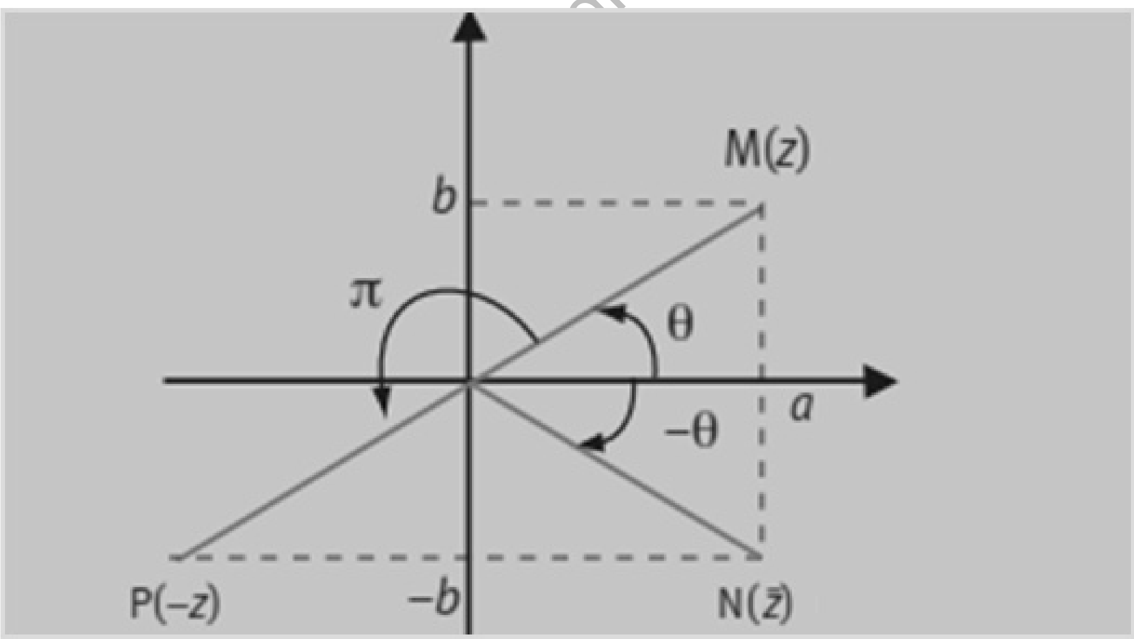
$\theta=\arg(Z)[2\pi]$

$\cos\theta=\frac{\text{Re}(Z)}{|Z|}$, $\sin\theta=\frac{\text{Im}(Z)}{|Z|}$

Remarque : 0 n'a pas d'argument.

Propriétés :

- $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ avec $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$ $z \neq 0$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$ $z \neq 0$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ ou $\arg(z) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Angles remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Interprétation géométrique :

- $\arg(z)=(\vec{U},\overrightarrow{OM})\left[2\pi\right]$
- $\arg(z_B-z_A)=(\vec{U},\overrightarrow{AB})\left[2\pi\right]$
- $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\left[2\pi\right]$

5. Forme Trigonométrique

Soit z un nombre complexe $z\neq 0$ et θ un argument de z, l'écriture $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z.

6. Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z. On note $e^{i\theta}$ le nombre cosθ + isinθ.
L'écriture z=|z| $e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Conséquences :

- $e^{i0}=1, e^{i\pi}=-1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}}=i, e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

- $|e^{i\theta}| = 1, \arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

6. Equation du second degré

Soit (E) l'équation $az^2+bz+c=0$ avec a,b et c des réels ($a \neq 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$

1er cas si $\Delta > 0$ ils existent deux solutions dans $\Re$:

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2eme cas si $\Delta = 0$, il existe une solution double :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3éme cas si $\Delta < 0$, ils existent deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : pour les équations du 3éme degré, on factorise par $z - z_0$ où z_0 est une solution particulière pour trouver les autres solutions.

7. Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

8. Formule de Moivre

$\forall n \in N, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Remarque : on utilise les formules d'Euler pour transformer $\sin^n$ et $\cos^n$ en une forme linéaire ; et la formule de Moivre pour le passage de la forme linéaire à la forme polynômiale.

9. Ensembles de points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$) , soient M le Point d'affixe z, A d'affixe z_A et B d'affixe z_B

Si on a	Alors l'ensemble des points M est
$\lvert z - z_A \rvert = R, R > 0$	Le cercle de centre A et de rayon R
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	La médiatrice du segment[AB]
$\frac{z - z_A}{z - z_B} \in \Re$	La droite (AB) privée de B
$\frac{z - z_A}{z - z_B} \in i\Re$	Le cercle de diamètre [AB] privée de B
$\arg(\frac{z - z_A}{z - z_B}) = 0[\pi]$	La droite (AB)privée de A et B
$\arg(\frac{z - z_A}{z - z_B}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$	Le cercle du diamètre [AB] privée de A et B

Remarques :

- ABCD est un parallélogramme ssi : $z_B - z_A = z_C - z_D$ ou $z_A + z_C = z_B + z_D$
- Les trois points A, B et C sont alignés ssi $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \Re^*$ ou $\arg(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}) = 0[\pi]$

Si on a	Alors
$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = ki \ , k \in \mathbb{R}^*$	ABC est rectangle en A
$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \pm i$	ABC est isocèle et rectangle en A
$\mid \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} \mid = 1$	ABC est isocèle en B
$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	ABC est équilatéral

Exercices

Exercice 1 :

Dans ce tableau indiquer la bonne réponse

N^0	Questions	A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\frac{-1+7i}{3+4i}$ *est*	$\frac{-1}{7}+i$	$1+i$	$-1+i$	$1-i$
2	Le module de $\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{2+2i}$ *est*	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
3	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z alors un argument de $\frac{i}{\overline{z}^{2}}$ est	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
4	Si $z=-\sqrt{3}+2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$(2-\sqrt{3})e^{i\frac{7\pi}{6}}$
5	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $\lvert z\rvert=2$ et $z'=z-\frac{1}{z}$ alors $\lvert z'\rvert=$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
6	$\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{2015}=$	1	i	-1	2015

Exercice 2 :

On pose $z_1=-1-i;\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ z=\frac{z_1}{z_2}$

a) Calculer le module et un argument de z_1 et z_2

b) Déduire $\lvert z\rvert$ et arg z

c) Ecrire z sous forme algébrique

d) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 3 :

Soit $z = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$

a) Calculer z^2
b) Déterminer le module et un argument de z^2
c) En déduire le module et un argument de z
d) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 4 :

Soit $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

a) Calculer $p(-1)$
b) Trouver les réels a et b tels que $p(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$
c) Résoudre l'équation $p(z)$ =0
d) Placer les points : $A(-1); B(2+i\sqrt{3}); C(2-i\sqrt{3})$ et $G(3)$
e) Calculer les distances AB , AC et BC quelle est la nature du triangle ABC ?
f) Calculer un argument du nombre $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ en déduire la nature du triangle GAC

Exercice 5 :

On considère le polynôme $P(Z)$ défini pour tout nombre complexe z

par: $p(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

1 .a) Calculer $P(-2)$

b) Déterminer les réels a et b tels : $p(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre donc $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

d) Donner une forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation $P(Z) = 0$

2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé : $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les

Points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4, z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$

Et pour tout nombre complexe z tels que $z \neq 2+2i$ on pose $f(z)=\frac{z-2+2i}{z-2-2i}$

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$

b) Calculer chacun des deux nombres complexes : $f(z_A)$ et $\omega = f(6+2i)$

Et donner sa forme algébrique et trigonométrique

c) En déduire la nature du triangle ABC

d) Déterminer z_D affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme

e) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixes z tels Que $|f(z)|=1$

f) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixes z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

f) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3 des points M d'affixes z tels que $|f(z)-1|=2$

3. On pose $\forall n \geq 1, z_n = w^{2n-2}$, soit M_n le point d'affixe z_n

a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour que $M_n \in (ox)$

b) Vérifier que $M_{2013} \in (ox)$

Exercice 6 :

Soient $Z_1=\frac{3-i}{2+i}, Z_2=\frac{3-i}{1-i}$ et $z_3=(1+i)^2$

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique et z_1 sous forme trigonométrique

2. a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3

b) Déterminer la nature du triangle ABC

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme

3. Soit f l'application définie pour tout $z \neq 2i$ par $f(z)=\frac{(1+i)z-2}{z-2i}$

Montrer que pour tout $z \neq 2i$ on a : $f(z)=(1+i)\frac{z-1+i}{z-2i}$

4. Déterminer et représenter dans le même repère l'ensemble des points M du plan d'affixes z dans chacun des cas suivants :
   - Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$
   - Γ_2 tel que $\arg f(z) = \frac{\pi}{4}[\pi]$
   - Γ_3 tel que $\arg(f(z)) = -\frac{\pi}{4}[\pi]$

Exercice 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3-i, z_B = 4+2i$ et $z_c = 1+3i$

a) Placer les points A, B et C dans le repère

b) Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$?

2. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+3i$ on pose $f(z) = \frac{z-3+i}{z-1-3i}$.

   Déterminer et représenter dans le même repère l'ensemble des points M du plan d'affixes z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$

b) Γ_2 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur

d) Γ_4 tel que $f(z)$ soit réel

3. Soit D le point d'affixe $z_D = 2i$ et M_n le point d'affixe $z_n = (z_D)^n$ où n est un entier naturel
   a) Vérifier que D appartient a Γ_3
   b) Déterminer les valeurs de n pour que M_n soit situé sur l'axe des abscisses ; que peut-on dire du point M_{2016} ?

Exercice 8 :

Soit f l'application qui à tout nombre complexe z associe : $z' = f(z) = \frac{1+iz}{z+i}$

1. a. Calculer et donner sous forme trigonométrique le complexe $z_1 = f(0)$

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = f(z) = 2+i$ soit z_2 sa solution donner z_2 sous forme trigonométrique

2. Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M, M', A et B d'affixes respectives z, z', i *et* $-i$.

   a) Vérifier que $z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$ en déduire que $OM' = \frac{AM}{BM}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

   b) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que $|z'| = 1$

   c) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M tels que z' soit un réel

   d) Déterminer l'ensemble (Γ_3) des points M tels que z' soit un imaginaire pur

   e) Déterminer l'ensemble (Γ_4) des points M tels que $|z+i| = \sqrt{2}$

3. a) En déduire que le point 0 est commun à (Γ_1) et (Γ_3)

   b) Montrer que si M décrit (Γ_1) alors M' décrit (Γ_2)

   c) Montrer que $|z'-i| \times |z+i| = 2$. En déduire que si M décrit (Γ_4) alors M' décrit un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 9 :

On pose $f(z) = \frac{z+1-i}{z-3+2i}$

1. Calculer $f(-1+2i)$ puis le mettre sous forme algébrique et trigonométrique
2. Résoudre l'équation $f(z) = 4+i$ et mettre sa solution sous forme algébrique
3. Soient $A et B$ les points d'affixes respectives $z_1 = -1+i$ et $z_2 = 3-2i$ déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixes z dans les cas suivants

a) $|f(z)| = 1$

b) $f(z)$ est imaginaire pur

c) $|f(z) - 1| = 5$

Exercice 10

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$(E_1) : z^2 + 2z + 2 = 0$

$(E_2) : z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

Soient z_1 et z_2 les solutions de (E_1) telles que $\operatorname{Im}(z_2) \prec \operatorname{Im}(z_1)$ et soient z_3 et z_4 les solutions de (E_2) telles que $\operatorname{Im}(z_4) \prec \operatorname{Im}(z_3)$

2. Mettez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

3. On pose $U = (-1+i)(\sqrt{3}+3i)$ et $V = \dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+3i}$

a. Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de chacun des nombres U et V

b. Déduire les valeurs de : $\cos\frac{5\pi}{12} ; \sin\frac{5\pi}{12}$;

Solutions

Exercice 1 :

QCM :

Numéro de la question	La bonne réponse
1	B
2	C
3	D
4	A
5	C
6	C

Exercice 2:

1) On pose $z_1 = -1 - i; z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; z = \frac{z_1}{z_2}$

a) Le module et un argument de z_1, z_2

- $z_1 = -1 - i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4};$

- $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} \\ \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

b) Le module et un argument de z : $z = \frac{z_1}{z_2}$

$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{1}$; $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$

c) L'écriture algébrique de z : $z = \frac{z_1}{z_2}$; $z = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

d) Déduction de : $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$

On a $\arg(z) = \frac{11\pi}{12}$, donc $\cos(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

Exercice 3 :

Soit $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$

1) $z^2 = ((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1))^2$

$z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$

2) Le module et argument de z^2

$|z^2| = |4\sqrt{3}+4i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = \sqrt{64} = 8$

$\arg(z^2) = \theta[2\pi]$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

donc : $|z^2| = 8$; $\arg(z^2) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

2) Déduisons |z|

on a : $|z^2| = 8 \Rightarrow |z|^2 = 8 \Rightarrow |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos(\frac{\pi}{12})$ $\arg(z^2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12} + k\pi$

Déduisons $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

on a : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\text{Re(z)}}{|z|} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\text{Im(z)}}{|z|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4 :

$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1) P(-1)=0

2) Déterminer a et b tel que $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

Le tableau d'Horner donne :

	1	-3	3	7
-1		-1	4	-7
	1	-4	7	0

Donc a = -4 et b = 7

$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

3) Les solutions de $P(z)=0$

$\Delta = 16-28$

$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

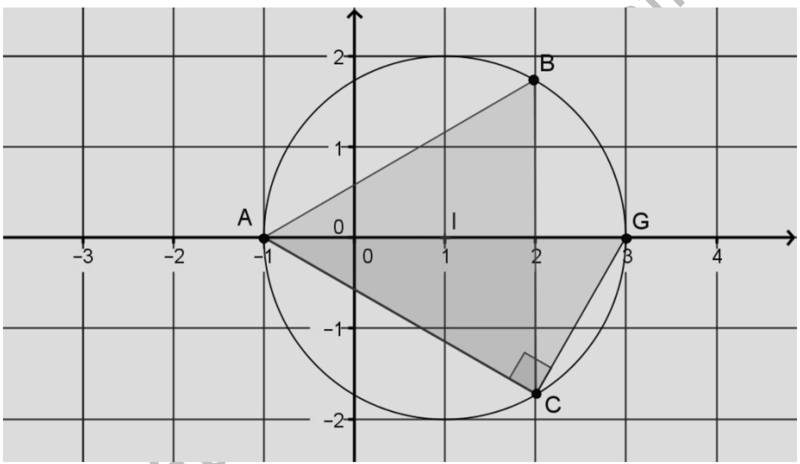
$$z_1 = \frac{4+2\sqrt{3}i}{2} = 2+i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{4-2\sqrt{3}i}{2} = 2-i\sqrt{3}$$

$S = \left\{-1, 2-i\sqrt{3}, 2+i\sqrt{3}\right\}$

4) $A(-1), B(2+i\sqrt{3}), C(2-i\sqrt{3}), G(3)$

Plaçons les points A,B,C,G



5) Calculons les distances

$AB = |z_B - z_A| = |2+i\sqrt{3}-(-1)| = |3+i\sqrt{3}|$

$AB = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |2-i\sqrt{3}-(-1)| = |3-i\sqrt{3}|$

$AC = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |2-i\sqrt{3}-(2+i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

Comme AB = AC = BC alors le triangle ABC est équilatéral

6) argument de $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = i\sqrt{3}$

$\arg(\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, d'où GAC est rectangle en C.

Exercice 5 :

$P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

1) a) $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$
$P(-2) = -8 - 8 + 16 = 0$

b) Déterminons a et b tel que

$P(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$

Le tableau d'Horner donne :

	1	-2	0	16
-2		-2	8	-16
	1	-4	8	0

$P(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 8)$

c) Solutions de $P(z) = (z+2)(z^2-4z+8)=0$

$P(z) = (z+2)(z^2-4z+8) = 0$

$z = -2$

$z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = -16 = (4i)^2$

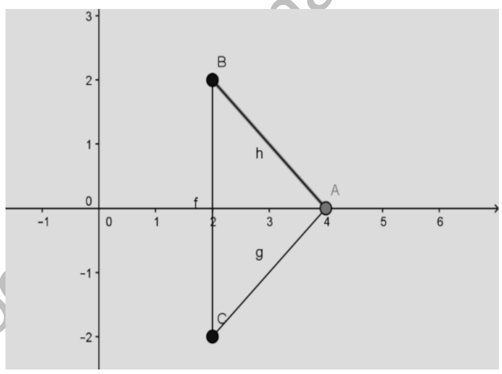
$z_1 = 2+2i, z_2 = 2-2i$

$S = \{-2, 2+2i, 2+2i\}$

2) $z_A = 4, z_B = 2+2i, z_C = 2-2i$

on pose : $f(z) = \dfrac{z-2+2i}{z-2}$

a) Emplacement des points A ,B et C



b) Calculons $f(z_A)$ et $w = f(6+2i)$

$f(z_A) = \dfrac{4-2+2i}{4-2-2i} = \dfrac{2+2i}{2-2i}$

$f(z_A) = i$

Forme algébrique $f(z_A) = i$

$f(z_A) = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$w = f(6+2i) = \dfrac{6+2i-2+2i}{6+2i-2+2i} = \dfrac{4+4i}{4} = 1+i$

Forme algébrique $w = 1+i$

Forme trigonométrique $w = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

d) La nature du triangle ABC

$f(z_A) = \dfrac{z_A-(2-2i)}{z_A-(2+2i)}$

Comme $f(z_A) = i$ alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A

e) Déterminons z_D pour que ABCD soit un parallélogramme

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = 4-4i$

e) L'ensemble Γ_1, tel que $|f(z)| = 1 \; |\dfrac{z-z_C}{z-z_B}| = 1 \Leftrightarrow |z-z_C| = |z-z_B| \Leftrightarrow MB = MC$

Donc Γ_1=med[BC]

f) Déterminons Γ_2 tel que $f(z) \in iR \begin{cases} f(z)=0 \\ ou \\ \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$f(z)=0 \Rightarrow z-z_C=0 \Rightarrow z=z_C \Rightarrow M=C$

Ou

$\arg(\frac{z-z_C}{z-z_B}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ donc MBC est rectangle en M

D'où l'ensemble Γ_2 est le cercle de diamètre [BC] privé de B

c) L'ensemble Γ_3 tel que $|f(z)-1|=2$

$|f(z)-1|=2 \Rightarrow |\frac{z-z_C}{z-z_B}-1|=2$

$|\frac{z_B-z_C}{z-z_B}|=2 \Rightarrow \frac{4}{BM}=2 \Rightarrow BM=2$

D'où Γ_3 est le cercle de centre B et de rayon 2

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = w^{2n-2}$ et M_n le point d'affixe z_n

a) les valeurs de n pour que $M_n \in (ox)$

$M_n \in (ox) \Rightarrow \arg(z_n) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \arg(w^{2n-2}) = k\pi$

$\Rightarrow (2n-2)\arg(w) = k\pi$

$\Rightarrow (2n-2)\frac{\pi}{4} = k\pi$

$\frac{n-1}{2} = k \Rightarrow n = 2k+1$

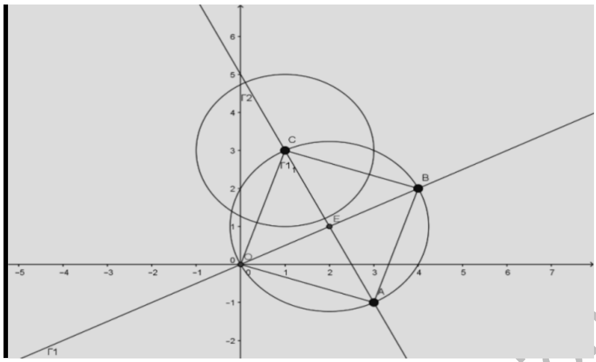
b) Montrons que $M_{2013} \in (ox)$

on pose $n = 2013 \Rightarrow 2013 = 2\times1006+1 = 2k+1, k=1006$

d'après 3)a) $M_{2013} \in (ox)$

Exercice 7 :

1) a) Plaçons les points A, B et C $z_A = 3 - i, z_B = 4 + 2i$ et $z_c = 1 + 3i$



b.) La nature du quadrilatère OABC

On a : $\begin{array}{l} z_B - z_A = 1 + 3i \\ z_C - z_O = 1 + 3i \end{array}$

Comme $z_B - z_A = z_C - z_O$

Donc OABC est un parallélogramme

On a : $\dfrac{z_C - z_O}{z_C - z_A} = i$, d'où OAC est un triangle rectangle et isocèle en C

Comme OABC est un parallélogramme et OAC est un triangle rectangle et isocèle en C alors :

OABC est un carré

2) $f(z) = \dfrac{z - 3 + i}{z - 1 - 3i}$

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$

$$|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - 3 + i}{z - 1 - 3i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - z_A}{z - z_C}\right| = 1$$

$$\Rightarrow |z - z_A| = |z - z_C| \Rightarrow MA = MC$$

$$\Gamma_1 = med[AC] = (OB)$$

b) Γ_2 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{5}$

$$|f(z)-1| = \sqrt{5} \Rightarrow \left|\frac{z-3+i}{z-1-3i}-1\right| = \sqrt{5} \Rightarrow \left|\frac{-2+4i}{z-z_C}\right| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |f(z)-1| = \frac{\sqrt{20}}{MC}$$

$$\frac{\sqrt{20}}{MC} = \sqrt{5}$$

$$MC = 2$$

Donc Γ_2 est le cercle de centre C et de rayon 2

c.) Γ_3 est l'ensemble des points M tels que f(z) soit imaginaire pur

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ ou \\ \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$f(z) = 0 \Rightarrow \frac{z-z_A}{z-z_C} = 0 \Rightarrow z = z_A \Rightarrow M = A$$

$$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Γ_3 est le cercle de diamètre [AC] privé de C

d.)

$$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ ou \\ \arg(f(z)) = 0[\pi] \end{cases}$$

$$f(z) = 0 \Rightarrow \frac{z-z_A}{z-z_C} = 0 \Rightarrow z = z_A \Rightarrow M = A$$

$$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = 0[\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = 0[\pi]$$

d'où les points M,A et C sont alignés et donc Γ_4 est la droite (AC) privée de C.

3) Soit D le point d'affixe $z_D = 2i$ et M_n le point d'affixe $z_n = (z_D)^n$

a) Vérifier que $D \in \Gamma_3$

$f(z_D) = f(2i) = -3i$ (Imaginaire pur) donc $D \in \Gamma_3$

b) les valeurs de n pour que $M_n \in (ox)$

$$M_n \in (ox) \Rightarrow \arg(z_n) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \arg(z_D^n) = k\pi \Rightarrow n\arg(z_D) = k\pi$$
$$n\frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow n = 2k$$

Pour le point M_{2016} on a $n = 2k, k = 1008$ donc $M_{2016} \in (ox)$ d'après la question précédente

Exercice 8 :

$$z' = f(z) = \frac{1+iz}{z+i}$$
$$z_1 = f(0) = \frac{1+i(0)}{0+i} = \frac{1}{i} = -i$$
$$z_1 = -i$$
$$|z_1| = 1$$
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{1} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{1} \end{cases}, \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Forme trigonométrique de $z_1 = 1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

b) Résolution de : $\frac{1+iz}{z+i} = 2+i$

$$\frac{1+iz}{z+i} = 2+i \Rightarrow z = 1-i$$
$$z_2 = 1-i$$

Forme trigonométrique

$$|z_2| = |1-i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

2) $z_A = i, z_B = -i$

Vérifions que $f(z) = i\frac{z-i}{z+i}$

$$f(z) = \frac{1+iz}{z+i} = \frac{i(\frac{1}{i}+z)}{z+i} = \frac{i(-i+z)}{z+i}$$

D'où : $f(z) = i\frac{z-i}{z+i}$

On a :

$$f(z) = i\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow |f(z)| = |i\frac{z-i}{z+i}| = |i||\frac{z-i}{z+i}| = |\frac{z-i}{z+i}| = |\frac{z-z_A}{z-z_B}|$$

$$\Rightarrow OM' = \frac{MA}{MB}$$

D'autre part

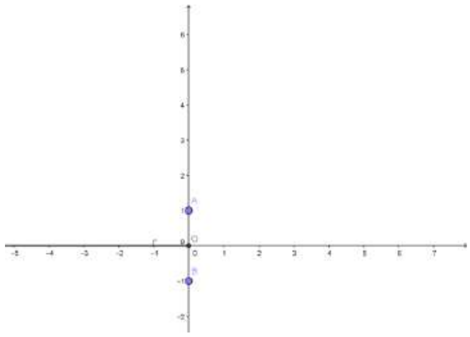
$$f(z) = i\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow \arg(f(z)) = \arg(i\frac{z-i}{z+i})$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[\pi]$$

b) l'ensemble Γ_1 tel que $|z'| = 1$

$$|z'| = 1 \Rightarrow OM' = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow MA = MB$$

D'où Γ_1 = méd [AB]=(OX)



c) l'ensemble Γ_2 tel que f(z) soit réel

$$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ ou \\ \arg(f(z)) = 0[\pi] \end{cases}$$

$$f(z)=0 \Rightarrow i(\frac{z-z_A}{z-z_B})=0 \Rightarrow z-z_A \Rightarrow z=z_A \Rightarrow M=A$$

$$\arg(f(z))=0[\pi] \Rightarrow \arg(i(\frac{z-z_A}{z-z_B}))=0[\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=0[\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}$$

Donc l'ensemble Γ_2 est le cercle de diamètre [AB] , privé de B

d) l'ensemble Γ_3 tel que f(z) soit imaginaire pur

$$f(z)\in i\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ ou \\ \arg(f(z))=\frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$f(z)=0 \Rightarrow i(\frac{z-z_A}{z-z_B})=0 \Rightarrow z-z_A \Rightarrow z=z_A \Rightarrow M=A$$

$$\arg(f(z))=\frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow \arg(i(\frac{z-z_A}{z-z_B}))=\frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=0$$

L'ensemble Γ_3 est la droite (AB) privée de B

e)l'ensemble Γ_4 des points M tel que $|z+i|=\sqrt{2}$

$$|z+i|=\sqrt{2} \Rightarrow |z-z_B|=\sqrt{2} \Rightarrow BM=\sqrt{2}$$

L'ensemble Γ_4 est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

3)a) Montrons que O est commun à Γ_1 et Γ_3

On a : f(0)=-i

Comme $|f(0)|=1 \Rightarrow O\in\Gamma_1$

Et comme f(O) est imaginaire pure alors $O\in\Gamma_3$

b) montrons que si $M \in \Gamma_1$ alors M' décrit un cercle que l'on déterminera

$M \in \Gamma_1 \Rightarrow M \in med[AB] \Rightarrow MA = MB$
$\Rightarrow OM' = 1$
donc
$M' \in \zeta(0,1) = \Gamma_2$

c) montrons que $|z'-i||z+i| = 2$

$$|z'-i| = \left|\frac{i(z-i)}{z+i} - i\right| = \frac{2}{|z+i|} \Rightarrow |z'-i||z+i| = 2, (*)$$

Si M décrit Γ_4 alors $|z+i| = \sqrt{2}$ en remplaçant dans (*)

$|z'-i|\sqrt{2} = 2 \Rightarrow |z'-i| = \sqrt{2} \Rightarrow AM' = \sqrt{2}$

Donc M' décrit le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

Exercice 9 :

$$f(z) = \frac{z+1-i}{z-3+2i}$$

$$f(-1+2i) = \frac{-1+2i+1-i}{-1+2i-3+2i} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$$

Forme algébrique : $f(-1+2i) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$

$$|f(-1+2i)| = \left|\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i\right| = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Soit θ un argument de $f(-1+2i)$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{8}} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{-1}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{8}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$$

$$f(-1+2i) = \frac{\sqrt{2}}{8}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

2) les solutions de $f(z) = 4+i$

$$f(z) = 4+i \Rightarrow \frac{z+1-i}{z-3+2i} = 4+i$$

$$\Rightarrow z = \frac{9}{10} - \frac{33}{10}i$$

3) $z_A = -1+i, z_B = 3-2i$

Γ_1 tel que

$$|f(z)|=1 \Rightarrow |\frac{z-z_A}{z-z_B}|=1$$

$$\Rightarrow MA = MB$$

D'où l'ensemble $\Gamma_1 = med[AB]$

b) Γ_2 tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ ou \\ \arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$f(z) = 0 \Rightarrow (\frac{z - z_A}{z - z_B}) = 0 \Rightarrow z - z_A \Rightarrow z = z_A \Rightarrow M = A$$

$$\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow \arg((\frac{z - z_A}{z - z_B})) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Donc Γ_2 est le cercle de diamètre [AB] privé de B

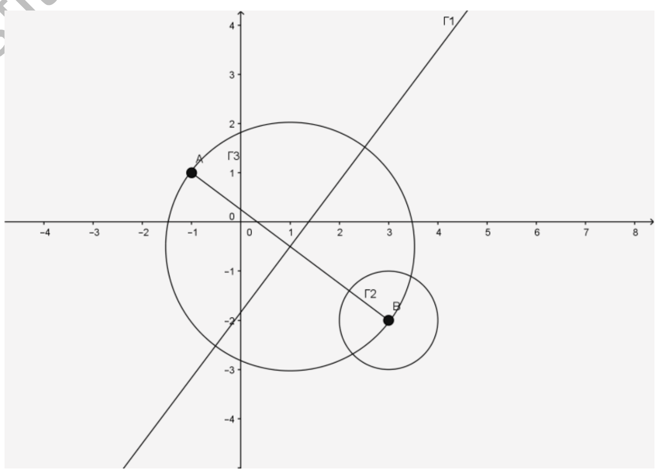
c)

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow | f(z) - 1 | = 5$$

$$\left| \frac{z + 1 - i}{z + 3 - 2i} \right| = 5 \Rightarrow \left| \frac{4 - 3i}{z - z_B} \right| = 5$$

$$\frac{5}{MB} = 5 \Rightarrow MB = 1$$

L'ensemble Γ_3 est le cercle de centre B et de rayon 1



Exercice 10 :

$$(E1): z^2 + 2z + 2 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$
$$z_1 = -1 + i$$
$$z_2 = -1 - i$$
$$(E2): z^2 - 2\sqrt{3}z + 12 = 0$$
$$\Delta = -36 = (6i)^2$$
$$z_1^' = \sqrt{3} + 3i$$
$$z_2^' = \sqrt{3} - 3i$$

2) z_1, z_2 sous forme trigonométrique

$$z_1 = -1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

D'où : $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$$z_3 = \sqrt{3} + 3i \Rightarrow |z_3| = 2\sqrt{3} \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_3 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

3) on pose

$$u = (-1+i)(\sqrt{3}+3i)$$
$$v = \frac{-1+1}{\sqrt{3}+3i}$$

$$u = (-1+i)(\sqrt{3}+3i) = -\sqrt{3}-3i+i\sqrt{3}-3$$
$$u = -\sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}-3)$$

$$u = z_1 \times z_2$$
$$|u| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{6}$$
$$\arg(u) = \arg(z_1)+\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$$
$$u = 2\sqrt{6}(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$$

$$\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$|v| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$
$$\arg(v) = \arg(z_1)-\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

Forme algébrique de $v = \frac{-1+1}{\sqrt{3}+3i}$

$$v = \frac{3-\sqrt{3}}{12} + \frac{3+\sqrt{3}}{12}i$$

b) les valeurs sont:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\mathrm{Re}(v)}{|v|} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}}$$
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\mathrm{Im}(v)}{|v|} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Chapitre 2:

Probabilités et dénombrement

Résumé :

I. Dénombrement

1) Les arrangements : le nombre des arrangements de p éléments-distincts (sans répétition) est noté A_n^p (p ≤ n) $A_n^p = n(n-1)....(n-p+1)$

Cas particulier

2) Les permutations (n=p)

Le nombre de permutations de n-éléments distincts est $A_n^n = n!$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Convention :

- 0 !=1

1) Les combinaisons

Le nombre des combinaisons de p-éléments parmi n-éléments avec p < n est le nombre de parties de p éléments d'un ensemble qui a n éléments

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad ; \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Propriétés :

- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 1$

- $C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

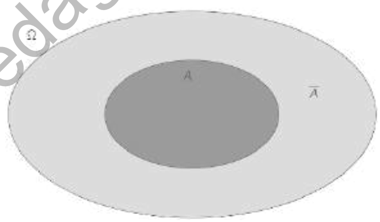
2) Le nombre de tirages possibles de p boules dans une urne qui contient n boules est :

- A_n^p Si le tirage est successif sans remise (p≤n on tient compte de l'ordre)
- n^p Si le tirage est successif avec remise (on tient compte de l'ordre)
- C_n^p Si le tirage est simultané (p≤non ne tient pas compte de l'ordre)

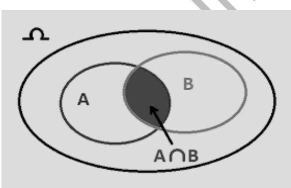
3) Calcul de probabilité

A. Vocabulaire

- Epreuve aléatoire : une expérience dont les résultats dépendent du hasard
- Eventualité : un résultat d'une expérience
- Univers Ω : l'ensemble des éventualités
- Evènement : toute partie de l'univers Ω
- Evénement élémentaire : évènement qui ne comporte qu'un seul élément
- L'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$: $\overline{A}$ est réalisé ssi A ne l'est pas

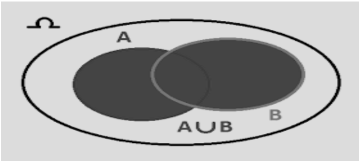


- L'évènement A et B noté $A \cap B$:est réalisé si A et B le sont tous les deux.



- Deux évènements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément dans la même épreuve c.à.d $A \cap B = \varnothing$

- L’évènement A ou B noté $A \bigcup B$; est réalisé ssi au moins l’un des évènements A ou B est réalisé.



- Le cardinal d’un ensemble fini E est le nombre de ses éléments noté card(E)

B. **Définition** : soit Ω l’univers associé à une épreuve. On appelle probabilité sur Ω toute application Ω vers $[0,1]$ vérifiant :

- $P(\Omega)=1$
- $\forall A, B \subset \Omega$ tel que $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriétés :

- $P(\varnothing)=0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

C. de Ω vers [0,1]

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset X$ alors $P(A) < P(X)$
- L’équiprobabilité : on dit qu’il y a équiprobabilité si les évènements élémentaires ont la même chance de se réaliser ; dans ce cas

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Probabilité conditionnelle :

A et B sont deux évènements, si $P(A) \neq 0$ on appelle probabilité de B sachant A, notée : $P_A(B)$ le nombre défini par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- A et B sont deux évènements indépendants si P(A $\cap$ B)=P(A).P(B)

- **Variable aléatoire** :

Soit Ω l'univers d'une épreuve on appelle variable aléatoire X toute application de Ω vers R, soit X(Ω) l'ensemble des valeurs de X,

$X(\Omega)=\{x_1, x_2, ...x_n\}$

La loi de probabilité de X est l'application qui à chaque x_i associe la probabilité que X prenne la valeur x_i notée $P(X=x_i)$

On a $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$

- Espérance mathématique notée : E(X) :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$$

- Variance V(X)

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X=x_i)-(E(X))^2$$

- Ecart-type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Loi binomiale :

considérons une épreuve qui a deux issues l'une est appelée succès notée (S) et l'autre appelée échec notée (E) . on répète n fois l'épreuve dans les mêmes conditions et de façon indépendante ;on pose P(S)=p

alors :

$P(E)=P(\overline{S})=1-p$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre des succès obtenus :

On a : $X(\Omega)=\{0,1,2,....,n\}$

Alors $P(X=K)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, 0\le k\le n$

L'espérance mathématique $E(X)=np$

La variance $V(X)=np(1-p)$

L'écart type $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

On dit que X suit la loi binomiale B(n,p)

Exercices

Exercice 1 :

On met dans un sac 12 cartons sur lesquels sont écrites les 12 lettres du mot BACCALAUREAT

A) On tire successivement 5 cartons du sac sans remettre le carton tiré dans le sac . Calculer les probabilités suivantes

1) On tire dans l'ordre le mot LACET
2) On tire les lettres du mot LACET
3) On tire dans l'ordre le mot LAURA

B) On tire successivement 5 cartons du sac en remettant à chaque fois la lettre tirée dans le sac -calculer les probabilités des évènements précédents.

Exercice 2 :

Un sac contient 10 objets, n noirs ($2 \leq n \leq 8$) , les autres sont blancs. On extrait simultanément 2 objets du sac, les tirages sont supposés équiprobables

A) Déterminer les probabilités suivantes :

- P1 : la probabilité d'obtenir deux objets de couleurs différentes
- P2 : la probabilité d'obtenir 2 objets noirs
- P3 : la probabilité d'obtenir 2 objets blancs

B) Déterminer n pour que $P_3 = \frac{7}{15}$

Exercice 3 :

Un enfant possède une boite de jetons qu'il peut ranger suivant trois critères

- La couleur: rouge, blanc, bleu ou jaune
- La forme: rond, carré ou triangle
- La taille: petit ou grand

Il n'y a qu'un jeton de chaque type ,par exemple :un seul jeton bleu , carré ,petit

1) Combien la boite contient-elle de jetons ?
2) L'enfant prend au hasard 4 jetons simultanément, quelle est la probabilité qu'il tire :
   a) A :l'évènement 4 jetons ronds
   b) B :l'évènement 4 jetons de couleurs différentes
   c) C :l'évènement 2 petits jetons et 2 grands jetons
   d) D : l'évènement Au moins un jeton bleu
   e) E :Un seul jeton petit et rond

Exercice 4 :

Un enquêteur d'une entreprise de sondage s'adresse à un groupe de 20 personnes au sujet de leur loisir. On sait que le nombre de personnes de ce groupe qui s'intéressent à la pêche est 10, le nombre de ceux qui s'intéressent à la lecture est 8 et que 3 personnes s'intéressent à la fois à la pêche et à la lecture

1) combien de personnes dans ce groupe ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture?
2) l'enquêteur interroge au hasard une personne du groupe (on suppose l'équiprobabilité) .qu'elle est la probabilité pour que l'enquêteur choisisse :
   - une personne qui s'intéresse à la pêche ?
   - une personne qui s'intéresse à la lecture ou à la pêche ?
3) l'enquêteur choisit au hasard dans le même groupe de 20 personnes un échantillon de 4 personnes distincts qui ont la même chance d'être choisies : quelle est la probabilité pour que dans cet échantillon ils se trouvent exactement 3 personne s'intéressant à la pêche et exactement une personne s'intéressant à la lecture ?

Exercice 5 :

Sur une route départementale, on a placé un panneau STOP à un endroit où la visibilité est très bonne. Sur les deux routes qui accèdent au carrefour, on remarque que 5% des automobilistes ne respectent pas ce STOP. On considère que 30 voitures se présentent à ce STOP en une journée.

1) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des automobilistes ne commette d'infractions ?
2) Quelle est la probabilité que deux automobilistes exactement commettent une infraction?

Exercice 6 :

Deux machines a et b produisent respectivement 100 pièces et 200 pièces
- 2% des pièces produites par la machine a sont défectueuses
- 3% des pièces produites par la machine b sont défectueuses

On choisit au hasard une pièce parmi les 300 pièces produites et on considère l'évènement suivant

A<<la pièce provient de la machine a>>
B <<la pièce provient de la machine b>>
D <<la pièce est défectueuse>>
$\overline{D}$ <<la pièce n'est pas défectueuse>>

1) Déterminer $P(A), P(B), P(D), P(\overline{D}), P(A \cap D)$ et $P(B \cap \overline{D})$
2) Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes $P(A / D)$ et $P(B / \overline{D})$

Solutions

Exercice 1 :

On a dans le sac 12 lettres du mot BACCALAUREAT

A) On tire successivement 5 lettres sans remise

1) Notons F «tirer le mot LACET »

Méthode 1 : on note Ω l'univers

Card(Ω)=12x11x10x9x8

Le nombre des arrangements de 5 parmi 12 sans répétition

$$P(F)=\frac{card(F)}{card(\Omega)}=\frac{8}{12\times 11\times 10\times 9\times 8}$$

$$P(F)=\frac{1}{11880}$$

Deuxième méthode :

On peut raisonner en calculant la probabilité de tirer un L au premier tirage , un A au second ….

Et multiplier ces différentes probabilités.

On obtient $P(F)=\frac{1}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{11880}$

2) Soit G l'évènement <<on tire les lettres du mot LACET>>

card(G)=5 !.8=960 (on a multiplié par le nombre de permutations des 5 lettres)

$$P(G)=\frac{5!.8}{A_{12}^{5}}=\frac{120}{12\times 11\times 10\times 9}=\frac{1}{99}$$

3) Soit H l'évènement <<on tire dans l'ordre le mot LAURA>>

card(H)=4x3=12

$$P(H)=\frac{12}{A_{12}^{5}}=\frac{12}{12\times 11\times 10\times 9\times 8}=\frac{1}{7920}$$

4)

B) Cette fois on tire successivement 5 cartons avec remise ; soit Ω' l'univers de l'épreuve card(Ω') est le nombre de 5-listes dans l'ensemble des 12 cartons : card(Ω')=12^5

On note F' l'évènement <<tirer le mot LACET>>

Card(F')=1x4x2x1=8

$$P(F')=\frac{8}{12^5}=\frac{1}{31104}$$

On note G’ l’évènement <<tirer les lettres du mot LACET>>

$$P(G')=\frac{8.5!}{12^5}=\frac{1}{99}$$

On note H’ l’évènement <<tirer le mot LAURA>>

$$P(H')=\frac{4^2}{12^5}=\frac{16}{12^5}=\frac{1}{15552}$$

Exercice 2 :

Un sac contient 10 objets n noirs (2≤n≤8), les autres blancs , on extrait simultanément 2 objets

A) -Déterminer P1 : la probabilité d’obtenir 2 objets : $card(\Omega)=C_{10}^2$ =45

deux objets de couleurs différentes

$C_n^1 \times C_{10-n}^1 = n(10-n)$ d’où $P_1=\frac{n(10-n)}{45}$

-Déterminons P2 <<obtenir 2 objets noirs>>

$P_2=\frac{C_n^2}{45}=\frac{n(n-1)}{90}$ car $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$

-Déterminons P3 <<deux objets blanches>>

$$P_3=\frac{C_{10-n}^2}{45}=\frac{\frac{(10-n)(9-n)}{2}}{45}=\frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

B) $P_3=\frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{(10-n)(9-n)}{90}=\frac{7}{15}$, $15(10-n)(9-n)=7\times 90$

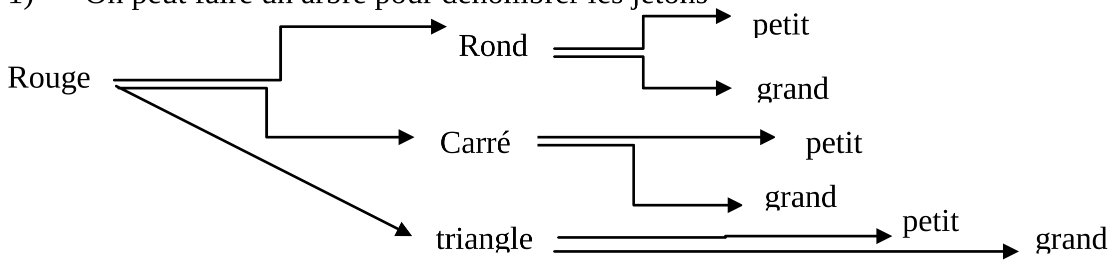
$n^2-19n+48=0$

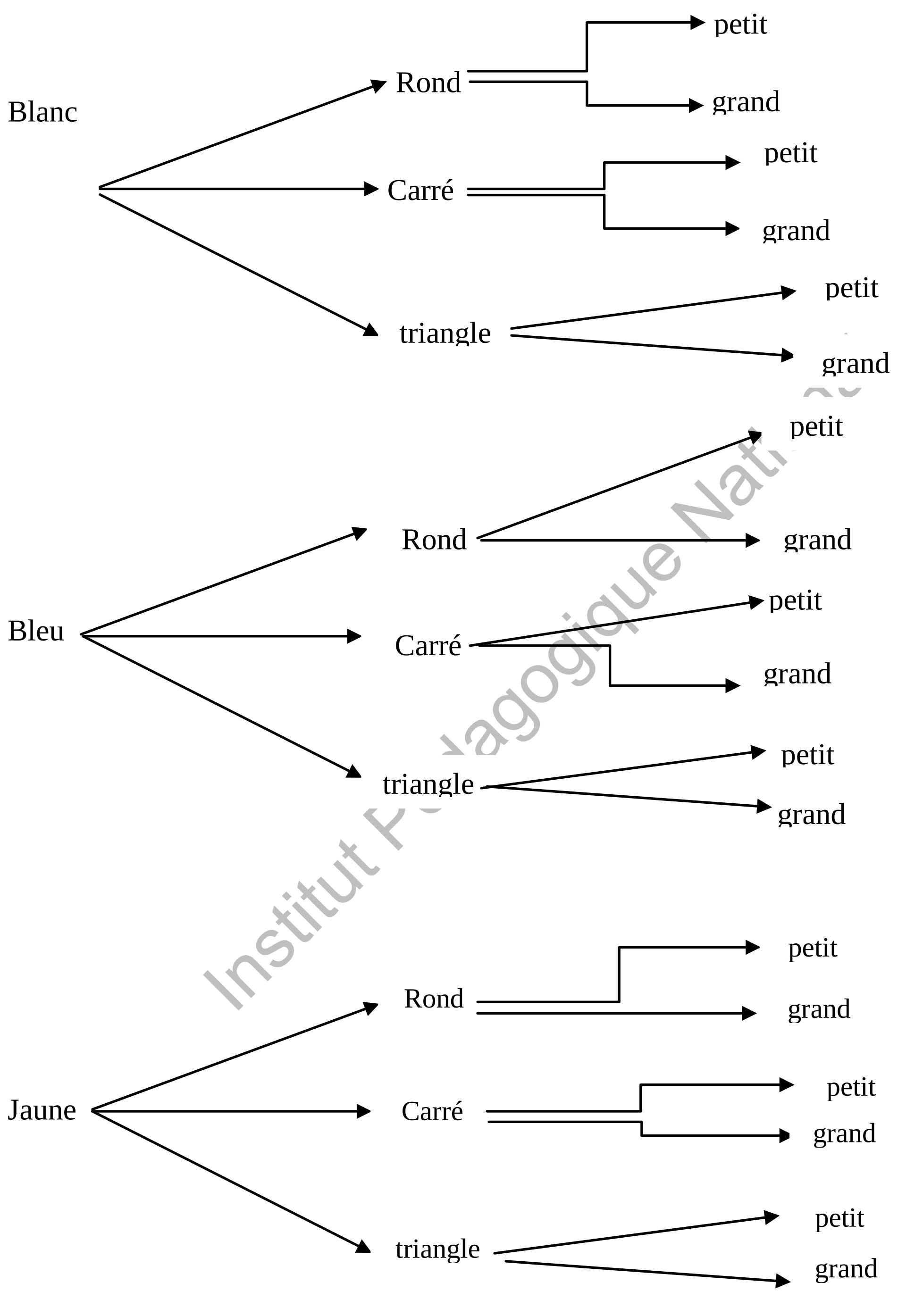
$\Delta=169$

n=3 ou n=16 la solution bonne est n=3 car 3 <8.

Exercice 3 :

1) On peut faire un arbre pour dénombrer les jetons




Blanc
Rond
petit
grand
Carré
petit
grand
triangle
petit
grand
Bleu
Rond
petit
grand
Carré
petit
grand
triangle
petit
grand
Jaune
Rond
petit
grand
Carré
petit
grand
triangle
petit
grand

il y a 4x3x2=24 jetons

2) l'enfant prend au hasard 4 jetons simultanément

a) l'univers Ω est l'ensemble des parties de 4 éléments parmi les 24 jetons

d'où :

$$card(\Omega) = C_{24}^{4} = 10626$$

A : l'évènement <<4 jetons ronds>>

$$card(A) = C_{8}^{4} = 70$$

$$P(A) = \frac{C_{8}^{4}}{C_{24}^{4}} = \frac{70}{10626} = \frac{5}{759}$$

b) déterminons la probabilité de B

B : l'évènement <<4 jetons de couleurs différentes>>

Il y a 6 jetons de chaque couleur

$$card(B) = C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} = 1296 \quad P(B) = \frac{1296}{10626} = \frac{648}{5313} = \frac{216}{1771}$$

c) Déterminons la probabilité pour qu'il tire 2 petits jetons et 2 grands jetons

Soit C cet évènement :Il y a 12 petits jetons et 12 grands

$$card(C) = C_{12}^{2} \times C_{12}^{2} = 4356 \qquad P(C) = \frac{4356}{10626} = \frac{726}{1771}$$

d) Déterminons la probabilité pour qu'il tire au moins un jeton bleu : il y a 18 jetons qui ne sont pas bleus $card(\overline{D}) = C_{18}^{4} = 3060$

$$P(\overline{D}) = \frac{3060}{10626} = \frac{510}{1771} \quad P(D) = 1 - P(\overline{D}) = \frac{1261}{1771}$$

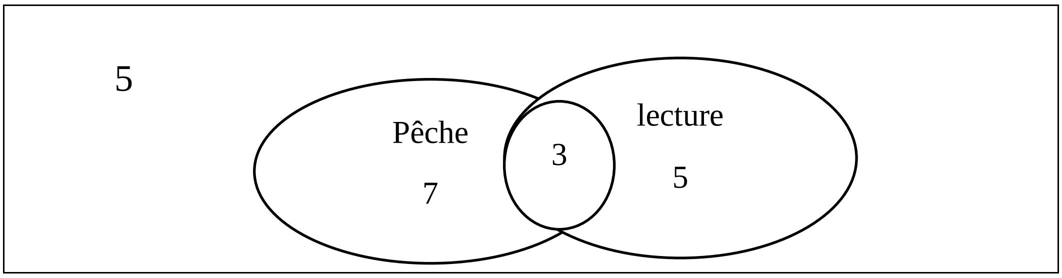
e) Déterminons la probabilité pour qu'il tire un seul jeton petit et rond, soit E cet évènement :

il y a 4 jetons petits et ronds (une de chaque couleur) les autres sont pris parmi les 20 jetons qui ne sont pas petits et ronds.

$$card(E) = C_{4}^{1} \times C_{20}^{3} = 4560 \quad P(E) = \frac{4560}{10626} = \frac{760}{1771}$$

Exercice 4 :

1) Représentons la situation par une figure en utilisant les diagrammes de VENN



Dans ce groupe de 20 personnes 7 ne s'intéressent qu'à la pêche, 3 s'intéressent au deux et 20-(7+5+3)=5 personnes ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture

2) Soit P l'évènement <<la personne choisie s'intéresse à la pêche >>
   soit L l'évènement <<la personne choisie s'intéresse à la lecture>>
   a) $P(P) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
   b) $P(P \cup L) = \frac{card(P \cup L)}{card(\Omega)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

3) L'enquêteur choisit 4 personnes il est à noter qu'une personne choisie s'intéressant à la pêche peut éventuellement s'intéresser à la lecture
   notons Ω' l'univers , l'éventualité est une partie de Ω' de 4 éléments
   $cad(\Omega') = C_{20}^{4} = 4845$

   notons B :<<dans l'échantillon choisi ils se trouvent une personne s'intéressant à la lecture et exactement trois personnes s'intéressant à la pèche>>

$$P(B) = \frac{C_7^3 \times C_5^1 + C_7^2 \times C_3^1 \times C_5^1}{4845} = \frac{490}{4845} = \frac{98}{962}$$

Exercice 5 :

Nous avons un schéma de Bernoulli : appelons Succès <<un automobiliste respecte le STOP>> et Echec <<un automobiliste ne respecte pas le STOP>>
Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'automobilistes sur les 30 voitures respectant le stop cette variable X suit la loi binomiale de paramètres n=30 et p=0.95

1) L'évènement :aucun des automobilistes ne commet une infraction est

$$P(X=30)=(0.95)^{30}=0.21464$$

2) L'évènement : deux automobilistes commettent une infraction est

$$P(X=28)=C_{30}^{28}(0.95)^{28}(0.05)^{2}\simeq 0.25864$$

Exercice 6 :

1) Déterminons les différentes probabilités

$$P(A)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3} \text{ et } P(B)=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}\ P(D)=\frac{0.02\times100+0.03\times200}{300}=\frac{2}{75}$$

$$P(\overline{D})=\frac{73}{75}\ P(A\cap D)=\frac{2}{300}\ P(B\cap\overline{D})=\frac{194}{300}=\frac{97}{150}$$

il y a 197 pièces non défectueuses provenant de la machine b et 300 pièces au totale

2) Par définition : $P(A/D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}$ $P(A/D)=\dfrac{\frac{1}{150}}{\frac{2}{75}}=\dfrac{1}{4}$

de même : $P(B/\overline{D})=\dfrac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{\frac{194}{300}}{\frac{292}{300}}=\dfrac{194}{292}=\dfrac{97}{146}$

Remarque : on aurait pu déterminer ces probabilités directement. En effet, le nombre de pièces défectueuses en tout est égal à 8 et le nombre de pièces défectueuses provenant de a est égal à 2 d'où : $P(A/D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

De même le nombre de pièces non défectueuses en tout égal 292. Le nombre de pièces non défectueuses provenant de b égal à 97% de 200 =194 donc

$$P(B/\overline{D})=\frac{194}{292}=\frac{97}{146}$$

Chapitre 3:

Généralités sur les fonctions

Résumé :

1. **Domaine** ou ensemble de définition D_f : c'est l'ensemble des nombres pouvant avoir une image par cette fonction.

- Les fonctions fractionnaires sont définies sur les valeurs qui n'annulent pas le dominateur
- Les fonctions racines carrées sont définies lorsque le contenu de la racine est positif.
- Les fonctions polynômes sont définies sur R

2. **Continuité**

Définition : f est continue au point $x_0 \in D_f$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si f est définie par deux expressions alors f est continue en x_0 ssi :

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3. **Prolongement par continuité** : soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ .f admet un prolongement par continuité en x_0 ssi :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re$. Le prolongé par continuité de f est : $\begin{cases} g(x) = f(x), x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

4. **Dérivabilité :**

Définition : la fonction f est dérivable en $x_0 \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \Re$

Le nombre *a* s'il existe s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 noté $f'(x_0)$

Remarque : si f est définie par deux expressions alors f est dérivable en x_0 ssi :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \Re$$

Formules:

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \times g)' = f'g + g'f$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
- $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
- $(f^n)' = nf'f^{n-1}$
- $(f[g(x)])' = g'(x)f'[g(x)]$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$
- $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$

5. Sens de variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$
- f décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$

Equation de la tangente :soit f une fonction dérivable en x_0, une équation de la tangente à C_f en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

A retenir :

a. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \Rightarrow$ C admet en x_0 une demi-tangente verticale

b. C admet une tangente horizontale en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

c. C admet au point x_0 :-une tangente parallèle à la droite Δ :y=ax+b $\Rightarrow f'(x_0) = a$ -une tangente perpendiculaire à $\Delta \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-1}{a}$

Asymptotes et branches infinies :

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors x=a est une asymptote verticale
- si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ alors y=a est une asymptote horizontale
- si $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ alors y=ax+b est une asymptote oblique.

Points particuliers d'une courbe :

Soit f une fonction dérivable en x_0 alors :

- f admet un extremum (maximum ou minimum) en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0
- f admet un point d'inflexion en $x_0 \Leftrightarrow f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 ou $f'(x_0) = 0$ et f' ne change pas de signe en x_0
- intersection de C_f avec (ox) on résout f(x)=0
- intersection de C_f avec (oy) on calcule f(0) si possible
- intersection de C_f avec l'asymptote horizontale:y=a on résout $f(x) = a$

Éléments de symétrie

- la droite Δ d'équation x=a est un axe de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$
- le point A(a,b) est un centre de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) + f(x) = 2b$
- la fonction f est paire $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$,et $x, -x \in D_f$
- la fonction f est impaire $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, et $x, -x \in D_f$
- La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (oy)
- La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O
- si g(x)=-f(x) $\Leftrightarrow C_f$ et C_g sont symétriques par rapport à l'axe (ox)
- si g(x)=f(-x) $\Leftrightarrow C_f$ et C_g sont symétriques par rapport à l'axe(oy)
- si g(x)=-f(-x) $\Leftrightarrow C_f$ et C_g sont symétriques par rapport à l'origine O.

Bijection

f réalise une bijection sur un intervalle I $\Leftrightarrow$ f est continue et strictement monotone sur I

théorème des valeurs intermédiaires : si f est une fonction continue sur l'intervalle I vers l'intervalle J alors : $\forall y \in J, \exists x \in I$ tel que $f(x) = y$, si de plus f est une bijection sur I alors le nombre x tel que $f(x) = y$ est unique

Conséquence :

Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans l'intervalle $]a,b[$

Fonction réciproque

Si f est une bijection de I vers J alors f admet une bijection réciproque notée : f^{-1} de J vers I telle que : $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

- f et f^{-1} ont le même sens de variation
- f^{-1} est dérivable lorsque $f'\neq 0$ et on a $(f^{-1})'(x_0)=\dfrac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]}$
- C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite y=x

D'où on a :

C_f	$C_{f^{-1}}$
M(a,b)	M'(b,a)
X=a Asymptote Verticale	Y=a Asymptote Horizontale
Y=b Asymptote Horizontale	X=b Asymptote Verticale
Branche parabolique(OX) (resp (OY))	Branche parabolique(OY) (resp (OX))
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}=0$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}=\infty$
Si tg en $A(\alpha,\beta)$:Y=aX+b	Tg en $B(\beta,\alpha)$ $y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$

Chapitre 4:

Fonctions Logarithmes et Exponentielles

Fonction logarithme Ln

C'est une fonction définie sur les valeurs strictement positives qui s'annule en 1 et de dérivée $\frac{1}{x}$. elle est notée Ln

Propriétés algébriques :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln x \geq \ln y \Leftrightarrow x \geq y$
- Si $x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 0$ et si $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq 0$
-

Dérivée logarithmique :

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{en particulier :} \quad (Ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Limites usuelles

- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Tableau de variation de Ln

x.	0 +∞
$ln'(x) = \frac{1}{x}$	+
ln(x)	+∞ -∞

Fonction exponentielle

C'est la fonction réciproque de ln, alors : $e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$, e^x est définie sur R et $\forall\, x \in R,\ e^x > 0$

Propriétés algébriques :

- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^0 = 1; e^1 = e$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} 1 \frac{e^x - 1}{x} =$

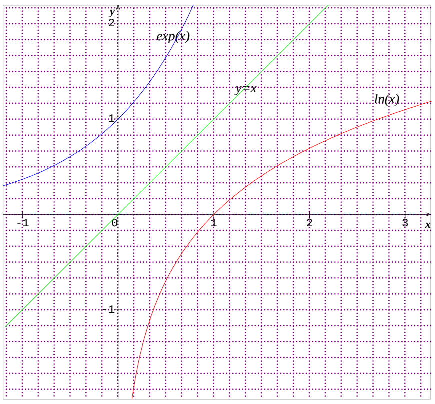
Dérivée

$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$ en particulier : $(e^x)' = e^x$

Tableau de variation de e^x

X	$-\infty$ → $+\infty$
$(e^x)' = e^x$	+
e^x	$+\infty$ → 0

Courbes de ln(x) et de e^x



Primitives

Primitive : soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et F une fonction dérivable sur [a,b],on dit que F est une primitive de f sur [a,b] Ssi $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in \; [a,b]$

Tableau des primitives usuelles

$x^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$
a.	$ax+k$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$
$n \neq 1 / \frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}+k$
$\cos x$	$\sin x+k$
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+k$
$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+$ k
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$
$u'e^u$	e^u+k
e^x	e^x+k
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+k$

Chapitre 5:

Intégrales

Soit f une fonction continue sur [a,b] et F une primitive de f

Définition : l'intégrale de a à b de f(x) notée $\int_a^b f(x)dx$ est la valeur $F(b)-F(a)$

On écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

Propriétés :

- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $f(x) \geq 0$ sur [a,b] $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $f(x) \leq 0$ sur [a,b] $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Si $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- La valeur moyenne de f sur [a,b] est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

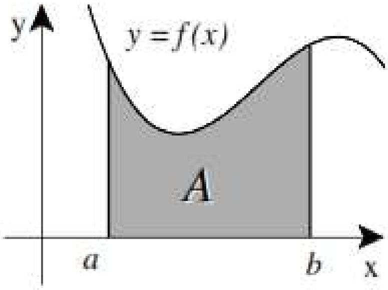
Intégration par parties :
Formule :

$$\int_a^b UV' = [UV]_a^b - \int_a^b U'V$$

Calcul d'aires

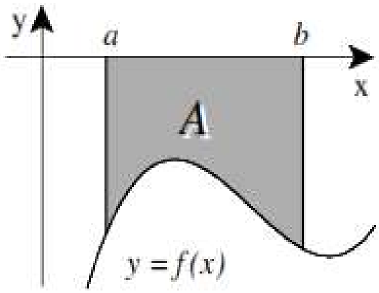
Soit *f* une fonction positive sur [a,b]

Définition :l'aire limitée par la courbe de f , l'axe (ox) et les droites d'équations :*x*=a et *x*=b est : $\int_a^b f(x)dx$



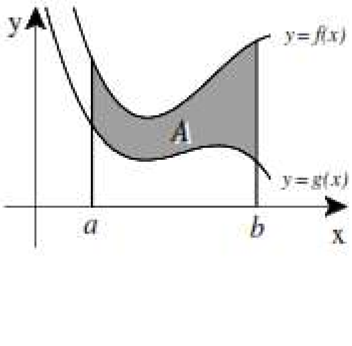
$$\mathrm{A}:\begin{cases}\zeta_f,(ox)\\ x=a,x=b\end{cases}\rightarrow \mathrm{A}=-\int_a^b f(x)dx$$

$$\int f(n)\geq g(n)\, sur\left[a,b\right]$$



De façon générale :

- ✓ $\mathrm{A}:\left\{\zeta_f,\zeta_g \rightarrow \mathrm{A}=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \quad / \quad f(n)\geq g(n)\, sur\left[a,b\right]\right.$



Exercices sur les fonctions

Exercice 1 :

A. soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}/\{1\}$ de tableau de variation :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2 ↗		$+\infty \| +\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Proposition	A	B	C
1) Le domaine de définition de f est	$\mathbb{R}/\{1\}$	$\mathbb{R}/\{1,3\}$	$]-\infty,1[U]1,3[U]3,$
2) La fonction f est	Paire	Impaire	Ni paire ni impaire
3) La courbe C admet une asymptote d'équation	$x=3$	$x=1$	$y=3x-2$
4) La courbe C admet une asymptote d'équation	$y=-2$	$y=1$	$x=-2$
5) Une équation de la tangente a C au pt d'abscisse 3 est	$y=-2$	$y=3x$	$x=-2$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=$	$-\infty$	$+\infty$	0
7.) L'équation $f(x)=0$ admet exactement	3 solutions	2 solutions	1 solution
8.) Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors C admet une branche parabolique de direction :	(ox)	(oy)	$y=2x$

Choisir la bonne réponse

B. Sachant que $f(0)=1$ et $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=2$ ou $x=4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ tracer sa courbe C

Exercice 2 :

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis déterminer les réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
2) Calculer la dérivée f' de f
3) Dresser le tableau de variations de f
4) Donner une équation de la tangente de C à son point d'intersection avec l'axe des ordonnées
5) Résoudre l'équation $f(x)=0$ et interpréter graphiquement ses solutions
6) a-Montrer que C admet deux asymptotes dont l'une (D) :est oblique
   b-Etudier les positions relatives de (D) par rapport à C
7) Vérifier que $f(4-x)+f(x)=6$ puis interpréter graphiquement
8) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $x^2-(1+m)x-1+2m=0$
9) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$
   a-Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera

Exercice 3 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1cm)

1- Soient a et b deux nombres réels on désigne par g la fonction définie par $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

a- Calculer g’ la dérivée de la fonction g

b- Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point $\Omega(0,1)$ et admette en ce point une tangente parallèle à l’axe des abscisses (o x)

2- Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$

a) Prouver que pour tout nombre réel x on a $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Calculer f’ la dérivée de f et étudier son signe puis dresser le tableau de variation de f

d) Montrer que (Γ) la courbe représentative de f, admet deux asymptotes (Δ_1) au voisinage de $-\infty$ et (Δ_2) au voisinage de $+\infty$ puis préciser la position de la courbe (Γ) par rapport à chacune de ces asymptotes

e) Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (Γ)

3) a)Prouver que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle K que l’on déterminera.

Vérifier que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} = +\infty$

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

4) Tracer les courbes (Γ) et (Γ') ((Γ') la courbe représentative de f^{-1})

5) a) Déterminer une primitive F de la fonction f .

b) Calculer en cm^2 l’aire du domaine du plan limité par la courbe (Γ) ,son asymptote (Δ_1) et les droites d’équations x=ln(2) et x=ln(3)

Exercice 4 :

1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction

$g(x) = x - e^{\frac{-x}{2}}$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que

$0.70 \leq \alpha \leq 0.71$

2) Déterminer le signe de $g(x)$

3) Soit $f(x) = (2x-4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$

a) Montrer que $f(x) = (2x-2)(2e^{\frac{x}{2}} - 1)$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2-x)]$ puis interpréter graphiquement.

4) a) Exprimer f' en fonction de g et dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$

c)Déterminer les points d'intersections de C_f avec (OX) et (OY)

d) Tracer C_f on prend $\alpha = 0.7$

Exercice 5 :

1) Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2 - (x+1)e^{-x}$

a)Etudier les variations de g

b)En déduire le signe de g suivant les valeurs de x

2) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x+2)e^{-x} + 2x$, on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm

a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,et en donner une interprétation graphique b)Calculer f' dérivée de f puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

c)Dresser le tableau de variation de f

d)Montrer que la courbe (C) coupe l'axe (OX) des abscisses en un point unique d'abscisse α et que $-1.29 \leq \alpha \leq -1.28$

3) a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement.

b) Etudier le signe de $f(x) - 2x$ puis interpréter graphiquement ce résultat

c)Déterminer le point A de la courbe C où la tangente (T) est parallèle à la droite (D) d'équation y=4x donner une équation de cette tangente.

4) a) Tracer la courbe C ,la droite (D) et la tangente (T) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

b)Discuter graphiquement suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation $me^x - x - 2 = 0$

c)Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera . calculer $f^{-1}(e-2)$

d) Tracer la courbe C' courbe de la fonction f^{-1} dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

5) a)Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $I = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$

b) Calculer en cm^2 l'aire délimitée par la courbe C , la droite D et les droites d'équations x=0 et x=1

Exercice 6 :

A) Soit la fonction $f(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1) Etudier les variations de f

2) Calculer f(1) en déduire le signe de la fonction f

B) Soit $g(x)=\frac{Ln(x)}{x}-x$

1)Etudier les variations de g

2) a)Montrer que la courbe C de g admet une asymptote oblique D

b)Etudier les positions relatives de C et D

3) a) Montrer qu'il existe un unique point A de C où la tangente à C est parallèle à D

b)Ecrire une équation de la tangente à C en A

4)Tracer la courbe C de g

Exercice 7 :

$f(x)=\ln(1+e^{-x})$

1) Etudier les variations de f
2) a)Montrer que $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$

puis en déduire l'équation d'une asymptote oblique Δ de C_f

b) Etudier la position relative de C_f et Δ

c)Tracer C_f

Exercice 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique :2 cm

A) Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$

1) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$

2)Etudier le sens de variation de g , calculer g(0) puis en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

3) a) Déterminer a et b de sorte que la fonction définie sur R par

$F(x)=(ax+b)e^{2x}$ admette pour dérivée la fonction : $x \to -xe^{2x}$

b)En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0

B) Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$f(x)=x+3-xe^{2x}$

on appelle C sa courbe représentative

1)Etudier les variations de f et déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

2) Montrer que la droite D d'équation y=x+3 est une asymptote à C lorsque x tend vers $-\infty$, étudier suivant les valeurs de x la position relative de D et C

3)a) Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on note I et J(I ayant une abscisse inférieure à celle de J)

b)Déterminer et justifier un encadrement d'amplitude 0.1 de l'abscisse de J

4)Tracer la courbe C et la droite D

Exercice 9 :

A) On considère la fonction g de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$g(x)=x^3+\ln x-1$

1) Déterminer ses limites aux bornes de l'intervalle $]0,+\infty[$, calculer g'(x) et dresser le tableau de variation de g

2) Calculer g(1) en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

B) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-2-\frac{\ln x}{x}$$

1) Soit f' la dérivée de f , montrer que

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, étudier le sens de variation de f et faire son tableau de variation

3) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ unité de longueur 2cm

a) Etudier la position de (C) par rapport à la parabole (P) d'équation :

$$y = \frac{x^2}{2} - 2$$

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\frac{x^2}{2} - 2))$ que peut-on conclure?

4) Tracer la parabole (P) et la courbe (C) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ placer le point d'abscisse 2.

Exercices sur les intégrales

Exercice 1 :

Déterminer les réels *a* et *b* puis calculer l'intégrale I, $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}$:

$$I = \int_1^2 f(x)dx$$

Exercice 2 :

Déterminer les réels a, b, c puis calculer I :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$$

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

Exercice 3 :

Déterminer les réels a et b puis calculer I

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-4}$$

$$I = \int_2^3 f(x)dx$$

Exercice 4 :

Déterminer les réels a, b puis calculer I

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

$$I = \int_{-1}^0 f(x)dx$$

Exercice 5 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

$$I = \int_{e}^{2e} x^3 \ln x dx$$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{1} xe^x dx$$

Exercice 7 :

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{0}^{\pi} (x+2)\sin x dx$$

Exercice 8 :

On pose :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \text{ , et } J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$$

1. Calculer $J+I$
2. Calculer $J-I$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties)
3. Calculer alors I et J

Exercice 9 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$ pour tout nombre réel strictement positif a on pose :

$$I(a)=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

1. Montrer que f est une fonction à valeurs positives, quel est le signe de $I(a)$?
2. a) Déterminer des nombres réels c et d tels que pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^x}{1+e^x}=c+\frac{d}{1+e^x}$$

En déduire le calcul de $\int_{0}^{a}\frac{1}{1+e^{x}}dx$

b) Calculer $f+f'$,où f' est la fonction dérivée de f

c) Calculer $I(a)$.

Exercice 10 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\int_{n-1}^{n} e^{\frac{1}{2}x}dx$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer u_n en fonction de n
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1
3. Soit $S_n = u_1 + u_2 +, \dots, +u_n$

   Montrer que $S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$
4. la suit (S_n) a-t-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Solutions des exercices sur les fonctions

Exercice 1 :

Question	Réponse
1	A
2	C
3	B
4	A
5	A
6	C
7	A
8	A

Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

1) $D_f : x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$; $D_f : \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\, u\,]2, +\infty[$

Réels a, b et c : $ax + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

$$\frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x - 2b + c}{x-2}$$

$$\begin{cases} \boxed{a=1} \\ -2a+b=-1 \Rightarrow -2+b=-1 \Rightarrow b=2-1=1 \boxed{b=1} \\ -2b+c=-1 \Rightarrow -2+c=-1 \boxed{c=1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}}$$

2.) $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0$

$$\begin{cases} x_1=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{3}\ =2 \\ x_2=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$0 \Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to2+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f(1)=1,\ f(3)=5$

4) $C_f \cap (oy):\ f(0)=\frac{1}{2};\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$, $f'(0)=\frac{3}{4}$

$y=\frac{3}{4}(x)+\frac{1}{2}:\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

5) $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x-1=0, \Delta=5$; $\begin{cases} x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0,6 \\ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6 \end{cases}$

La courbe de f coupe (ox) aux points $A(x_1,0)$ et $B(x_2,0)$

6) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[x+1+\frac{1}{x-2}-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2}=0$;

Donc la droite D d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique de C_f

$\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\pm\infty$; x=2 asymptote verticale

b) $f(x)-y_D = x+1+\frac{1}{x-2}-(x+1)=\frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f(x)-y_D=\frac{1}{x-2}$	$-$	$+$
PR	D/C	C/D

7) $f(4-x)+f(x)=(4-x)+1+\frac{1}{(4-x)-2}+x+1+\frac{1}{x-2}$

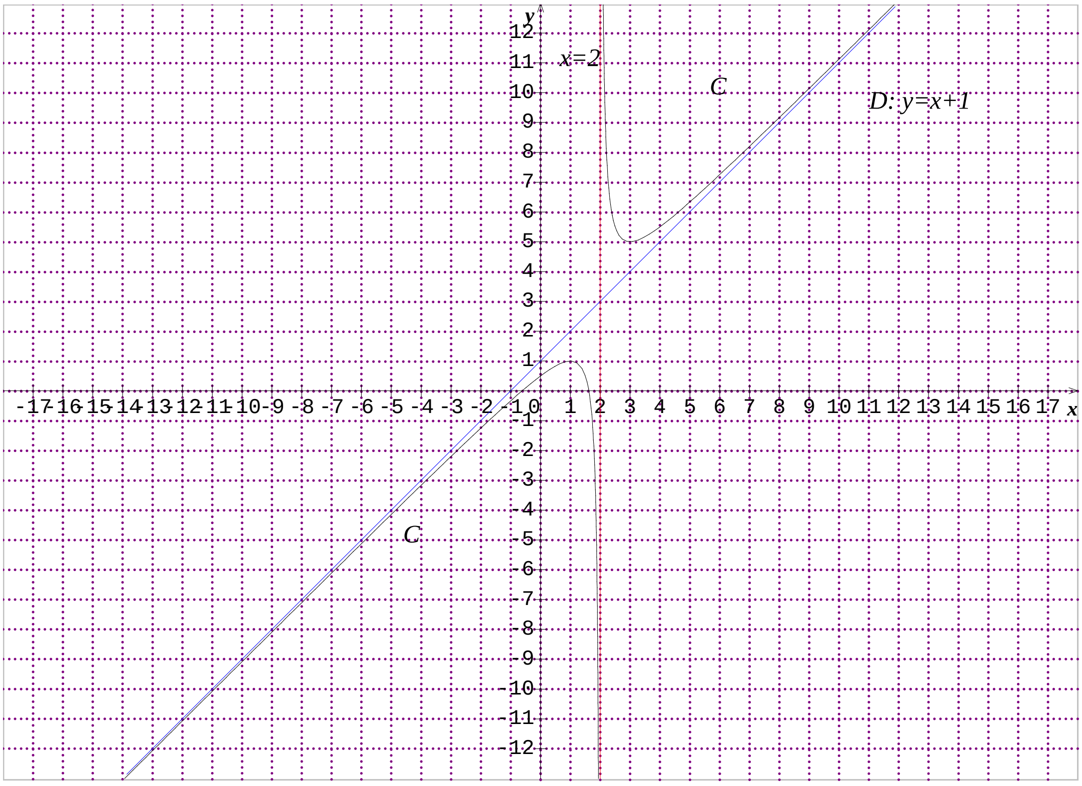
$=4-x+1+\frac{1}{4-x-2}+x+1+\frac{1}{x-2}$

$$= 6 + \frac{1}{-x+2} + \frac{1}{x-2} = 6 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 6$$

$$\Rightarrow f(4-x) + f(x) = 6$$

$$\Rightarrow f(2\times 2 - x) + f(x) = 2\times 3 \Rightarrow f(2a-x) + f(x) = 2b$$

Donc le point $A(2,3)$ est un centre de symétrie de C_f



9) $x^2 - (1+m)x - 1 + 2m = 0 \Rightarrow x^2 - x - mx - 1 + 2m = 0$

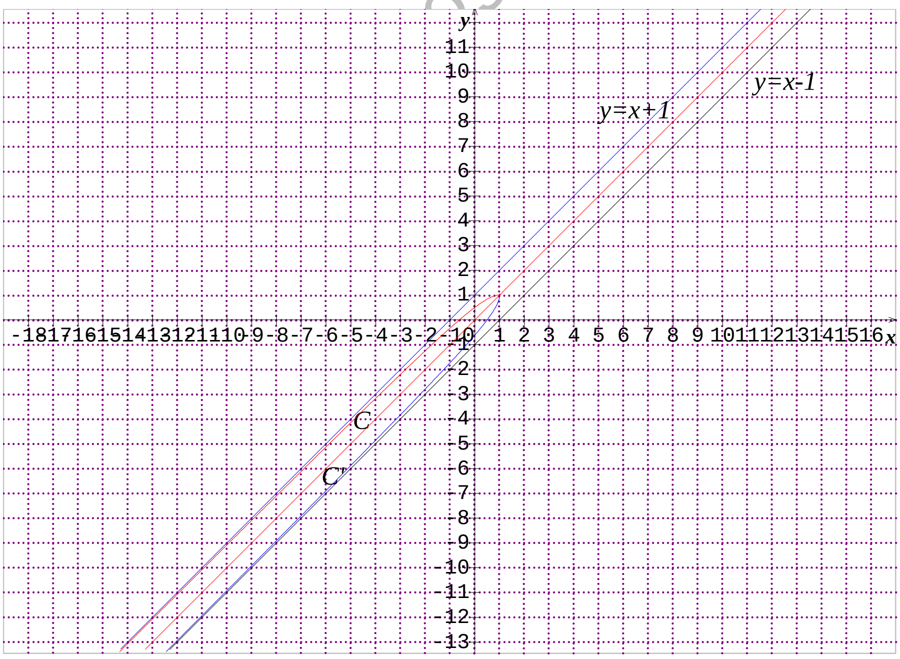
$$x^2 - x - 1 = mx - 2m \Rightarrow x^2 - x - 1 = (x-2)m \Rightarrow m = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = f(x) \quad \boxed{f(x) = m}$$

Le nombre de solutions est égal au nombre de points d'intersections de C_f avec la droite $y = m$ et d'après le tracé on a

- Si $m < 1 \rightarrow$ 2 solutions
- Si $m = 1 \rightarrow$ 1 solution
- Si $1 < m < 5 \rightarrow$ 0 solution
- Si $m = 5 \rightarrow$ 1 solution
- Si $m > 5 \rightarrow$ 2 solutions

10) a) g est continue et strictement croissante sur I= $]-\infty, 1]$ donc g réalise une bijection de I sur I

b) $(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{g'[g^{-1}(\frac{1}{2})]} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{4}{3}$



Exercice 3 :

1) $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

a) $g'(x)=a-\left(\dfrac{4e^x(e^x+1)-e^x(4e^x)}{(e^x+1)^2}\right)=a-\left(\dfrac{4e^{2x}+4e^x-4e^{2x}}{(e^x+1)^2}\right)=a-\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) $\Omega(0,1)\in C_f \Rightarrow$

$$g(0)=1\Rightarrow a(0)+b-\frac{4e^0}{e^0+1}\Rightarrow b-\frac{4}{2}=1\Rightarrow b-2=1\Rightarrow \boxed{b=3}$$

en $\Omega(0,1)$ la tangente est parallèle a (ox)

$$\Rightarrow g'(0)=0\Rightarrow a-\frac{4e^0}{(e^0+1)^2}=0\Rightarrow a-\frac{4\times 1}{(1+1)^2}\Rightarrow a-\frac{4}{2^2}=0\Rightarrow a-\frac{4}{4}=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow \boxed{a=1}$$

2) $f(x)=x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

a)

$$x-1+\frac{4}{e^x+1}=x+3-3-1+\frac{4}{e^x+1}=x+3-4+\frac{4}{e^x+1}=x+3+\frac{-4e^x-4+4}{e^x+1}=x+3-\frac{4e^x}{e^x+1}=f(x)$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}\right]=+\infty$

c)

$$f'(x)=1+\left(\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}\right)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

0

+ 0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(3+x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}-(3+x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4e^x}{e^x+1}=0$ donc la droite

Δ_1 d'équation $y=x+3$ est une asymptote oblique de (Γ) en $-\infty$

de même

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1+\dfrac{4}{e^x+1}-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4}{e^x+1}\right]=0$ donc la droite

Δ_2 d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de (Γ) en $+\infty$

- $f(x)-y_{\Delta_1}=x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}-(x+3)=-\dfrac{4e^x}{e^x+1}\prec 0\Rightarrow \Delta_1/(\Gamma)$
- $f(x)-y_{\Delta_2}=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}-(x-1)=\dfrac{4}{e^x+1}\succ 0\Rightarrow (\Gamma)/\Delta_2$

e) $\Omega(0,1)$ est centre de symétrie si : $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 1;$

$$f(2\times 0-x)+f(x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^x+1}$$

$$=-2+\frac{4}{\dfrac{1}{e^x}+1}+\frac{4}{e^x+1}=-2+\frac{4}{\dfrac{e^x+1}{e^x}}+\frac{4}{e^x+1}=-2+\frac{4e^x}{e^x+1}+\frac{4}{e^x+1}=-2+\frac{4e^x+4}{e^x+1}$$

$$= -2 + \frac{4(e^x+1)}{e^x+1} = -2+4=2$$

3) a) f est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(1)\right]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b) f^{-1} et f ont le même sens de variation d'où TV de f^{-1}.

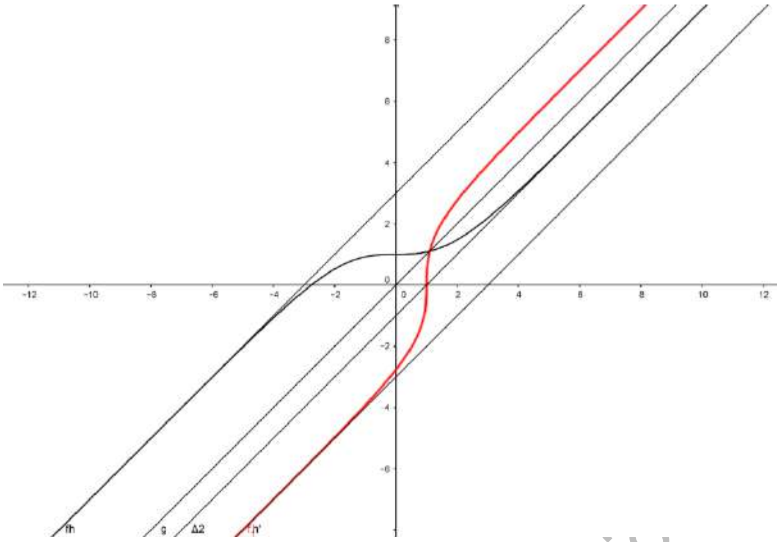
f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f^{-1\prime}(x)$	+	||	+
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4)

$\Delta_1 : y = x+3$
$(0,3);(-3,0)$

$\Delta_2 : y = x-1$
$(0,-1);(1,0)$



6) a) $f(x) = x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x + 1} = x + 3 - 4\dfrac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\ln(e^x + 1)$;

$\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u} \rightarrow \ln u$

b) $A : \begin{cases} \Gamma, \Delta_1 \\ x = \ln 2, x = \ln 3 \end{cases}$

$$A = \int_{ln2}^{ln3} \left(y_{\Delta_1} - f(x)\right) dx$$

$$= \int_{ln2}^{ln3} \left(x + 3 - (x + 3 - \frac{4e^x}{e^x + 1})\right) dx$$

$$= \int_{ln2}^{ln3} \frac{4e^x}{e^x + 1} dx = [4\ln(e^x + 1)]_{ln2}^{ln3}$$

$$A = 4\ln\left(e^{\ln 3} + 1\right) - 4\ln\left(e^{\ln 3} + 1\right) = 4\ln(3+1) - 4\ln(2+1) = 4\ln 4 - 4\ln 3 = 4\left(\ln 4 - \ln 3\right)$$

$$A = \left(4\ln\frac{4}{3}\right) \times 1^2 cm^2 \Rightarrow \boxed{A = 4\ln\left(\frac{4}{3}\right) cm^2}$$

Exercice 4 :

1) a) $g(x) = x - e^{\frac{-x}{2}}$; $D_g = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - e^{\frac{-x}{2}}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - e^{\frac{-x}{2}}\right) = +\infty - (0) = +\infty$$

$$g'(x) = 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}} = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \succ 0$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) g est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α

$$\left.\begin{array}{l} \bullet g(0,7) = -4,68\times10^{-3} \prec 0 \\ \bullet g(0,8) = 0,129 \succ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0,7 \prec \alpha \prec 0,71$$

D'après le tableau de variation de g on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) $f(x) = (2x-4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$

a) $f(x) = 2(x-2)e^{\frac{x}{2}} - (x-2) \Rightarrow (x-2)\left[2e^{\frac{x}{2}} - 1\right] = (x-2)\left(2e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)\left[2e^{\frac{x}{2}} - 1\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)\left[2e^{\frac{x}{2}} - 1\right] = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x}\left[2e^{\frac{x}{2}} - 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x}\left(2e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2-x)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(2x-4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x - (2-x)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}\right] = 0$

$y = 2 - x$ est une asymptote oblique en $-\infty$

4) $f'(x) = 2e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2x-4) - 1 = 2e^{\frac{x}{2}} + xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} - 1$

$f'(x) = xe^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}}\left(x - \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}}\right) \Rightarrow f'(x) = \left(x - e^{\frac{-x}{2}}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}} = g(x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$

$e^{\frac{x}{2}} \succ 0$ donc le singe de f' est celui de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f(\alpha)=(\alpha-2)\left(e^{\frac{\alpha}{2}}-1\right)$ or

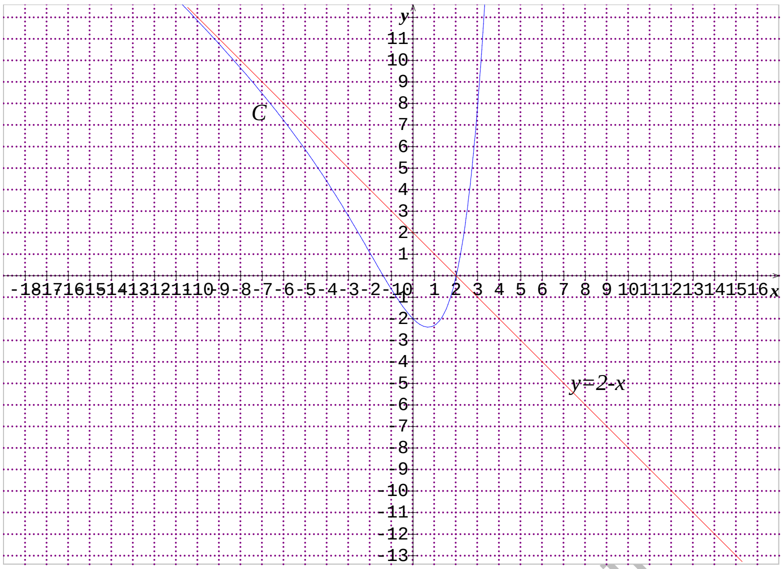
$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha-e^{-\frac{\alpha}{2}}=0 \Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}}=\alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}}}=\alpha \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\alpha}$$

donc $f(\alpha)=(\alpha-2)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)=\frac{2\alpha}{\alpha}-\alpha-\frac{4}{\alpha}+2 \Rightarrow f(\alpha)=2-\alpha-\frac{4}{\alpha}+2=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$

d) $C_f \cap (ox) \Leftrightarrow f(x)=0 \Rightarrow (x-2)\left(2e^{\frac{x}{2}}-1\right)=0 \Rightarrow x-2=0$ ou $2e^{\frac{x}{2}}-1=0$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x=2\ln\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=-2\ln 2}$$

$C_f \cap (oy);\ f(0)=(0-2)\left(2\times e^{0}-1\right)=(-2)(2-1)=-2$



Exercice 5 :

1) $g(x)=2-(x+1)e^{-x}$

$D_g=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2-(x+1)e^{-x}\right]=2-(-\infty)(+\infty)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2-(x+1)e^{-x}\right]=\left[2-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right]=2-0-0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=2$$

$g'(x)=-[e^{-x}-e^{-x}(x+1)]=-[e^{-x}(1-x-1)]=xe^{-x}$ Comme $e^{-x}>0$ le signe de g' est celui de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

b) $g(x) \geq 1 \Rightarrow g(x) \succ 0$ (positif)

2) $f(x) = (x+2)e^{-x} + 2x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 2x \right] = +\infty$$

b)

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) + 2 = e^{-x}(1-x-2) \Rightarrow f'(x) = 2(x+1)e^{-x} = g(x) \Rightarrow f'(x) = g(x)$$

f’ et g ont le même signe

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

d) l’équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (car f réalise une bijection (continue et $\nearrow$) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) donc C_f coupe (ox) en un seul point $(\alpha, 0)$

$$\begin{cases} f(-1{,}29) \prec 0 \\ f(-1{,}28) \succ 0 \end{cases} \Rightarrow -1{,}29 \prec \alpha \prec -1{,}28$$

3) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+2)e^{-x} + 2x - 2x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right] = 0$

Alors la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)e^{-x}+2x}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+2}{x}e^{-x}+\frac{2x}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}e^{-x}+2\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}+2\right] = +\infty$$

branche parabolique de direction (OY) en $-\infty$

b) $f(x)-2x=(x+2)e^{-x}, e^{-x} \succ 0$; $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-2x=(x+2)e^{x}$	$-$	0	$+$
PR	Δ/C	$(-2,-4)$	C/Δ

c).la tangente parallèle à Δ : y=2x

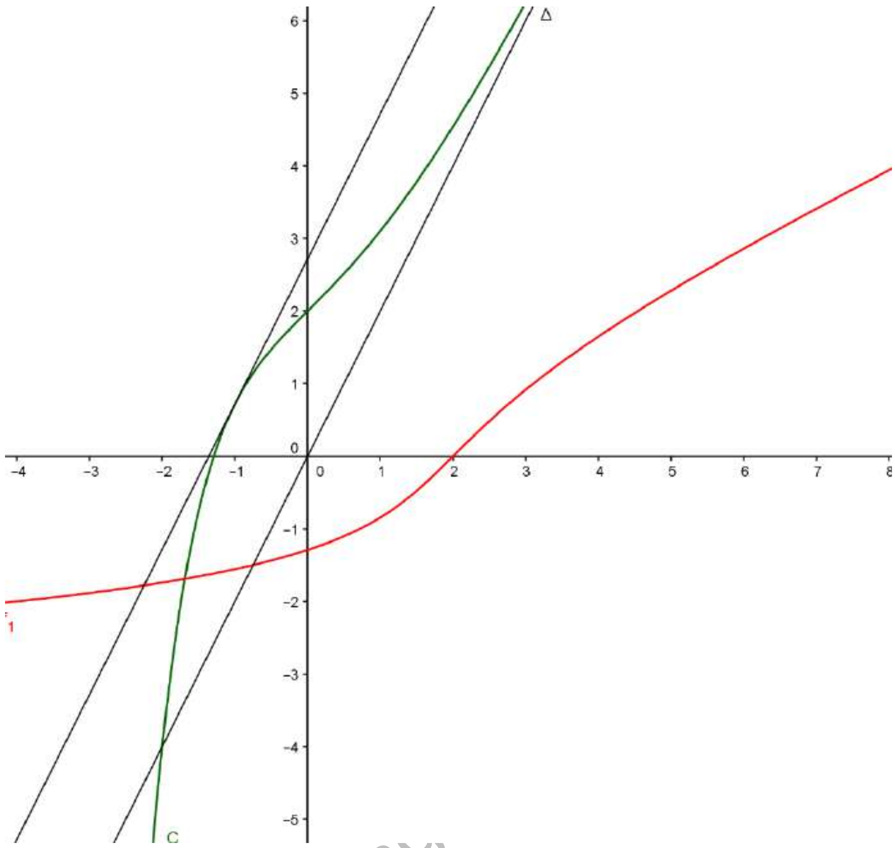
$$y=2x \Rightarrow f'(x)=2 \Rightarrow 2-(x+1)e^{-x}=2 \Rightarrow -(x+1)e^{-x}=0 \Rightarrow -(x+1)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

le point est $A\left(-1, f(-1)\right)$ $f(-1)=e-2 \simeq 0,7$

l'équation est

$$y = f(-1)(x+1)+f(-1) = 2(x-1)+e-2 \Rightarrow T: y=2x+2+e-2 \Rightarrow T: y=2x+e$$

4) a)



b) $me^{x} - x - 2 = 0 \Leftrightarrow me^{x} = x + 2 \Rightarrow m = \left(x+2\right)e^{-x} = f(x) - 2x \Rightarrow f(x) = 2x + m$

soient les droites $\Delta_m : y = 2x + m$

$\Delta : y = 2x$ Asymptote

$T : y = 2x + 2$ Tangente

On remarque $\Delta_m // \Delta // T$ donc on a

- Si $m \leq 0 \rightarrow$ 1 solution
- Si $0 \prec m \prec e \rightarrow$ 2 solutions

- Si $m = e \to 1$ solution
- Si $m \succ e \to 0$ solution

c) f est bijective (continue et strictement croissante) donc f admet une fonction réciproque de

$\mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$ vers $\mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$

$$\left(f^{-1}\right)'(e-2) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(e-2)\right]} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$$

5)a) $I = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$; $\begin{cases} u(x)=x+2 \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$$I = [-(x+2)e^{-x}]_0^1$$

$$-\int_0^1 -e^{-x}dx = -[3e^{-1} - 2] + \int_0^1 e^{-x}dx = -3e^{-1} + 2 + [-e^{-x}]_0^1$$

$$=> I = -4e^{-1} + 3$$

b) $A : \begin{cases} C_f, D \\ x=0; x=1 \end{cases}$

$$A = \int_0^1 [f(x) - y_D]dx \times 2^2 cm^2 = \int_0^1 \left(\left(x+2\right)e^{-x} + 2x - 2x\right)dx \times 4cm^2 = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx \times 4cm^2 = \left(-4e^{-1} + 3\right) \times 4cm^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A = (-16e^{-1} + 12)cm^2}$$

Exercice 6 :

$f(x) = 1 - x^2 - \ln x; D_f = \left]0, +\infty\right[$

A) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 + x^2 - \ln x\right] = 1 - 0 - (-\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 + x^2 - \ln x\right] = 1 - (+\infty) - (+\infty) = -\infty$

$f'(x) = -2x - \dfrac{1}{x} = -\left(2x + \dfrac{1}{x}\right) \prec 0 \forall x \in \left]0, -\infty\right[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||		$-$		
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Signe de *f*:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	

B) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} - x$; $D_g = \left]0, +\infty\right[$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} - 0 = -\infty$ $\boxed{x = 0; AV}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - x\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x}{x^2}-1\Rightarrow g'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$$; $x^2\succ 0$ le signe de g' est celui de f donc

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	+	0	-	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

2) a) $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}-x+x\right]=0$

Donc la droite D d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique de C_g

b) $g(x)-y_D=\frac{\ln x}{x}-x-(-x)=\frac{\ln x}{x}=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-y_D=\frac{lnx}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
PR	‖	D/C	0	C/D	

3) a)

$tg//D: y=-x\Rightarrow g'(x)=-1\Rightarrow \frac{1-x^2-\ln x}{x^2}=-1\Rightarrow 1-x^2-\ln x=-x^2\Rightarrow 1-\ln x=0$

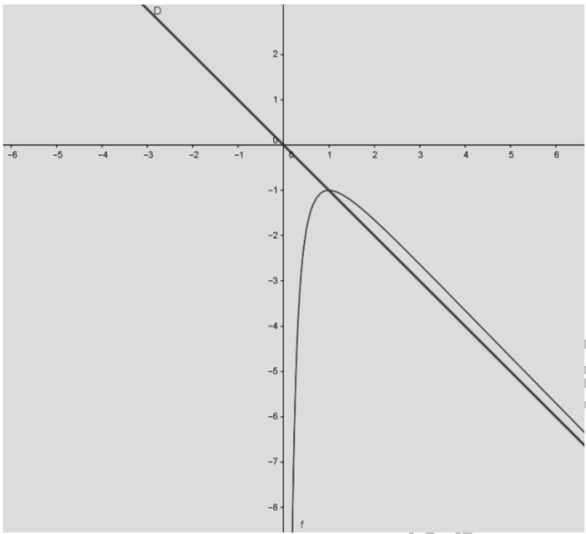
$\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$

Le pt est $A(e,f(e))$

$g(e)=\frac{\ln e}{e}-e=\frac{1}{e}-e$

b) $T : y = g'(e)(x-e) + g(e) = -1(x-e) + \frac{1}{e} - e = -x + e + \frac{1}{e} - e$

$\Rightarrow \boxed{T : y = -x + \frac{1}{e}}$



Exercice 7 :

$f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$; $D_f = \mathbb{R}$

1) $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \prec 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln 1 = 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

2) a) $f(x)=\ln(1+e^{-x})=\ln e^{-x}+\ln\left(\dfrac{1}{e^{-x}}+1\right)=-x+\ln(e^{x}+1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{x}+1)=\ln(0+1)=\ln 1=0$

Donc la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote oblique de C_f en $-\infty$

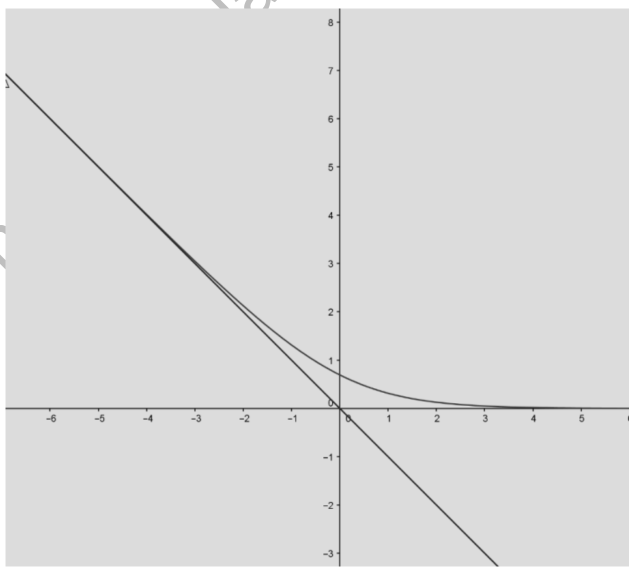
Position relative :

$f(x)-y_{\Delta}=-x+\ln\left(e^{x}+1\right)-(-x)=-x+\ln\left(e^{x}+1\right)+x=\ln\left(e^{x}+1\right)\succ 0$

Cas $e^{x}\succ 0\Rightarrow e^{x}+1\succ 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_D=ln(e^x+1)$	$+$
$f(x)$	C/Δ

c)



Exercice 8 :

A : $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\underbrace{e^{2x}}_{0}-\underbrace{2xe^{2x}}_{0}\right]=1$

2) $D_g=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1-(+\infty)-(+\infty)(+\infty)=-\infty$

$g'(x)=-2e^{2x}-\left(2e^{2x}+2e^{2x}\cdot 2x\right)=-2e^{2x}-2e^{2x}-4xe^{2x}=-4e^{2x}-4xe^{2x}\Rightarrow \boxed{g'(x)=\left(-4x-4\right)e^{2x}}$

$g'(x)=0\Rightarrow -4x-4=0\Rightarrow -4x=4\Rightarrow x=\dfrac{+4}{-4}=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0)=1-e^{0}-0e^{0}=1-1=0$

D'après tv

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3) a) $F'(x)=-xe^{2x}$; $ae^{2x}+2e^{2x}(ax+b)=-xe^{2x}\Rightarrow\left(2ax+a+2b\right)e^{2x}=-xe^{2x}$

Par identification : $\begin{cases} 2a=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1}{2} \\ b=\dfrac{-a}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(x)=\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)e^{2x}}$

b) $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=1-e^{2x}+2\left(\underbrace{-xe^{2x}}_{F'(x)}\right) \Rightarrow G(x)=x-\dfrac{1}{2}e^{2x}+2F(x)+c$

$\Rightarrow G(x)=x-\dfrac{1}{2}e^{2x}+2\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)e^{2x}+c=x-\dfrac{1}{2}e^{2x}-xe^{2x}+\dfrac{1}{2}e^{2x}+c \Rightarrow \boxed{G(x)=x-xe^{2x}+c}$

$G(0)=3 \Rightarrow 0+0e^{0}+c=3 \Rightarrow c=3$

B : $f(x)=x+3-xe^{2x} ; D_f=\left]-\infty,+\infty\right[$

1)

- ❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+3-xe^{2x}\right]=(-\infty)-(0)=-\infty$

- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\dfrac{3}{x}-e^{2x}\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

$f'(x)=1-\left(e^{2x}+2e^{2x}\cdot x\right)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$

Donc f' et g ont le même signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-xe^{2x}\right]=0$;

donc $D: y=x+3$ est une asymptote oblique de C_f en $-\infty$

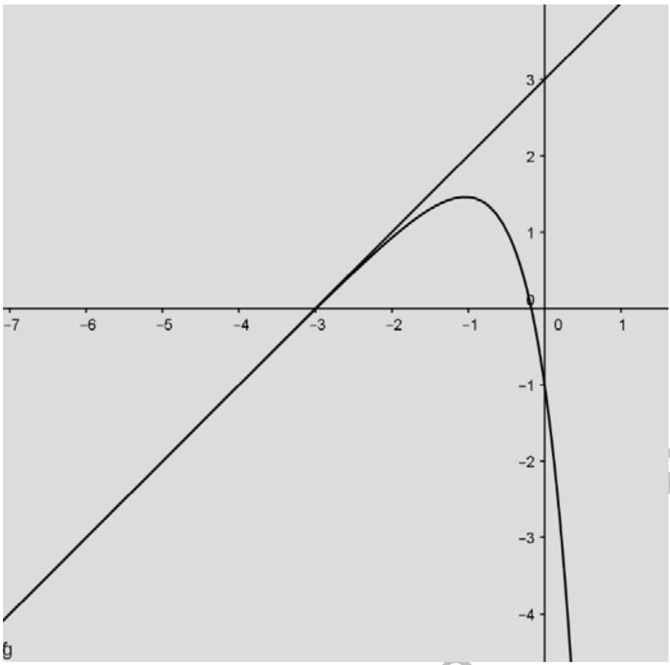
Position relative

$f(x)-y=-xe^{x}$, $e^{x}\succ 0$; $-x=0; x=0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$ 0 $-$
PR	C/D 3 D/C

3) a) l'équation $f(x)=0$ admet 2 solutions (f change de signe deux fois) donc C_f coupe (ox) en deux points.

$\left.\begin{matrix} f(0,7)\succ 0 \\ f(0,8)\prec 0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 0,7\prec J\prec 0,8$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{3}{x}-e^{2x}\right]=-\infty$ $BI(oy)$ en $+\infty$



Exercice 9 :

A : $g(x) = x^3 + \ln x - 1$; $D_f =]0, +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 + (-\infty) - 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x} \succ 0$; $\forall x \in]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

2) $g(1) = 1 + 0 - 1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

B : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2 - \dfrac{\ln x}{x}$;

1)

- ❖ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 2 - \left(\dfrac{-\infty}{0^+}\right) = +\infty$

- ❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{2} - 2 - \dfrac{\ln x}{x}\right] = +\infty$

2)

$$f'(x) = x - 0 - \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right) = x - \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} ; x^2 \succ 0$$ donc f' et g

ont le même signe.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3)

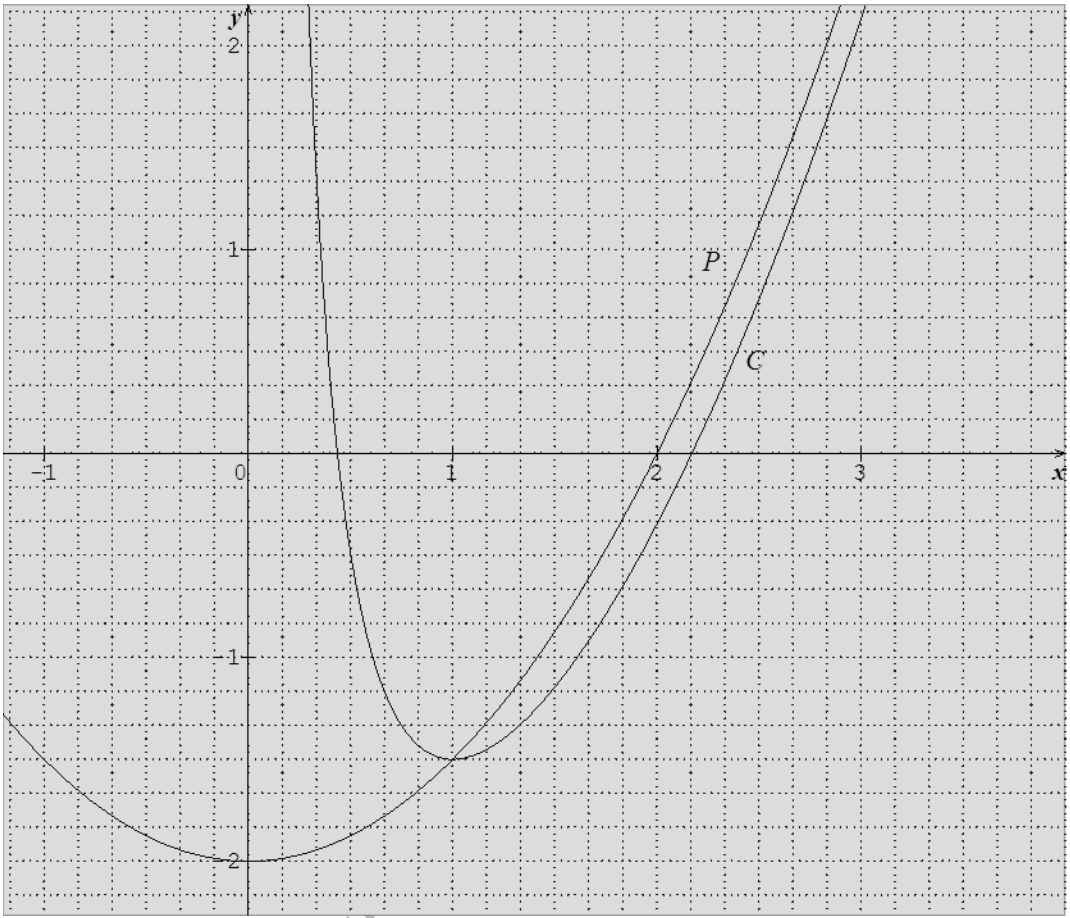
a) $f(x) - y = \frac{x^2}{2} - 2 - \frac{\ln x}{x} - \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) = -\frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
f(x)-y_p $= -\frac{lnx}{x}$		+	0	-	
PR		C/P	$(1 ; \frac{-3}{2})$	P/C	

b) $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ donc P est asymptote de C $f(2) = -\frac{ln 2}{2} \approx$

-0.34

4)



Solutions des exercices sur l'Intégrale

Exercice 1 :

1)

$$f(x)=\frac{x+1}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{ax+2a+b}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=1\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

$$f(x)=1-\frac{1}{x+2}$$

$$I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(1-\frac{1}{x+2})dx=[x+\ln(x+2)]_1^2=2-\ln 4-1-\ln 3$$

$$I=1+\ln(\frac{3}{4})$$

Exercice 2 :

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-3}=ax+b+\frac{c}{x-3}=\frac{ax^2+(-3a+b)x-3b+c}{x-3}$$

$$f(x)=\frac{ax+2a+b}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\-3a+b=1\Rightarrow b=4\\-3b+c=1\Rightarrow c=13\end{cases}$$

$$f(x)=x+4+\frac{13}{x-3}$$

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x+4+\frac{13}{x-3})dx=[\frac{1}{2}x^2+4x+13\ln|x-3|]_0^1=\frac{1}{2}+4+13\ln 2-13\ln 3$$

$$I=\frac{9}{2}+13\ln(\frac{2}{3})$$

Exercice 3 :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+4}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-4}=\frac{a(x-4)+b(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

$$f(x)=\frac{(a+b)x-4a-b}{x^2-5x+4}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\-4a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$$

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x-4}\right)dx=[-\ln(x-1)+3\ln|x-4|]_2^3=-3\ln 2$$

$$I=-3\ln 2$$

Exercice 4 :

$$f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{ax-a+b}{(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\-a+b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$I=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_1^0\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=[\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}]_{-1}^0=-\frac{1}{2}-\ln 2$$

$$I=-\frac{1}{2}-\ln 2$$

Exercice 5 :

Intégration par parties

$$I = \int_{e}^{2e} x^3 \ln x dx$$

$$posons \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$$

$$I = [\frac{1}{4}x^4 \ln x]_e^{2e} - \int_{e}^{2e} \frac{1}{4}x^3 dx = [\frac{1}{4}x^4 \ln x]_e^{2e} - \frac{1}{4}[\frac{1}{4}x^4]_e^{2e}$$

$$I = 4e^4 \ln 2 + \frac{45}{16}e^4$$

Exercice 6 :

$$I = \int_{0}^{1} xe^x dx$$

$$posons \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_{0}^{1} e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - 0 - (e-1) = 1$$

$$I = 1$$

Exercice 7 :

$$I=\int_0^{\pi}(x+2)\sin x dx$$

$$posons\begin{cases}u(x)=x+2\\ v'(x)=\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-\cos x\end{cases}$$

$$I=[-(x+2)\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=[-(x+2)\cos x]_0^{\pi}+[\sin x]_0^{\pi}=\pi+4$$

$$I=\pi+4$$

Exercice 8 :

1)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 x dx$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\cos^2 x+x^2\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2 dx$$

$$I+J=[\frac{1}{3}x^3]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

$$I+J=\frac{\pi^3}{24}$$

2)

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\cos^2 x-x^2\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx$$

$$posons\begin{cases} u(x)=x^2 \\ v'(x)=\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=2x \\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$I-J=[\frac{1}{2}x^2\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$posons\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$I-J=[-\frac{1}{2}x\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cos 2x dx=[-\frac{1}{2}x\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}+[-\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I-J=\frac{\pi}{4}$$

3)

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi^3}{24}(1) \\ I-J=\frac{\pi}{4}(2) \end{cases}$$

$$(1)+(2)\Leftarrow 2I=\frac{\pi^3+6\pi}{24}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi^3+6\pi}{48}$$

$$(1)-(2)\Rightarrow 2J=\frac{\pi^3-6\pi}{24}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\pi^3-6\pi}{48}$$

Exercice 9 :

1)

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x}); I(a) = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$1) e^{x} > 0 \Rightarrow 1+e^{x} > 0 \Rightarrow \ln(1+e^{x}) > 0$$

$$e^{-x} > 0 \Rightarrow e^{-x}\ln(1+e^{x}) > 0$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow \int_{0}^{a} f(x)dx > 0 \Rightarrow I(a) > 0$$

2) a)

$$\frac{e^{x}}{1+e^{x}} = c + \frac{d}{1+e^{x}} = \frac{ce^{x}+c+d}{1+e^{x}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c+d = 0 \Rightarrow d = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = 1 - \frac{1}{1+e^{x}}$$

Par intégration

$$\int_{0}^{a} \frac{e^{x}}{1+e^{x}} dx = \int_{0}^{a} (1 - \frac{1}{1+e^{x}}) dx$$

$$= [x]_{0}^{a} - [\ln(1+e^{x})]_{0}^{a} = a - 0 - \ln(1+e^{a}) + \ln(2)$$

$$= a + \ln(\frac{a}{1+e^{a}})$$

$$b) f'(x) = -e^{x}\ln(1+e^{x}) + \frac{e^{x}}{1+e^{x}}.e^{x} = -e^{x}\ln(1+e^{x}) + \frac{e^{0}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x) = -e^{x}\ln(1+e^{x}) + \frac{1}{1+e^{x}}.$$

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$$

c) on a $f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$

$$f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+e^x}-f'(x)$$

$$\int_1^a f(x)dx=\int_1^a \frac{1}{1+e^x}dx-\int_1^a f'(x)dx$$

$$I(a)=a+\ln(\frac{1}{1+e^a})-[f(x)]_0^a$$

$$I(a)=a+\ln(\frac{1}{1+e^a})-f(a)+f(0)$$

$$=a+\ln(\frac{1}{1+e^a})-e^{-a}\ln(1+e^a)+\ln 2$$

$$I(a)=a+\ln(\frac{4}{1+e^a})-e^{-a}\ln(1+e^a)$$

Exercice 10 :

$$u_n=\int_{n-1}^{n} e^{-\frac{1}{2}x}dx, n\in\mathbb{N}^*$$

$$1)u_n=[-2e^{-\frac{1}{2}x}]_{n-1}^{n}=-2e^{-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}-(-2e^{-\frac{1}{2}(n-1)})$$

$$\Rightarrow u_n=(2e^{\frac{1}{2}}-2)e^{-\frac{1}{2}n}$$

(u_n)est une suite géométrique de raison $q=e^{-\frac{1}{2}}$ et de 1er terme $u_1=2-2e^{-\frac{1}{2}}$

3)

$$S_n = u_1 + u_2 + ...u_n$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} dx + \int_1^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx + ... + \int_{n-1}^{n} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

4)

$$S_n = [-2e^{-\frac{1}{2}x}]_0^n = -2e^{-\frac{1}{2}n} + 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (-2e^{-\frac{1}{2}n} + 2) = 2$$

Chapitre 6:

Les suites numériques

Résumé

Définition : une suite est une fonction de N vers R , elle est notée $(U_n),(V_n)$...

Il y a deux manières de définir une suite :

-Par son terme général en fonction de n

Exemples:

$$U_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

-Par son 1erterme et une relation entre U_n et U_{n+1}

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

Définitions :

- La suite (u_n) est croissante $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (u_n) est majorée par $M \Leftrightarrow u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (u_n) est minorée par $m \Leftrightarrow m \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (u_n) est constante $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Etudier la monotonie (ou le sens de variation) de la suite (u_n) c'est connaitre si elle est croissante, décroissante ou constante.

Suite Arithmétique

Définition : (u_n) est une suite arithmétique $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$ où r est une valeur constante appelée raison.

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $u_n = u_0 + nr$ et si le premier terme est u_1 alors $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Si (a,b,c) forment une suite arithmétique alors on a : a+c=2b et c-b=b-a=r et b=a+r et c=b+r
- Si (u_n) est une suite arithmétique alors :
$$S_n = u_p + ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_n + u_p)$$

* Suite géométrique :

Définition : (u_n) est une suite géométrique de raison $q \Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n$

- Si (u_n) est une suite géométrique de Premier terme u_0 alors $u_n = q^n u_0$, si le premier terme est u_1 alors $u_n = u_1 q^{n-1}$
- Si (a,b,c) forment une suite géométrique alors on a : $a \times c = b^2$ et $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = q$ et $b = a \times q$ et $c = b \times q$
- Si (u_n) est une suite géométrique alors $S_n = u_p + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
- Sommes usuelles : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et
$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Convergence d'une suite :

Définition : La suite (u_n) est convergente vers $l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$

Si (u_n) n'est pas convergente on dit alors qu'elle est divergente

Théorèmes de convergence et de comparaisons

Si	Et	alors
(u_n) est croissante	Majorée	convergente
(u_n) est décroissante	Minorée	convergente
$v_n \le u_n \le w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
$\lvert u_n - l\rvert \le v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
$v_n \le u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$u_n \le v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

A retenir

- Si $-1 < a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
- Si $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
- Si $(u_n) \nearrow \Rightarrow u_0 \le u_n$
- Si $(u_n) \searrow \Rightarrow u_n \le u_0$

- Si $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} (u_n)\nearrow \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \\ (u_n)\searrow \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \end{cases}$
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow l = f(l)$
- Deux suites sont adjacentes Ssi elles convergent vers la même limite et elles sont de monotonie différente.

Démonstration par récurrence

Soit $p(n)$ une propriété définie sur les entiers naturels, pour montrer par récurrence que $p(n)$ est vraie on suit les trois étapes suivantes

1. On vérifie qu'elle est vraie pour le 1er élément (n=0,n=1)
2. On suppose qu'elle est vraie pour n
3. On démontre qu'elle est vraie pour n+1

   Alors elle est vraie quel que soit n

Exercices

Exercice 1 :

Parmi les réponses proposées pour chaque question une seule réponse est exacte

$N°$	Question	A	B	C
1	(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 = 1$ et $u_7 = 3$ sa raison r est	$r = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{5}$	$r = 5$
2	(u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 1024$ et telle que $u_0 + \dots\dots\dots\dots + u_{10} = 2047$	$q = 2$	$q = \frac{1}{2}$	$q = 11$
3	Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et (u_n) une suite définie par $\forall n \succ 0$ $u_n = f(\frac{1}{n})$ alors la suite (u_n) est	Croissante	décroissante	Non monotone
4	Si f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) est une suite définie par $u_0 = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors la suite (u_n) est	décroissante	croissante	Non monotone

Exercice 2 :

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis justifier que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$
   a) Montrer que (v_n) est une $S.A$
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Exercice 3 :

Soit $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{-3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. On pose $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{2u_n}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n + \frac{n-1}{2n}$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4
2. On définit la suite (v_n) pour tout entier $n \geq 1$par $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Calculer la limite de (v_n)

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que (u_n) est positive
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. que peut-on déduire ?
4. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
   b) Exprimer v_n en fonction de n en déduire u_n en fonction de n
   c) Calculer en fonction de n $s_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n}$

Exercice 6 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n > 0$ par :

$$u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{2n}{5(n+1)} u_n + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)}$$

1. Calculer u_2 et vérifier que $u_3 = \frac{292}{75}$
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4
3. Déterminer le sens de variation de (u_n) et démontrer qu'elle converge puis déterminer sa limite l .
4. Pour tout $n > 0$ on pose $v_n = (4 - u_n)n$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; écrire v_n en fonction de n .
   b) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et calculer $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$
   c) Calculer $u_1 + 2u_2 + 3u_3 \ldots + nu_n$

Exercice 7 :

La suite (u_n) $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par :

$$u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n < 3$

1. Justifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$
2. Etudier ainsi la monotonie de (u_n) , montrer que (u_n) est convergente.

on pose $v_n = n(3 - u_n)$ ou $n \in \mathbb{N}^*$

3. Prouver que (v_n) est une suite géométrique
4. Calculer v_n en fonction de n
5. En déduire le terme général de (u_n) , calculer ainsi la limite de (u_n) .

Exercice 8 :

(u_n) est la suite définie par :

$$u_0=\frac{2}{3}, u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Calculer u_1, u_2
2. (v_n) est la suite définie par : $v_n=u_n\sqrt{2}-n$,

   montrer que (v_n) est suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, la suite (u_n) est-t-elle convergente ?
4. Calculer en fonction de n la somme : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$

Exercice 9 :

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $w_n=v_n-u_n$

   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

   b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser sa limite
3. Etudier les sens de variations de deux suites (u_n) et (v_n)puis démontrer que (u_n) et(v_n) sont adjacentes
4. a) Démontrer que la suite (t_n) définie par : $t_n=\frac{u_n+2v_n}{3}$ est une suite constante

b) Calculer la valeur de t_0 puis en déduire la limite commune de (u_n) et (v_n).

Exercice 10 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3

   b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. a) Démontrer que pour tout $n \geq 3$ on a $u_n \geq 0$

   b) En déduire que pour tout $n \geq 4$ on a $u_n \geq n - 2$

   c) En déduire la limite de la suite (u_n)

3. On définit la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n. On a : $u_n = 7(\frac{1}{2})^n + 2n - 6$

   c) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) est une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison

   d) En déduire l'expression de la somme :
   $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n

Solutions

Exercice1 :

Question	1	2	3	4
Réponse	A	B	B	C

Exercice 2 :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1) Calculons u_1, u_2 et u_3

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = \dfrac{3}{7}$
- $u_3 = \dfrac{3}{10}$

Vérification que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

$u_3 - u_2 = \dfrac{3}{10} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{-9}{70}$

$u_2 - u_1 = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-9}{28}$

$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc

(u_n) n'est pas arithmétique $\quad \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{7}$

$\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

a) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n-1}{u_n} = 1$$

$v_{n+1} - v_n = 1$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b) Calcul de v_n en fonction de n

$v_n = v_0 + nr$

$v_n = \dfrac{1}{3} + n \times 1$

$\boxed{v_n = \dfrac{1}{3} + n}$

Calcul de u_n en fonction de n , $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n}$ en remplaçant v_n par sa valeur $u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + n} = \dfrac{1}{\frac{3n+1}{3}} = \dfrac{3}{3n+1}$

Exercice 3 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{-3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

1) Calculons de u_1, u_2 et u_3

- $u_1 = \dfrac{-3u_0 - 1}{2u_0} = \dfrac{-3\times 1 - 1}{2\times 1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

- $u_2 = \dfrac{-3u_1 - 1}{2u_1} = \dfrac{-3\times(-2) - 1}{2(-2)} = \dfrac{5}{-4} = \dfrac{-5}{4}$

- $u_3 = \dfrac{-3u_2 - 1}{2u_2} = \dfrac{-3\times(\frac{-5}{4}) - 1}{2(\frac{-5}{4})} = \dfrac{\frac{15}{4} - 1}{\frac{-5}{4}} = \dfrac{-11}{10}$

2) On pose $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$

a) Montrons que (u_n) est une suite géométrique

$$v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{2u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(\frac{-3u_n - 1}{2u_n})}{\frac{-3u_n - 1}{2u_n} + 1} = \frac{\frac{-3u_n - 1}{u_n} + \frac{u_n}{u_n}}{\frac{-3u_n - 1}{2u_n} + \frac{2u_n}{2u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{-2u_n - 1}{u_n}}{\frac{-u_n - 1}{2u_n}} = \frac{-2u_n - 1}{u_n} \times \frac{2u_n}{-u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \times 2 = 2v_n$$

Donc (v_n) est une $S.G$ de raison $q = 2$

b) Calculons v_n puis une en fonction de n

$$v_n = v_0 q^n ; v_0 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 1}$$

$$= \frac{2(1)+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{3}{2}(2)^n}$$

On a $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = 2u_n + 1$

$$v_n u_n + v_n = 2u_n + 1$$

$$v_n u_n - 2u_n = 1 - v_n$$

$$u_n(v_n - 2) = 1 - v_n$$

$$u_n = \frac{1 - v_n}{v_n - 2}$$

On remplace v_n par sa valeur

$$\boxed{u_n = \frac{1 - \frac{3}{2}(2)^n}{\frac{3}{2}(2)^n - 2}}$$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n + \dfrac{n-1}{2n} \end{cases}$$

1) a) Calculons u_2, u_3 et u_4

$$u_2 = \frac{2}{2\times 1} u_1 + \frac{1-1}{2\times 1}$$

$$u_2 = u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} u_2 + \frac{2-1}{2\times 2}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$$

$$\boxed{u_3 = \frac{5}{8}}$$

$n = 3$

$$u_4 = \frac{4}{8} u_3 + \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3}$$

$$u_4 = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$$

$$\boxed{u_4 = \frac{3}{4}}$$

2)a)

$$v_n = \frac{u_n - 1}{n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n + \frac{n-1}{2n} - 1}{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n - \frac{(n+1)}{2n}}{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \bullet \frac{(u_n - 1)}{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{u_n - 1}{n})$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n,$$

Donc (v_n) est une $S.G$ de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Calculons v_n et u_n en fonction de n

$$v_n = v_1 q^{n-1}, v_1 = \frac{u_1 - 1}{1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1} = -\frac{1}{2}, \text{ donc } \; v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{n} \Rightarrow nv_n = u_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n = nv_n + 1 \Rightarrow \boxed{u_n = -n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$$

Exercice 5 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$$

1) Calculons

u_1, u_2

$$u_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}+1} = \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{3u_1+1} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{3\left(\frac{1}{6}\right)+1} = \frac{1}{9}$$

2) Montrons que $v_n \geq 0$

Initialisation $u_0 = \frac{1}{3} \geq 0$

Vérifier pour $n = 0$

- On suppose que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$ $v_n \geq 0$

$u_n \succ 0 \Rightarrow 3u_n + 1 \succ 0$

D'où $\frac{u_n}{3u_n+1} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq 0$

Donc (u_n) est positive

3) Montrons que (u_n) est décroissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3u_n+1} - \frac{u_n}{1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3u_n{}^2 - u_n}{3u_n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3u_n{}^2}{3u_n+1} \leq 0$$

$$\begin{cases} 3u_n+1 \succ 0 \\ -3u_n{}^2 \prec 0 \end{cases}$$

D'où (u_n) est décroissante comme (u_n) est décroissante et minorée par 0 (positive)

Donc on peut déduire que (u_n) est convergente

4) a) On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ et montrons que (v_n) est une $S.A$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{3u_{n+1}}} = \frac{3u_n+1}{u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 3$$

$$v_{n+1} = v_n + 3 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 3$$

D'où (v_n) est une $S.A$ de raison $r = 3$

b) v_n en fonction de n

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 3 \quad \begin{matrix} v_n = v_0 + nr \\ v_n = 3 + n3 \end{matrix}$$

$$\boxed{v_n = 3n+3}\ , u_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{3n+3}$$

Calculons la somme $s_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + ...+ \frac{1}{u_n}$ donc

$s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ (somme de $n + 1$ termes d'une S.A)

$$s_n = \frac{(n-0+1)(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(3n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Exercice 6 :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2n}{5(n+1)} u_n + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)} \end{cases}$$

- Calculons u_2

$$u_2 = \frac{2}{5\times 2} u_1 + \frac{4(3\times 1+5)}{5(1+1)}$$

$$u_2 = \frac{1}{5}\times 2 + \frac{4\times 8}{10}, u_2 = \frac{2}{5} + \frac{16}{5}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{18}{5}}$$

- Calculer u_3

$$u_3 = \frac{4}{15}u_2 + \frac{4\times 11}{5\times 3}$$

$$u_3 = \frac{4}{15}\times\frac{18}{5} + \frac{44}{15} = \frac{72}{75} + \frac{220}{75} \quad \boxed{u_3 = \frac{292}{75}}$$

2) Montrons par récurrence que

$u_n \leq 4$ (majorée par 4)

Initialisation

- $u_1 = 2 < 4$
- On suppose que $u_n < 4$ montrons que $u_{n+1} < 4$

  D'après l'hypothèse

$$u_n \leq 4 \Rightarrow \frac{2n}{5(n+1)}u_n \leq 4\left(\frac{2n}{5(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{5(n+1)}u_n \leq \frac{8n}{5(n+1)}$$

On ajoute $\frac{4(3n+5)}{5(n+1)}$ aux deux membres

$$\Rightarrow \frac{2n}{5(n+1)}u_n + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)} \leq \frac{8n}{5(n+1)} + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{8n+12n+20}{5(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{20n+20}{5(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{4(5(n+1))}{5(n+1)}, \boxed{u_{n+1} \leq 4}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n \leq 4$

D'où (u_n) est majorée par 4

3) Sens de variation de (u_n) et sa limite

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n}{5(n+1)} u_n + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)} - u_n$$

$$= \left(\frac{2n}{5(n+1)} - 1 \right) u_n + \frac{4(3n+5)}{5(n+1)}$$

$$= \frac{2n - 5n - 5}{5(n+1)} u_n + 4\left(\frac{3n+5}{5(n+1)} \right)$$

$$= \frac{-3n-5}{5(n+1)} u_n + 4\left(\frac{3n+5}{5(n+1)} \right)$$

$$u_n - u_n = \frac{3n+5}{5(n+1)} (4 - u_n)$$

$u_n \leq 4 \Rightarrow 4 - u_n \geq 0$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc (u_n) est croissante

Convergence de (u_n)

On a (u_n) croissante et majorée donc elle est convergente

La limite de (u_n)

On a $u_{n+1} = \frac{2n}{5n+5}u_n + \frac{12n+20}{5n+5}$ on prend la limite des deux membres et en posant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$,alors $l = \frac{2}{5}l + \frac{12}{5}$ $l = \frac{2}{5}l + \frac{12}{5} \Rightarrow l - \frac{2}{5}l = \frac{12}{5} \Rightarrow \left(1-\frac{2}{5}\right)l = \frac{12}{5}$

$\frac{3}{5}l = \frac{12}{5} \Rightarrow 3l = 12 \Rightarrow \boxed{l=4}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

4) on pose $v_n = (4-u_n)n$

a) Montrons que (v_n) est une $S.G$:

$v_{n+1} = \left(4-u_{n+1}\right)(n+1)$

$$4-u_{n+1} = 4 - \frac{2n}{5(n+1)}u_n - \frac{4(3n+5)}{5(n+1)}$$

$$\Rightarrow 4-u_{n+1} = 4\left(1-\frac{3n+1}{5(n+1)}\right) - \frac{2n}{5(n+1)}u_n \Rightarrow 4-u_{n+1} = \frac{4(2n)}{5(n+1)} - \frac{2n}{5(n+1)}u_n$$

$$\Rightarrow 4-u_{n+1} = \frac{2n}{5}\frac{(4-u_n)}{n+1} \Rightarrow (n+1)\left(4-u_{n+1}\right) = \frac{2}{5}n(4-u_n) \boxed{\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

- v_n en fonction$n$, $v_n = v_1 q^{n-1}$; $v_1 = (4-u_1)\times 1 = (4-2)\times 1 = 2$

Donc $\boxed{v_n = 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$

b) on a $v_n = (4-u_n)\cdot n \Rightarrow 4-u_n = \frac{v_n}{n} \Rightarrow u_n = 4-\frac{v_n}{n} \Rightarrow u_n = 4-\frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4-0 = 4$

La somme $s_n = v_1 + v_2, \dots, +v_n$ (la somme d'une $S.G$)

$$s_n = v_1 \frac{1-(\frac{2}{5})^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{\frac{3}{5}} \quad \boxed{\Rightarrow s_n = \frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

$$s_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots\dots\dots\dots + nu_n$$

On a $nu_n = 4n - v_n$

$1u_1 = 4\times 1 - v_1$

$2u_2 = 4\times 2 - v_2$

$3u_3 = 4\times 3 - v_3$

.

.

.

$nu_n = 4\times n - v_n$

$$s'_n = 4(1+2+3+\dots\dots\dots\dots+n) - s_n$$

$$s'_n = 4\frac{n(n+1)}{2} - \frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \quad \boxed{\Rightarrow s'_n = 2n(n+1) - \frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

Exercice 7 :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) \end{cases}$$

1) Montrons que $u_n < 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Vérification $u_1 = \dfrac{5}{2} < 3$ vrai pour $n = 1$
- On suppose que $u_n < 3$ et on montre que $u_{n+1} \prec 3$ d'après l'hypothèse $u_n \prec 3$

$$\Rightarrow 3 - u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{-n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 0 \Rightarrow 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 3$$

$$\boxed{u_{n+1} < 3}$$

$u_n < 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) montrons que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - u_n = 3 - u_n - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

$$= (3 - u_n)\left(1 - \frac{n}{2(n+1)}\right) = \left(3 - u_n\left(\frac{2(n+1) - n}{2(n+1)}\right)\right) = (3 - u_n)\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)}$$

3) la monotonie de (u_n)

comme $u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0 \Rightarrow \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n) > 0$

$u_{n+1} - u_n > 0$ D'où (u_n) est croissante.

La convergence de (u_n)

Comme (u_n) est croissante et majorée elle est alors convergente

4) on pose $v_n = n(3-u_n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ montrons que (v_n) est une $S.G$

$$v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1}) \Rightarrow v_{n+1} = (n+1)\left[\frac{n}{2(n+1)}(3-u_n)\right]$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{n}{2}(3-u_n) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}(n(3-u_n)) \boxed{\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

D'où (v_n) est une $S.G$ de raison $q = \frac{1}{2}$

5) v_n en fonction de n

$$v_n = v_1 q^{n-1}; v_1 = 1(3-u_1) \Rightarrow v_1 = 1\left(3-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \boxed{\Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

u_n en fonction de n

$$v_n = n(3-u_n) \Rightarrow 3-u_n = \frac{v_n}{n} \Rightarrow u_n = 3-\frac{v_n}{n}$$

$$\Rightarrow u_n = 3-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 3-0 = 3$$

Exercice 8 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1) Calculons u_1, u_2

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{0}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{6} + \sqrt{2}}$$

2) $v_n = u_n\sqrt{2} - n$ montrons que (v_n) est une suite géométrique

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}u_n + \frac{n}{2} + 1 - n - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n) - \frac{n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n - n) = \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

Donc (v_n) est une $S.G$ de raison $\boxed{q = \frac{1}{2}}$

Son premier terme $v_0 = u_0\sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}\times\frac{2}{3}; \boxed{v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

3) v_n en fonction de $n v_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{2})^n$

u_n en fonction de n

on a $v_n = \sqrt{2}u_n - n \Rightarrow u_n = \dfrac{n + v_n}{\sqrt{2}}$ $\boxed{u_n = \dfrac{n + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{2}}}$

La convergence de (u_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc (u_n) est divergente

4) calculons en fonction de n la somme $s_n = u_1 + u_2 +, \dots\dots\dots, + u_n$

4) On a $u_n = \dfrac{n + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} n + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2}} k + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

.

.

.

.

.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 +, \dots, + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(par addition)

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{s_n = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Exercice 9 :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2} \end{cases} ; \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculons u_1, u_2, v_1 et v_2

$$u_1 = \frac{u_0 - v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{2}}$$

$$v_1 = \frac{u_1 - v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{15}{4}}$$

$$u_2 = \frac{u_1 - v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{14}{4}+\frac{15}{4}}{2} \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{29}{8}}$$

On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - v_n}{2}$ en remplaçant u_{n+1} par sa valeur

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + 3v_n}{2}}{2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$v_2 = \frac{u_1 + 3v_1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4} \cdot 3}{4} \boxed{\Rightarrow v_2 = \frac{\frac{14}{4} + \frac{45}{4}}{4} = \frac{59}{16}}$$

2) a)

$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + 2v_n}{4} \Rightarrow w_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

Donc (w_n) est une $S.G$ de raison $q = \frac{1}{4}$

b) w_n en fonction de n $w_n = w_0 q^n$

$$w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow w_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

3) Les variations de (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - v_n}{2} - \frac{u_n}{1} = \frac{v_n - u_n}{2}$$

$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$ et comme $v_n \geq u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

D'où (u_n) est croissante $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{v_n}{1}$

$= \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}\ \frac{3}{4} \cdot (u_n - v_n) < 0$; $u_n \leq v_n$

D'où (u_n) est décroissante on a $u_0 \le u_n < v_n < v_0$; $3 \le u_n < v_n < 4$

(u_n) est croissante et majorée d'où (u_n) est convergente,

(v_n) est décroissante et minorée Donc elle est convergente

On a $w_n = v_n - u_n$; $\left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - u_n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et ont la même limite donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes

4) a) $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

Montrons que (t_n) est une suite constante

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right)}{3} \Rightarrow t_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + 3v_n}{2}}{3}$$

$t_{n+1} = t_n$,donc (t_n) est une suite constante

$$t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3+8}{3} \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{11}{3}}$$

Donc $t_n = \frac{11}{3}$

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{11}{3} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n => \frac{l+2l}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{l = \frac{11}{3}}$

Exercice 10 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1) Calcul des termes

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1$$
$$u_1 = \frac{-1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1$$
$$u_2 = \frac{-1}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1$$
$$u_3 = \frac{7}{8}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$$

Comme $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ alors (u_n) n'est pas arithmétique

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{-1}{2}$

Comme $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ alors (u_n) n'est pas géométrique

2) Montrons par récurrence que $u_n \geq 0, \forall n \geq 3$

Vérification : $u_3 = \dfrac{7}{8} \geq 0$

On suppose que $u_n \geq 0, \forall n \geq 3$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$

$u_n \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}u_n \geq 0$
$n \geq 3 \Rightarrow n-1 \geq 0$

par addition on a : $\dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \geq 0$
$\Rightarrow u_{n+1} \geq 0$

Conclusion : $u_n \geq 0, \forall n \geq 3$

b) On a :
$n \geq 4 \Rightarrow n-1 \geq 3 \Rightarrow u_{n-1} \geq 0$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}u_{n-1} \geq 0$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geq n - 2$
$\Rightarrow u_n \geq n - 2$

c) On a $\begin{cases} u_n \geq n-2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(n-2) = +\infty \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) $v_n = 4u_n - 8n + 24$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24$$
$$v_{n+1} = 4(\frac{1}{2}u_n + n - 1) - 8n - 8 + 24$$
$$v_{n+1} = 2u_n - 4n + 12$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Comme (v_n) est positif et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$

donc (v_n) est décroissante

b) Montrons que $u_n = 7(\frac{1}{2})^n + 2n - 6$

on a :

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_0 = 8$$
$$v_n = 4u_n - 8n + 24$$
$$u_n = \frac{1}{4}v_n + 2n - 6$$

En remplaçant v_n par sa valeur on obtient : $u_n = \frac{1}{4} \times 28(\frac{1}{2})^n + 2n - 6$

D'où : $u_n = 7(\frac{1}{2})^n + 2n - 6$

on a : $u_n = 7(\frac{1}{2})^n + 2n - 6$

c) En posant

$$X_n = 7(\frac{1}{2})^n$$

et

$$Y_n = 2n - 6$$

alors

$$u_n = X_n + Y_n$$

(X_n)est une S.G de raison $q = \frac{1}{2}$ et son 1^er^ terme $X_0 = 7$

(Y_n) est une S.A de raison $r = 2$ et son 1 er terme $Y_0 = -6$

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$u_0 = X_0 + Y_0$

$+$

$u_1 = X_1 + Y_1$

$+$

.

.

.

$u_n = X_n + Y_n$

En sommant membre par membre on trouve : $S_n = X_0 \frac{(1-(\frac{1}{2})^{n+1})}{1-\frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(Y_0 + Y_n)}{2}$

$$S_n = 14(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) + (n+1)(n-6)$$

Problèmes de synthèse

Problème 1 :

- On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = e^{2n+1}$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison
2. Soit $v_n = \ln(u_n)$ montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison
3. On note S_n la somme des n premiers termes de (v_n) et p_n le produit des n premiers termes de (u_n) calculer s_n, p_n

- On considère la suite (w_n) définie pour $n \geq 1$ par : $w_n = \ln(\frac{n}{n+1})$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n) et pour tout entier $n \geq 1$ le signe de (w_n)
2. On pose $s_n = w_1 + w_2 +, \dots, + w_n$ calculer s_n en fonction de n et la limite de s_n .

Problème 2 :

- On définit la suite des nombres complexes(z_n) par : $z_0 = 4$ $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ soit M_n le point image de z_n dans un $R.O.N\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$

1. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et isocèle en M_{n+1} (on pourra considérer le complexe $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$)
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique

b) Interpréter géométriquement d_n

c) Exprimer en fonction de n la longueur l_n de la ligne brisée $(M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n)$

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \arg(z_n)[2\pi]$

a) Etablir une relation entre a_n et a_{n-1}

b) En déduire la nature de la suite (a_n)

c) Donner a_n en fonction de n

d) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils-alignés ?

Problème 3 :

(A)

1) Etudier les variations de la fonction $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$

2) Montrer que $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est 0 et l'autre est α et que $1,59 \prec \alpha \prec 1,60$

3) En déduire le signe de g

(B)

- On pose $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$

1. Etudier les variations de la fonction : $h(x) = e^x - 2x$ et préciser son signe, en déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $f(x)=\dfrac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}$. En déduire les limites de f en $\pm\infty$

3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

4. Donner $T.V$ de f

5. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$ en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

6. Montrer que Cf admet deux asymptotes et étudier les positions relatives de Cf et ses asymptotes

7. Tracer Cf

(C)

1. Montrer que $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}-1$ en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2. Calculer l'aire définie par les points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

Problème 4:

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante

$(E): z^2+6z+25=0$

1. Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $Im(Z_1)$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

   Soient les points A,B et C d'affixes respectives : $z_A=z_1-6i, z_B=z_2+4$ et $z_C=-1+2i$ placer les points A,B et C dans le repère

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme

3. Pour tout nombre $z \neq 3$ on pose $f(z) = \frac{z+3+2i}{z-3}$

a) Calculer le nombre $\alpha = f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$

4. Pour tout n non nul on pose $z_n = \alpha^n$ (où α est le nombre calculé à la question 3)a))Soit M_n le point d'affixe z_n

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses

b) Que peut-on dire des points M_{2014} et M_{2016} ?

Problème 5 :

(A)

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1. Déterminer les limites de g et dresser son tableau des variations
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,27;0,28[$

   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

(B)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x\ln x}{x+1}$ pour $x\in]0;+\infty[$

Et $f(0)=0$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 puis interpréter
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. a) Montrer que pour $x\in]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(x+1)^2}$

   b) Montrer que $f(\alpha)=-4\alpha$

   c) Dresser le tableau de variation de f

(C)

Soit C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ et T la tangente à C au point d'abscisse 1.

1. Donner une équation de T
2. On considère la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x)=f(x)-2(x-1)$

   a) Montrer que $\varphi''(x)=f''(x)=\dfrac{4h(x)}{(x+1)^3}$ où h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

   $h(x)=-x+\dfrac{1}{x}-2\ln x$

b) Calculer $h'(x)$ et en déduire le sens de variation de h, calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ puis le signe de $\varphi''(x)$

c) Donner les sens de variation de φ ', le singe de $\varphi'(x)$, le sens de variation de φ et le signe de $\varphi(x)$

d) Conclure sur la position de C par rapport à T .

3. Tracer T et C (unité graphique 4cm)

Solutions des problèmes de synthèse

Problème 1 :

$u_n = e^{2n+1}$

1) $u_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+2+1} = e^{2n+1+2} = e^{2n+1} \times e^2$

$u_{n+1} = e^2 u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de racine $q = e^2$

2) $v_n = \ln u_n \Rightarrow v_n = \ln e^{2n+1} = 2n+1$

$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) - (2n+1) = 2n+2+1-2n-1 = 2$

$v_{n+1} - v_n = 2$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison r=2

3) $s_n = v_1 + v_2 + \ldots v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(3 + 2n + 1)$

$s_n = \frac{n}{2}(2n+4) = \frac{n}{2}(2(2+2)) = n(n+2)$

$p_n = u_1 \times u_2 \times .. u_n$

$\Rightarrow \ln p_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots\ldots + \ln u_n$

$= v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = S_n$

$\Rightarrow \ln p_n = s_n \Rightarrow p_n = e^{s_n} \Leftrightarrow p_n = e^{n(n+2)}$

$w_n = \ln(\frac{n}{n+1})$

1) $w_{n+1} - w_n = \ln(\frac{n+1}{n+2}) - \ln(\frac{n}{n+1})$

$$= \ln(\frac{n+1}{n+2} / \frac{n}{n+1}) = \ln(\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n})$$

$$= \ln(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}) > 0 \text{ Car } \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

Donc (w_n) est croissante

$$w_n = \ln(\frac{n}{n+1}) < 0 \quad \text{Car} \quad \frac{n}{n+1} < 1$$

(w_n) Est négative

2) $s_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$

$$= \ln(\frac{1}{2}) + \ln(\frac{2}{3}) + \ln(\frac{3}{4}) + ... + \ln(\frac{n}{n+1})$$

$$= \ln(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times .... \times \frac{n}{n+1})$$

$$= \ln(\frac{1}{n+1}) = \ln 1 - \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow s_n = -\ln(n+1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} s_n = \lim_{x \to +\infty}[-\ln(n+1)] = -\infty$$

Problème 2 :

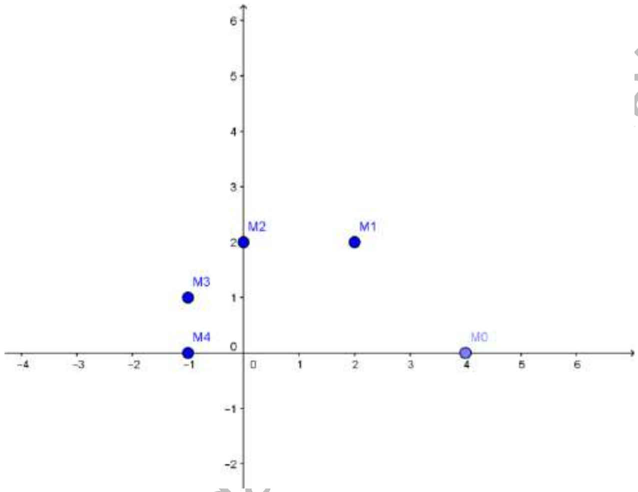
$$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases} \quad M_n(z_n)$$

$$z_1 = \frac{1+i}{2} \times z_0 = \frac{1+i}{2}(4) = 2+2i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2}(2+2i) = (1+1)(1+i) = 2i$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2}(2i) = (1+1)i = i-1 = -1+i$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{1+i}{2}(-1+i) = \frac{-1+i-i-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$



$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+i}{2}} = \frac{\frac{1+i-2}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i}$$

$$= \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i+1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

2) $\Rightarrow \dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-0} = \dfrac{z_{M_{n+1}} - z_{M_n}}{z_{M_{n+1}} - z_0} = i$

$$\Rightarrow \frac{|z_{M+1} - z_M|}{|z_{M+1} - z_0|} = |i| = 1$$

$$\Rightarrow |z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1} - z_0|$$

$M_nM_{n+1} = M_oM_{n+1} \to OM_nM_{n+1}$ est isocèle

Et $\arg(\frac{z_{M_{n+1}} - z_{M_n}}{z_{M_{n+1}} - z_o}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{M_{n+1}O}, \overrightarrow{M_{n+1}M_n}) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (M_{n+1}O) \perp (M_{n+1}M_n)$

Conclusion : $OM_{n+1}M_n$ est isocèle rectangle en M_{n+1}.

3) $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a)

$d_n = |z_{n+1} - z_n|$

$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |\frac{1+i}{2}z_{n+2} - \frac{1+i}{2}z_{n+1}|$

$= |\frac{1+i}{2}||z_{n+1} - z_n|$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}.d_n$

$d_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}d_n$,donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $d_n = |z_{n+1} - z_n| = M_nM_{n+1}$

c)

$\iota_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots.. + M_{n-1}M_n$

$\iota_n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \ldots. + |z_n - z_{n-1}|$

$\iota_n = d_0 + d_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_{n-1}$

$\iota_n = d_0 \frac{1-q^n}{1-q}$

$\iota_n = 2\sqrt{2}(\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}})$

d)

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2}\left(\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

4) a) $a_n = \arg(z_n)[2\pi] = \arg(\frac{1+i}{2} z_{n-1}) = \arg(\frac{1+i}{2}) + \arg(z_{n-1})$ $a_n = \frac{\pi}{4} + a_{n-1}$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = \frac{\pi}{4}$$

b) la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{\pi}{4}$

c)

$$a_n = a_0 + nr = \arg(z_0) + n\frac{\pi}{4} = \arg(4) + n\frac{\pi}{4}$$

$$a_n = n\frac{\pi}{4}$$

d.) Les points O, M_0 et M_n sont alignés Ssi $n\frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow n = 4k, k \in N$

Problème 3 :

A) $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$ 1) $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$g'(x) = 4e^x - (2e^x + 2xe^x) = e^x(4 - 2 - 2x) = (-2x+2)e^x$; $e^x \succ 0$;

$g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x.	$-\infty$	0		1		α	$+\infty$
g'(x)			+	0	-		
g(x)	-4	0	↗	2.e – 4	↘	0	$-\infty$

❖ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{4e^x}_{0} - \underbrace{2xe^x}_{0} - 4\right] = -4$

❖ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left[4 - 2x - \frac{4}{e^x}\right] = +\infty(-\infty) = -\infty$

$g(1) = 4e - 2e - 4 = 2e - 4 \simeq 1,43$; $g(0) = 4e^0 - 2\times 0e^0 - 4 = 4 - 4 = 0$

Donc 0 est solution de $g(x)=0$ et sur l'intervalle $]1,+\infty[$ g est continue et strictement décroissante sur $J=]-\infty,1,43[$ et $0\in]-\infty,1,43[$ donc l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α sur $]1,+\infty[$ $g(1,59)=0,02>0$; $g(1,6)=-0,03<0\Rightarrow 1,59<\alpha<1,6$

4) d'après TV on a

x.	$-\infty$		0		α	$+\infty$
g(x)		-	0	+	0	-

B) $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$

1) $h(x)=e^x-2x, h'(x)=e^x-2$; $h'(x)=0\Rightarrow e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$

$h(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2>0$ $h(x)\geq 0,62\Rightarrow h(x)>0$

x.	0		ln2		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h(x)	1		0.62		$+\infty$

Et comme $h(x)\neq 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x}-2}$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2-0}{0-2}=-1$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2-0}{+\infty-2}=\dfrac{2}{+\infty}=0$ $y=0$ AH en $-\infty$ $y=0$ AH en $+\infty$

3) $f'(x)=\dfrac{2\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)\left(2x-2\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\dfrac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\dfrac{4e^x-2xe^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}}$

$\left(e^x-2x\right)>0$ donc f' et g ont le même signe

4)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$		
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

5) $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$ or

$g(\alpha)=0\Rightarrow 4e^\alpha-2\alpha e^\alpha-4\Rightarrow e^\alpha\left(4-2\alpha\right)=4\Rightarrow e^\alpha=\dfrac{4}{4-2\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\frac{\alpha-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha-1}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}=\frac{-(\alpha-1)+1}{\alpha-1}=\frac{-(\alpha-1)}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}} \text{ or } 1,59 < \alpha < 1,6 \Rightarrow 0,59 < \alpha - 1 < 0,6 \Rightarrow \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0,59}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0,6} - 1 < -1 + \frac{1}{\alpha - 1} < -1 + \frac{1}{0,59} \Rightarrow 0,66 < f(\alpha) < 0,69$$

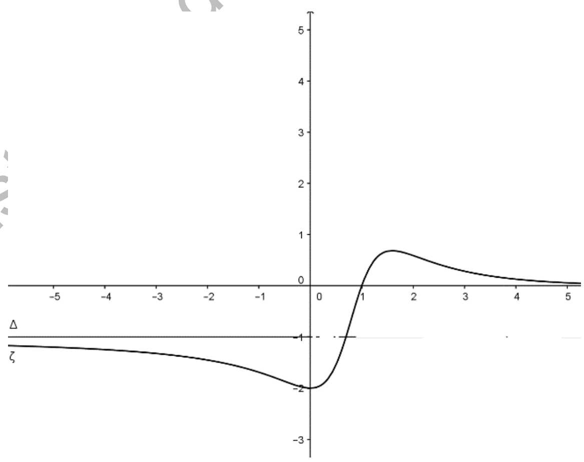
6) $y = -1$; $f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x} + 1 = \dfrac{2x - 2 + e^x - 2x}{e^x - 2x} = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x}$

x.	$-\infty$	ln2	$+\infty$
f(x)-y	-	0	+
PR	D/C	0	C/D

Avec $y = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x.	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)-y	-	0	+
PR	D'/C	0	C/D'

7)



(c)

1) $\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}-1=\dfrac{e^x-2-e^x+2x}{e^x-2x}=\dfrac{2x-2}{e^x+2x}=f(x)$;

$f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}-1 \Rightarrow F(x)=\ln\left(e^x-2x\right)-x$

2) $A:\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$

$A=\int_1^2 f(x)dx=\left[f(x)\right]_1^2=\left[\ln\left(e^x-2x\right)-x\right]_1^2=\ln\left(e^2-4\right)-2-\left[\ln\left(e-2\right)-1\right]$

$=\ln\left(e^2-4\right)-2-\ln\left(e-2\right)+1=-1+\ln\left(\dfrac{e^2-4}{e-2}\right)=-1+\ln\left(\dfrac{(e-2)(e+2)}{e-2}\right)$

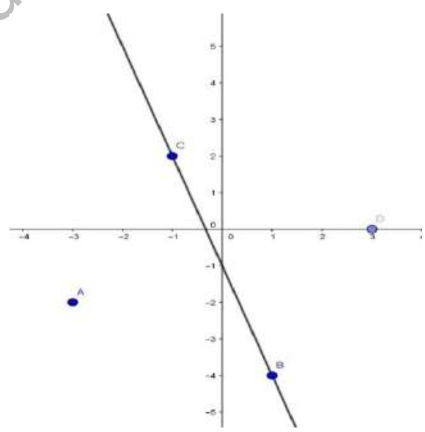
$\boxed{A=\left(-1+\ln(e+2)\right)};ua$

Problème 4 :

1) $z^2+6z+25=0$; $\Delta=36-100=-64$; $\Delta=\left(8i\right)^2$

$z_1=\dfrac{-6+8i}{2}=-3+4i$; $z_2=\dfrac{-6+8i}{2}=-3-4i$

2) $z_A=z_1-6i=-3+4i=-3-2i$; $z_B=z_2+4=-3-4i+4=1-4i$; $z_C=-1+2i$



a) $k=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1+2i+3+2i}{1-4i+3+2i}=\frac{2+4i}{4-2i}=\frac{1+4i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{5}=\frac{5}{5}i=i$; $k=i$

$|k|=|i|=1$

b)

$ABDC$ ▱ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow z_B-z_A=z_D-z_c\Rightarrow z_D=z_B-z_A+z_C=1-4i+3+2i-1+2i=3$
$\Rightarrow z_D=3$

3) $f(z)=\frac{z+3+2i}{z-3}$

a) $\alpha=f(5-6i)=\frac{5-6i+3+2i}{5-6i-3}=\frac{8-4i}{2-6i}=\frac{4-2i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{10+10i}{10}=1+i$

$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\left|\underbrace{z}_{z_M}-\underbrace{(-3-2i)}_{z_A}\right|=\left|\underbrace{z}_{z_M}-\underbrace{3}_{z_D}\right|\Rightarrow\left|\underbrace{z_M-z_A}_{AM}\right|=\left|\underbrace{z_M-z_D}_{DM}\right|$

$\Gamma_1=$ médiatrice de $[AD]$; $\Gamma_1=(BC)$

$\Gamma_2:|f(z)-1|=\sqrt{10}\Rightarrow\left|\frac{z+3+2i}{z-3}-1\right|=\sqrt{10}\Rightarrow\frac{|6+2i|}{|z_A-z_D|}=\sqrt{10}\Rightarrow\frac{2\sqrt{10}}{MD}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow\frac{2}{MD}=1\Rightarrow MD=2$, Γ_2 est le cercle de centre D et de rayon 2

4) $z_n=\alpha^n$; $M_n(z_n)$

a) $M_n \in (ox) \Rightarrow z_n$ est réel $=> \arg z_n = k\pi \Rightarrow \arg \alpha^n = k\pi \Rightarrow n \arg \alpha = k\pi$

$\Rightarrow n \times \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow n = 4k \quad n = 0, 4, 8, ...$ les multiples positifs de 4

b) M_{2014} ; $n = 2014$ n'est pas multiple de 4 donc $M_{2014} \notin (ox)$

M_{2016} $n = 2016 = 504 \times 4$ c'est un multiple de $4 \Rightarrow M_{2016} \in (ox)$

Problème 5 :

A)

1) $g(x) = x + 1 + \ln x$; $D_g =]0, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 + 1 + (-\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty + 1 + \infty = +\infty$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0; \forall x \in]0, +\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0		$+$
$g(x)$	||	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) g est bijective (continue et strictement croissante) de $]0, +\infty[$ vers $J =]-\infty, +\infty[$ et $0 \in J =]-\infty, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet solution unique α ; $g(0,27) < 0$ et $g(0,28) > 0 \Rightarrow \alpha \in]0,27; 0,28[$

b) Signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

B)

$f(x)=\dfrac{4x\ln x}{x+1}$ et $f(0)=0$

1) a)

❖ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\ln x}{x+1}=\dfrac{4\times 0}{0+1}=0=f(0)$ donc f est continue en O

❖ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{4x\ln x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\ln x}{x(x+1)}=\dfrac{-\infty}{1}=-\infty\notin\mathbb{R}$

donc f n'est pas dérivable en O. donc C_f admet en O une demi tg verticale

2)

❖ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x+1}\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}\ln x=+\infty$

3) a) $f'(x)=\dfrac{(4\ln x+4)(x+1)-4x\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{4\left[(\ln x+1)(x+1)-x\ln x\right]}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{4\left[x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x\right]}{(x+1)^2}=\dfrac{4(x+1+\ln x)}{(x+1)^2}=\dfrac{4g(x)}{(x+1)^2}$; $(x+1)^2>0$ donc f'et g ont le même signe .

b) $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha\ln\alpha}{\alpha+1}$ or $g(\alpha)=0$; $g(\alpha)=0\Rightarrow \alpha+1+\ln\alpha=0\Rightarrow \ln\alpha=-\alpha-1$

$$f(\alpha)=\frac{4\alpha(-\alpha-1)}{\alpha+1}=\frac{-4\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}=-4\alpha$$

c)

x.	0		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	décroissante	-4α	croissante	$+\infty$

C)

1) T : tangente en $x_0=1$; $y=\underbrace{f'(x)}_{2}(x-1)+\underbrace{f(1)}_{0}=2(x-1)$

2) $\varphi(x)=f(x)-2(x-1)\Rightarrow\varphi'(x)=f'(x)-2\Rightarrow\varphi''(x)=f''(x)$

$$f''(x)=\frac{4\left(1+\frac{1}{x}\right)(x+1)^2-8(x+1)(x+1+\ln x)}{(x+1)^3}=\frac{4\left[x+1+1+\frac{1}{x}-2x-2-2\ln x\right]}{(x+1)^3}=\frac{4\left(-x+\frac{1}{x}-2\ln x\right)}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{4h(x)}{(x+1)^3}}$$

b) $h'(x)=-1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\prec 0$; $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	|	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

$h(1)=0$ d'où le signe de $h(x)$

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	|	$-$	

$\varphi''(x)=\dfrac{4h(x)}{(x+1)^3}$; φ'' et h ont le même signe

c)

x.	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$ ||		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$ ||		$\nearrow$	0	$\searrow$	

d'après TV de φ' on a $\varphi'(x)\leq 0$

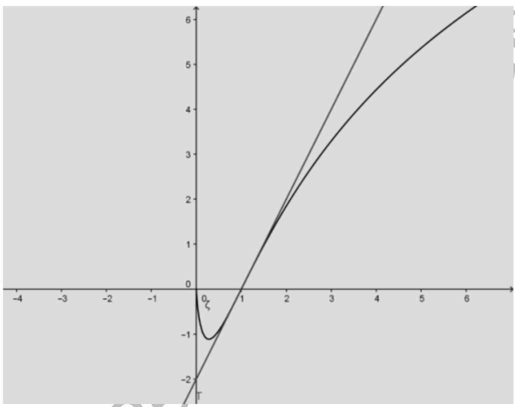
x.	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

x.	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

La position relative de C_f et T dépend du signe de $\varphi(x)$

x.	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	
PR		C/T	0	T/C	

3)



$T: y = 2(x-1)$

$(1,0)$; $(0,-2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{x+1} = 0$; $BI(ox)$