$\alpha) - \alpha = 0$ soit $\alpha < 3$ < 0

...que Islamique de Mauritanie
...stère de l'Education Nationale
...t de la Formation Professionnelle
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2019
Session Normale
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_n = 3^n + n - 1$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\dfrac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	0.5 pt
2	La suite (u_n) est	convergente	divergente	bornée	0.5 pt
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, alors la valeur de S_n est	$\dfrac{3^{n+1}-1}{2} + \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\dfrac{1-3^{n+1}}{-2} + \dfrac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\dfrac{1-3^{n+1}}{2} + \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$	0.5 pt
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$	0.5 pt
5	Le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	0.5 pt
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$, alors la valeur de T_n est	$\dfrac{(n+1)^2}{2}\ln 3$	$\ln\left(\dfrac{3^{n+1}-1}{2}\right)$	$\dfrac{n^2+n}{2}\ln 3$	0.5 pt

- Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$ — 0.5 pt

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$. — 0.5 pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0.5 pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25 pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \dfrac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. — 0.75 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. — 0.75 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$. — 0.75 pt

4° On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique. — 0.25 pt

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}. — 0.25 pt

Exercice 3 (6 points)

A. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$. — 0.5 pt

2° Soit h la solution de (E) qui vérifie $h(0) = -1$ et $h'(0) = -1$. Montrer que $h(x) = (x-1)e^{2x}$. — 0.5 pt

Scanned with CamScanner

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) + 2x - 2 = (x-1)(2+e^{2x})$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. — 1 pt

b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C) et étudier leurs positions relatives. — 0.75 pt

2° a) Montrer que $f'(x) = 2 + (2x-1)e^{2x}$ et en déduire l'expression de $f''(x)$. (f' et f'' étant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f). — 0.5 pt

b) Montrer que le point $A(0;-3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). — 0.5 pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. — 0.5 pt

d) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à la droite D. Ecrire une équation de T. — 0.5 pt

b) Tracer D, T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0.5 pt

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x - 1 = me^{-2x}$. — 0.25 pt

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. — 0.5 pt

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. — 0.5 pt

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution α telle que $1,7 < \alpha < 1,8$. — 0.5 pt

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. — 0.25 pt

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. — 1 pt

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$, où f' est la dérivée de f. — 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°c). — 0.25 pt

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox). — 0.25 pt

4° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J =]-\infty; f(\alpha)]$. — 0.25 pt

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$. — 0.25 pt

c) Construire Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ où Γ' est la courbe de h^{-1}. — 0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{e^2-3}{4}$. — 0.25 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$ — 0.5 pt

Fin

Bac 2019 session complémentaire
Énoncé

Exercice 1

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.
On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		‖		
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ -3	↗	2

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de définition de f est	$]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$	$]-\infty,3[\cup[3,+\infty[$	$]-\infty,+\infty[$
2	La fonction f est	paire	impaire	ni paire, ni impaire
3	La courbe (C) coupe (Ox) en	3 points	2 points	1 seul point
4	Le nombre d'asymptote de la courbe (C) est	Une seule	deux	trois
5	Le nombre de tangentes horizontale de (C) est	1	2	3
6	Le nombre de de solutions de l'équation $f(x) = -2$ est	1	2	3

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée.

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.
a. Déterminer les racines carrés de $-12-16i$.
b. Calculer $P(-i)$.
c. Déterminer les réels a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$.
d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(x) = 0$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3-2i$.
a. Placer les points A, B et C.
b. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4+i$.
c. Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD.
3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+2i$; on pose $f(z) = \frac{z-3+2i}{z-1-2i}$.
a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.
b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{20}$.
4. On pose $\alpha = \frac{z_A + z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n = |\alpha^n|$.
a. Ecrire α sous forme algébrique et vérifier que $u_n = \frac{1}{2^n}$.
b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique et montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_{2019} = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(-1) = 0$ et $\forall x > -1$, $f(x) = (x+1)^2\ln(x+1) - (x+1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.
1. a. Vérifier que $\forall x > -1$, $f(x) = (x+1)[(x+1)\ln(x+1) - 1]$.
b. Monter que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = -1$ $\left(\text{on donne la limite suivante } \lim\limits_{x \to -1^+}(x+1)\ln(x+1) = 0\right)$.
c. En déduire que f est continu et dérivable à droite de -1.
b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.
2. a. Montrer que $\forall x > -1$, $f'(x) = 2(x+1)\ln(x+1) + x$, (f' étant la dérivée de f).
b. En remarquant que $\forall x > -1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que f' est négatif sur $]-1,0[$ et positif sur $]0,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α, avec $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$.

c. Justifie que $g'(\alpha)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})'(0)$, où g^{-1} est la réciproque de g).

4. Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de g^{-1}).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote pour Γ. Etudier la position relative entre Γ et D.

2. a. Calculer f'(x) et justifier que $f''(x)=(2x+2)e^x$. (f' et f'' étant les respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f).

b. Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Déterminer le point d'intersection de Γ avec (Ox).

b. Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de Γ.

c. Tracer D , T et Γ dan le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$.

d. Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solution de l'équation $(2x-2)e^x=2+m$.

4. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^1(2x-2)e^x\,dx$.

b. En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par Γ, l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.

Solution

x	$-\infty$		-3		0		3 ‖		$+\infty$
f'(x)			0		0		‖		
f(x)	-2	↗	3	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ -3	↗	2

Exercice 1

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

Compléter le tableau :

1. Domaine de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$.
2. La fonction f est ni paire, ni impaire.
3. La courbe (C) coupe (Ox) en 3 points.
4. Le nombre d'asymptote de la courbe (C) est trois telles que x=3, y=−2 en $-\infty$ et y=2 en $+\infty$.
5. Le nombre de tangentes horizontale de (C) est 2 car la dérivée s'annule en deux points d'abscisses respectives x=−3 et x=0.
6. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$ est 2.

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	A	C	B	B

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-i)z^2+7z-4+7i$.

a. Déterminer les racines carrés de $-12-16i$:

Déterminons alors les nombres complexes z tels que $z^2=-12-16i$.

Posons $z=x+iy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 & (1)\\ x^2+y^2=\sqrt{144+256} & (2)\\ 2xy=\quad -16 & (3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 & (1)\\ x^2+y^2=20 & (2)\\ 2xy=-16 & (3)\end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ ou $x=-2$.

(3) $2xy=-16\Rightarrow y=\frac{-8}{x}$. Si $x=2$ alors $y=\frac{-8}{2}=4$ et si $x=-2$ alors $y=\frac{-8}{-2}=4$.

D'où les racines carrées de $-12-16i$ sont $2-4i$ et $-2+4i$.

b. Calculer $P(-i)$:

$P(z)=(-i)^3-(4-i)(-i)^2+7(-i)-4+7i=i+4-i-7i-4+7i=0$